Carlos Ivorra Castillo

GEOMETRÍA ALGEBRAICA

Mientras el álgebra y la geometría han estado separadas, su progreso ha sido lento y sus aplicaciones limitadas; pero cuando estas dos ciencias se han unido, han intercambiado sus fuerzas y han avanzado juntas hacia la perfección.

J.L.Lagrange

Índice General

Introducción **vii**

Capítulo I: Variedades afines **1**
1.1 Conjuntos algebraicos afines 2
1.2 El ideal de un conjunto algebraico 7
1.3 Funciones polinómicas 11
1.4 La topología de Zariski 14
1.5 Funciones racionales 18
1.6 Extensiones del cuerpo de definición 21

Capítulo II: Variedades proyectivas **37**
2.1 Conjuntos algebraicos proyectivos 38
2.2 Clausuras proyectivas 47
2.3 Variedades cuasiproyectivas 55
2.4 Producto de variedades 65
2.5 Aplicaciones racionales 73
2.6 Aplicaciones finitas 78

Capítulo III: Dimensión **87**
3.1 La dimensión de un conjunto algebraico 88
3.2 Variedades tangentes y diferenciales 98
3.3 Puntos regulares 110
3.4 Inmersión de variedades 124
3.5 Curvas algebraicas 130

Capítulo IV: Variedades reales y complejas **139**
4.1 Las estructuras topológica y analítica 139
4.2 El teorema de conexión 148
4.3 Variedades proyectivas 154
4.4 El teorema de Lefschetz 164

Capítulo V: Funciones algebraicas I **183**
5.1 Cuerpos de funciones algebraicas 183
5.2 Divisores primos 186
5.3 Extensiones de cuerpos de funciones 191

5.4 Divisores . . . 203
5.5 Extensiones de constantes . . . 212
5.6 Funciones algebraicas complejas . . . 216
5.7 La aplicación de Frobenius . . . 222

Capítulo VI: Funciones algebraicas II **227**
6.1 Intersección de curvas . . . 227
6.2 Diferenciales de funciones algebraicas . . . 241
6.3 La dimensión de un divisor . . . 253
6.4 El teorema de Riemann-Roch . . . 256

Capítulo VII: Consecuencias del teorema de Riemann-Roch **265**
7.1 Consecuencias inmediatas . . . 265
7.2 Cuerpos de funciones elípticas . . . 270
7.3 Formas diferenciales . . . 279
7.4 Cuerpos de constantes finitos . . . 284

Capítulo VIII: Integrales abelianas **301**
8.1 Homología y cohomología . . . 304
8.2 Integración de formas meromorfas . . . 311
8.3 El teorema de Abel . . . 320
8.4 El teorema de inversión de Jacobi . . . 326
8.5 Integrales elípticas . . . 329
8.6 Funciones elípticas complejas . . . 335

Apéndice A: Divisores en variedades regulares **345**
A.1 Subvariedades de codimensión 1 . . . 345
A.2 Divisores . . . 349
A.3 Aplicación a las isogenias . . . 356

Apéndice B: Preliminares algebraicos **363**
B.1 El lema de Nakayama . . . 363
B.2 Series formales de potencias . . . 365
B.3 Diferenciales de series de potencias . . . 377

Bibliografía **389**

Índice de Materias **390**

Introducción

La geometría algebraica estudia los sistemas de ecuaciones polinómicas con coeficientes en un cuerpo. Conviene comparar esta "definición" con otra más conocida: El álgebra lineal estudia los sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en un cuerpo. Cualquiera que conozca el álgebra lineal reconocerá que ésta es una buena forma de describirla en pocas palabras, pero también sabrá que en realidad el álgebra lineal trasciende su propósito original, de modo que es fácil encontrar libros de álgebra lineal en los que los sistemas de ecuaciones sean una herramienta secundaria. En efecto, el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales pasó hace mucho tiempo de ser una mera manipulación de fórmulas a convertirse en el estudio de una serie de estructuras algebraicas abstractas, como espacios vectoriales, variedades afines, anillos de matrices, etc., y las aplicaciones que las conectan. Estas estructuras permiten comprender en profundidad el comportamiento de los sistemas de ecuaciones lineales. Más aún, por una parte los conectan con la geometría, de modo que —por ejemplo— podemos pensar que la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas es el conjunto de puntos de la recta en que se cortan los dos planos determinados por las ecuaciones (salvo que éstos sean paralelos o coincidentes, lo cual tiene también su interpretación en cuanto al comportamiento de las ecuaciones). Por otra parte, su nivel de generalidad permite aplicar sus técnicas y resultados y, en particular, el razonamiento geométrico, a muchos contextos en los que en principio no hay ninguna interpretación geométrica subyacente. Así, en el ejemplo de las dos ecuaciones lineales, todo lo dicho vale igualmente aunque sus coeficientes pertenezcan, por ejemplo, a un cuerpo finito, de modo que las nociones de "recta" y "plano" no tienen ninguna interpretación intuitiva directa, si no es a través de la analogía que proporciona la propia álgebra lineal.

Sin entrar en detalles que el lector conocerá sobradamente, observemos únicamente que la forma de relegar a un segundo plano los sistemas de ecuaciones lineales para centrarse en las estructuras algebraicas derivadas de ellos consiste en centrar la atención en los *conjuntos de soluciones* de los sistemas, los cuales forman variedades afines, interpretables geométricamente como puntos, rectas, planos y generalizaciones a dimensiones superiores.

Todas estas observaciones y matices tienen sus equivalentes para el caso de la geometría algebraica. Pese a lo que su "definición" pudiera hacer pensar, se trata de una teoría algebraica muchísimo más profunda, rica y sofisticada que el álgebra lineal, que aparece en cuanto centramos la atención en los conjuntos de

soluciones de los sistemas de ecuaciones más que en los sistemas en sí. Dichos conjuntos forman variedades algebraicas, interpretables geométricamente como puntos, curvas, superficies y generalizaciones a dimensiones superiores.

Quizá la geometría algebraica debería llamarse más propiamente "álgebra no lineal" o, tal vez, "álgebra geométrica", para enfatizar así que no es realmente geometría sino que —al igual que el álgebra lineal— consiste en una serie de técnicas y conceptos algebraicos que en un contexto concreto tienen una interpretación geométrica natural, pero que son aplicables en muchos otros contextos, con lo cual podemos pensar geométricamente y aplicar ideas geométricas en casos donde la geometría sólo está presente como una mera analogía, mientras que todas las demostraciones son algebraicas y, a veces, muy distantes de cualquier interpretación geométrica directa.

Todo esto hace que si alguien quiere entender realmente la geometría algebraica tiene ante sí un doble objetivo: por una parte debe entender la conexión directa que existe entre el álgebra de la geometría algebraica y la geometría subyacente en el caso en que dicha geometría existe realmente como algo independiente del álgebra. Nos referimos al caso clásico en que los coeficientes de las ecuaciones son números complejos. Entonces las variedades algebraicas en el sentido la geometría algebraica son variedades diferenciales complejas en el sentido de la geometría diferencial (salvo a lo sumo en un conjunto de puntos "singulares"), y todos los conceptos definibles algebraicamente se corresponden de forma natural con sus análogos geométricos y topológicos.

Por otra parte, es necesario entender que las técnicas algebraicas trascienden el caso clásico y son aplicables, como el álgebra lineal, cuando no es posible hablar de curvas y superficies en otro sentido que no sea el de la geometría algebraica.

Por ejemplo, veremos que es posible definir la noción de dimensión de una variedad algebraica mediante conceptos puramente algebraicos. En el caso clásico, esta dimensión algebraica coincide con la dimensión en el sentido de la geometría diferencial, pero es esencial que sigue teniendo sentido —por ejemplo— para variedades definidas mediante ecuaciones con coeficientes en un cuerpo finito, donde la geometría diferencial no tiene nada que decir. Del mismo modo, la geometría algebraica nos permite hablar de variedades tangentes, de derivadas y diferenciales, de ceros y polos de funciones, etc. sin necesidad de ninguna estructura topológica o diferencial subyacente. Esto la convierte en una herramienta muy valiosa para la teoría algebraica de números.

No debemos deducir de aquí que el único interés de la geometría algebraica es su generalidad, de modo que en el contexto clásico no aporta nada frente a la geometría diferencial. Al contrario, cuando una variedad diferencial compleja es algebraica (es decir, puede definirse mediante polinomios) entonces posee muchas propiedades globales de las que la geometría diferencial no puede dar cuenta. Por ejemplo, puede probarse que toda superficie de Riemann compacta puede representarse como una curva algebraica (las superficies de Riemann tienen dimensión real 2 pero dimensión compleja 1, por eso son curvas). A partir de aquí es posible desarrollar una rica teoría global sobre las funciones meromorfas sobre las superficies de Riemann compactas.

Lo dicho hasta aquí debería bastar para que el lector se haga una primera idea de la enorme sofisticación y riqueza conceptual de la geometría algebraica: una visión a la vez profunda y global de esta disciplina involucraría necesariamente una base de geometría afín y proyectiva (álgebra lineal), otras técnicas algebraicas más sofisticadas (álgebra conmutativa), topología algebraica, geometría diferencial, teoría de funciones de variable compleja, técnicas procedentes de la teoría algebraica de números (valoraciones, dominios de Dedekind, etc.), así como teorías que se han desarrollado específicamente para formalizar la geometría algebraica (haces y esquemas), las cuales involucran a su vez la teoría de categorías y cohomología de grupos.

Evidentemente, un libro que pretendiera mostrar todas estas facetas de la geometría algebraica y a la vez profundizara mínimamente en sus resultados debería ser muchísimo más voluminoso que éste, de modo que aquí se vuelve obligado hacer una declaración de intenciones:

La finalidad de este libro es presentar la geometría algebraica de la forma más natural posible a un lector con ciertos conocimientos de teoría algebraica de números a modo de introducción a la teoría de funciones algebraicas en general y, más concretamente, a la teoría de funciones elípticas. Podríamos expresar esto diciendo que vamos a dar el paso de una teoría de números "plana" a una teoría de números "curva", similar al paso del análisis "plano" en $\mathbb{R}^n$ al análisis "curvo" de la geometría diferencial.

Hemos evitado los enfoques demasiado técnicos, como son el del álgebra conmutativa o el de la teoría de esquemas, y en su lugar hemos destacado el aparato algebraico procedente de la teoría algebraica de números. Además hemos incidido en el lenguaje geométrico, tanto en el de la geometría proyectiva como en el de la geometría diferencial, mostrando la equivalencia entre los conceptos algebraicos y los diferenciales (o topológicos) en el contexto clásico. Aunque en los primeros capítulos tratamos con variedades de dimensión arbitraria, a partir de la mitad del libro aproximadamente nos restringimos al estudio de curvas (variedades que en el caso clásico tienen dimensión compleja 1 y son, por consiguiente, superficies de Riemann). Entendemos que para un estudio sistemático de las variedades de dimensión arbitraria es recomendable estar primeramente familiarizado con la teoría de curvas. No obstante, en el apéndice A volvemos brevemente al caso de variedades de dimensión arbitraria, pero únicamente para probar un teorema muy importante en la teoría de curvas elípticas, cuya prueba requiere trabajar con una superficie.

En resumen, confiamos en que el lector que siga este libro termine con una visión clara de las posibilidades que ofrece la geometría algebraica y del modo en que en ella se combinan el álgebra, la geometría y el análisis matemático.

Capítulo I

Variedades afines

La geometría algebraica (clásica) estudia los conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones polinómicas. Veremos que dichos conjuntos de soluciones se comportan esencialmente como "variedades" con un comportamiento análogo al de las variedades diferenciales que estudia la geometría diferencial. Ahora bien, para que esto sea así hay que tener en cuenta un hecho que generaliza un fenómeno bien conocido al tratar con polinomios. Son muchos los contextos en los que podemos estar interesados en las raíces reales de un polinomio como $F(X) = X^3 + X^2 \in \mathbb{R}[X]$, y entonces decimos que F tiene una única raíz, a saber, $x = 0$. Sin embargo, a la hora de entender plenamente el comportamiento de F, no podemos despreciar el hecho de que, nos interesen o no, F tiene otras dos raíces "imaginarias", a saber, $x = \pm i$.

Lo mismo sucede cuando estudiamos un sistema de ecuaciones con coeficientes en un cuerpo k. Aunque en un contexto determinado sólo nos interesaran sus soluciones en k^n, para entender la situación necesitamos tener en cuenta la posibilidad de que el sistema tenga soluciones "imaginarias" en el sentido general de soluciones con coordenadas en la clausura algebraica de k que puedan no estar en k.

A veces, la clausura algebraica de k puede ser incluso un cuerpo demasiado pequeño. Por ejemplo, si tenemos un sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Q}$, podemos estar interesados en sus soluciones reales, pero, como $\mathbb{R}$ no es algebraicamente cerrado, si no queremos perder de vista soluciones "imaginarias" necesarias para entender el comportamiento del sistema, tendremos que considerar soluciones en $\mathbb{C}^n$, cuando $\mathbb{C}$ dista mucho de ser la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$.

Para tener en cuenta estas situaciones en un contexto general, en todo momento trabajaremos con una extensión de cuerpos K/k, donde K será un cuerpo algebraicamente cerrado. Representaremos por $\bar{k} \subset K$ la clausura algebraica de k.

La idea es que consideraremos sistemas de ecuaciones con coeficientes en k, pero nos interesaremos por sus soluciones en K^n.

1.1 Conjuntos algebraicos afines

Espacios afines A la hora de estudiar los conjuntos algebraicos, es decir, los conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones polinómicas, a menudo resulta útil "moverlos" hasta una posición adecuada (por ejemplo, en la que un punto que nos interese pase a ser el $(0,0)$, etc.) Sin embargo, desde un punto de vista teórico resulta más conveniente aún "movernos nosotros" en lugar de mover el conjunto, es decir, cambiar de sistema de referencia. Ello nos lleva a recordar primeramente los conceptos básicos de la geometría afín, antes incluso de presentar la definición precisa de conjunto algebraico.

Definición 1.1 Llamaremos *espacio afín n-dimensional* de un cuerpo k al conjunto $A^n(k) = k^n$. A sus elementos los llamaremos *puntos.* Notemos que $A^n(k) \subset A^n(K)$. Escribiremos A^n en lugar de $A^n(K)$. A los puntos de $A^n(k)$ los llamaremos *puntos racionales* de A^n. Escribiremos k^n cuando queramos referirnos a k^n como espacio vectorial y no como mero conjunto de puntos.

La diferencia entre $A^n(k)$ y k^n es que en A^n vamos a "olvidar" la estructura vectorial de k^n, de modo que ningún punto desempeñe un papel destacado (al contrario de lo que ocurre en k^n con el vector 0). Esto no significa que despreciemos la estructura vectorial, sino que nos permitimos la posibilidad de asociar una estructura vectorial a cada punto, de modo que el vector 0 sea en cada momento el punto que más convenga.

Más concretamente, si $P, Q \in A^n$, llamaremos $\overrightarrow{PQ} = Q - P \in K^n$. De este modo, fijado un punto $O \in A^n$, obtenemos una estructura vectorial al identificar cada punto $P \in A^n$ con el vector $\overrightarrow{OP}$.

Un *sistema de referencia afín* en A^n (definido sobre k) es una $n+1$-tupla $(O; P_1, \ldots, P_n)$ de puntos de $A^n(k)$ tal que los vectores $\overrightarrow{OP_i}$ forman una base de k^n como k-espacio vectorial (luego también de K^n como K-espacio vectorial). Las *coordenadas* de un punto $P \in A^n$ en dicho sistema de referencia son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ en la base $\overrightarrow{OP_i}$. Cuando no haya confusión escribiremos O en lugar de $(O; P_1, \ldots, P_n)$.

Así, si las coordenadas de P son $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$, tenemos que

$$P = O + \overrightarrow{OP} = O + a_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{OP_n}. \tag{1.1}$$

En particular vemos que un punto está completamente determinado por sus coordenadas en un sistema de referencia dado. En la mayoría de las ocasiones sobrentenderemos que hemos fijado un sistema de referencia e identificaremos cada punto con la n-tupla de sus coordenadas.

En lo sucesivo, siempre que hablemos de un sistema de referencia de A^n se sobrentenderá que está definido sobre k. Así los puntos de $A^n(k)$ son precisamente los puntos de A^n cuyas coordenadas respecto de cualquier sistema de referencia afín están en k^n.

Es fácil ver que si tenemos dos sistemas de referencia afines O y O', entonces las coordenadas de un punto arbitrario P en ambos sistemas, digamos $(X_1, \ldots, X_n)$ y $(X'_1, \ldots, X'_n)$ están relacionadas por un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en k:

$$\begin{aligned} X'_1 &= b_1 + a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n, \\ \cdots & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X'_n &= b_n + a_{n1}X_1 + \cdots + a_{nn}X_n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Recíprocamente, cualquier sistema de ecuaciones de este tipo (con coeficientes en k) cuya matriz de coeficientes (a_{ij}) sea regular se corresponde con un cambio de sistema de referencia.

A partir de aquí ya podemos "olvidar" que los puntos de A^n son, conjuntistamente, n-tuplas y pensar que cada punto P tiene determinadas unas coordenadas en cada sistema de referencia de A^n. Las componentes de P son simplemente sus coordenadas en el sistema de referencia formado por $O = (0, \ldots, 0)$ y los vectores de la base canónica de k^n, pero este sistema de referencia particular no tiene ningún significado especial en la teoría.

El lector familiarizado con la geometría afín se habrá dado cuenta de que, en vez de definir la estructura general de espacio afín en el sentido de [G 4.10] hemos definido únicamente un ejemplo concreto de espacio afín (para cada cuerpo y dimensión), pero también sabrá que con esto no perdemos generalidad dado que todos los espacios afines sobre el mismo cuerpo y de la misma dimensión son isomorfos y, al fin y al cabo, sólo estamos interesados en K^n. Si hemos introducido el lenguaje de la teoría afín ha sido únicamente para poder hacer referencia a los subconjuntos de K^n en términos de coordenadas respecto de un sistema de referencia que podamos elegir convenientemente sin que ello suponga modificar en nada el conjunto en cuestión.

Conjuntos algebraicos Ya estamos en condiciones de dar una definición adecuada de lo que vamos a entender por un conjunto algebraico afín:

Definición 1.2 Si $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ es un polinomio y un punto $P \in A^n$ tiene coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ en un sistema de referencia dado, escribiremos $F(P)$ para referirnos a $F(a_1, \ldots, a_n)$. Por supuesto, esta notación depende del sistema de referencia. Si $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ es un conjunto de polinomios, llamaremos

$$V_K(S) = \{P \in A^n(K) \mid F(P) = 0 \text{ para todo } F \in S\}.$$

En la práctica omitiremos el subíndice K cuando el cuerpo se sobrentienda. Diremos que un conjunto $C \subset A^n$ es *algebraico* (sobre k) si $C = V(S)$ para cierto conjunto $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$.

Observemos que $V(S)$ depende del sistema de referencia con el que se evalúan los polinomios, pero no sucede lo mismo con el carácter algebraico de un

conjunto: Si $C = V(S)$ es un conjunto algebraico respecto a un sistema de referencia O y consideramos otro sistema O', a cada polinomio $F \in S$ le podemos asignar —mediante un cambio de variables lineal de tipo (1.2)— otro polinomio F' de modo que F se anula en las coordenadas de un punto P respecto a O si y sólo si F' lo hace en sus coordenadas respecto de O'. Si llamamos S' al conjunto de los polinomios así obtenidos resulta que $C = V_O(S) = V_{O'}(S')$, luego T también es algebraico respecto del sistema O'.

En lugar de pensar que un mismo conjunto de polinomios S define conjuntos algebraicos distintos en sistemas de referencia distintos, es mejor pensar que un mismo conjunto algebraico C está definido por conjuntos de polinomios distintos respecto a sistemas de referencia distintos.

El conjunto vacío es algebraico, pues $\varnothing = V(1)$, al igual que lo es el espacio afín $A^n = V(0)$.

Si C es un conjunto algebraico, llamaremos $C(k)$ al conjunto de todos los puntos racionales de C, es decir, que $C(k) = C \cap A^n(k)$.

De este modo, aunque podamos estar interesados únicamente en los puntos de $C(k)$, hemos definido C de modo que incluya los "puntos imaginarios" (es decir, con coordenadas en K) que satisfacen las ecuaciones que lo definen, ya que los puntos de $C(k)$ podrían ser insuficientes (un conjunto algebraico puede incluso no tener puntos racionales en absoluto) para que se satisfagan los resultados generales sobre conjuntos algebraicos que vamos a obtener.

El resumen del planteamiento que acabamos de exponer es que siempre sobreentenderemos que los sistemas de referencia considerados en A^n están definidos sobre k y que los polinomios que definen conjuntos algebraicos tienen coeficientes en k, pero no sobreentenderemos que los puntos que consideramos en los conjuntos algebraicos tengan necesariamente sus coordenadas en k (pues, si lo hiciéramos, correríamos el riesgo de quedarnos sin puntos de los que hablar).

Por ejemplo, si tomamos $k = \mathbb{R}$ y consideramos la parábola $C = V(Y - X^2)$, las definiciones que hemos dado hacen que $(i, -1) \in C$, mientras que la parábola que "podemos dibujar" es $C(\mathbb{R})$, que obviamente no contiene al punto $(i, -1)$.

En la práctica es costumbre referirse a un conjunto algebraico mediante las ecuaciones que lo definen, de modo que, por ejemplo, en lugar de escribir

$$V = V(X^2 + Y^2 - 1, X + Y + Z - 3)$$

podemos decir que V es el conjunto algebraico determinado por las ecuaciones

$$X^2 + Y^2 = 1, \qquad X + Y + Z = 3.$$

Ejemplo: Variedades lineales En la geometría afín se definen las *variedades afines* como los subconjuntos de A^n que heredan la estructura afín, que son los de la forma $V = P + W$, donde $P \in A^n$ y W es un subespacio vectorial de K^n. Se comprueba fácilmente que W está completamente determinado por V, por lo que podemos definir la dimensión de V como la dimensión del espacio vectorial W.

Las variedades afines de dimensión 0, 1, 2 se llaman puntos, rectas y planos, respectivamente. Habitualmente se adopta el convenio de considerar a $\varnothing$ como variedad afín de dimensión -1.

Vamos a comprobar que las variedades afines en este sentido son conjuntos algebraicos afines. Más precisamente, diremos que una variedad afín V está definida sobre k si es de la forma $V = P + W$, donde $P \in A^n(k)$ y W tiene una base en k^n. Con esta precisión, las variedades afines definidas sobre k coinciden con los conjuntos algebraicos afines definidos por sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en k.

En efecto, en todo momento estamos considerando un sistema de referencia afín $(O; P_1, \ldots, P_n)$. Si W tiene una base en k^n, las coordenadas $v_1, \ldots, v_d$ de los vectores de dicha base en la base $\overrightarrow{OP_1}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$ de k^n estarán también en k^n. Si $a \in k^n$ son las coordenadas de P, tenemos que un punto estará en V si y sólo si sus coordenadas x satisfacen que $x - a$ es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_d$, lo cual equivale a que la matriz de filas $x - a, v_1, \ldots, v_d$ tenga rango d, y esto a su vez equivale a que todos los menores de orden $d+1$ de dicha matriz sean nulos. Claramente, esto equivale a que x satisfaga un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en k.

Recíprocamente, supongamos que $V \subset A^n$ es un conjunto algebraico no vacío definido por un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en k, que podemos representar matricialmente como $AX^t = b^t$, donde $X = (X_1, \ldots, X_n)$, A es una matriz $m \times n$ con coeficientes en k y $b \in k^m$.

En principio suponemos meramente que el sistema tiene una solución $a \in K^n$ (no necesariamente en k^n). Esto implica que b es combinación lineal de las n columnas de la matriz A, luego la matriz ampliada (A, b^t) tiene a lo sumo rango n, luego a lo sumo tiene n filas linealmente independientes, luego eliminando ecuaciones dependientes podemos suponer que $m \leq n$ y que el rango de A es m. Permutando las columnas de A (lo que equivale a realizar un cambio de sistema de referencia en A^n) podemos suponer que las m últimas columnas forman una matriz regular B, con lo que cambiando el sistema de ecuaciones por el sistema equivalente $B^{-1}AX^t = B^{-1}b^t$, podemos suponer que las m últimas columnas de A forman la matriz identidad, con lo que el sistema de ecuaciones es de la forma

$$X_i = F_i(X_1, \ldots, X_d), \qquad i = d+1, \ldots, n$$

donde $d = n - m$, para ciertos polinomios F_i de grado 1 con coeficientes en k. Vemos entonces que $a = (0, \ldots, 0, F_{d+1}(0, \ldots, 0), \ldots, F_n(0, \ldots, 0)))$ es una solución del sistema en k^n, y que el sistema equivale a $A(X - a)^t = 0$.

Los conjuntos $W_0 = \{x \in k^n \mid Ax^t = 0\} \subset \{x \in K^n \mid Ax^t = 0\} = W$ son subespacios vectoriales de k^n y K^n, respectivamente, de dimensión d, luego W es el subespacio de K^n generado por W_0. Equivalentemente, W tiene una base en k^n. Además (las coordenadas de) los elementos de V son las de $a + W$, luego si $P \in A^n(k)$ es el punto que tiene coordenadas a, el conjunto definido por el sistema de ecuaciones lineales de partida es $P + W^*$ (donde W^* es el subespacio de K^n formado por los vectores de coordenadas en W) y es, en efecto, una variedad afín (de dimensión d).

Más adelante daremos una definición más general de variedad afín, por lo que en el contexto de la geometría algebraica es más conveniente referirse a las variedades afines en el sentido de la geometría afín como *variedades lineales afines.* ∎

Uniones e intersecciones de conjuntos algebraicos Podemos formar nuevos conjuntos algebraicos mediante uniones finitas e intersecciones:

Teorema 1.3 *La intersección de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico. La unión de un número finito de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.*

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato comprobar que

$$\bigcap_{i\in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i\in I} S_i).$$

Por otra parte, si F y G son polinomios, es claro que $V(FG) = V(F)\cup V(G)$. Como todo conjunto algebraico es intersección de un número finito de conjuntos $V(F_i)$ y

$$\bigcap_i V(F_i) \cup \bigcap_j V(G_j) = \bigcap_{i,j} V(F_i G_j),$$

concluimos que la unión de dos conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico, y esto implica a su vez que lo mismo vale para cualquier unión finita. ∎

Producto de conjuntos algebraicos Observemos que $A^n \times A^m = A^{n+m}$. Vamos a probar que si $C_1 \subset A^n$ y $C_2 \subset A^m$ son conjuntos algebraicos, entonces $C_1 \times C_2 \subset A^{n+m}$ también es un conjunto algebraico.

Observemos en primer lugar que, a partir de sistemas de referencia afines en A^n y en A^m, podemos definir un sistema de referencia afín en A^{n+m} tal que si $P \in A^n$ y $Q \in A^m$ tienen coordenadas x e y, respectivamente, entonces (P, Q) tiene coordenadas (x, y). Por comodidad, en lugar de escribir $k[X_1, \ldots, X_{n+m}]$, llamaremos a las inteterminadas $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$. Así, si $C_1 = V(S_1)$ y $C_2 = V(S_2)$, podemos considerar que $S_1 \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, $S_2 \subset k[Y_1, \ldots, Y_m]$, con lo que claramente $C_1 \times C_2 = V(S_1 \cup S_2)$.

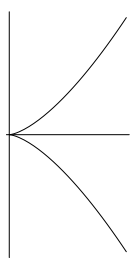
Más en general, es fácil ver que cualquier producto $C_1 \times \cdots \times C_r$ de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico en el espacio afín correspondiente. ∎

Ejemplo: Hipersuperficies Los subconjuntos algebraicos de A^n definidos por una única ecuación se llaman *hipersuperficies.* Cuando la ecuación es lineal (no nula) tenemos los *hiperplanos,* que no son sino las variedades lineales de dimensión $n - 1$.

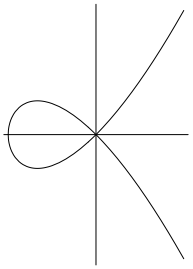
Las hipersuperficies de A^2 se llaman *curvas afines planas,* que a su vez se clasifican en *rectas, cónicas, cúbicas, cuárticas,* etc. según el grado del polinomio que las define.[1] ∎

[1] Las definiciones de "hipersuperficie" y "curva" son provisionales. En la nota de la página 18 añadiremos una restricción natural a la definición de hipersuperficie (y, por consiguiente, a la de curva). La idea es que el conjunto algebraico determinado por $(X - Y)(X^2 + Y^2 - 1) = 0$ no sea una curva, sino la unión de dos curvas: una recta y una circunferencia.

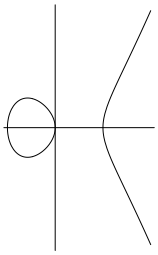
Algunos ejemplos de curvas Las rectas y las superficies cónicas son ejemplos especialmente simples de conjuntos algebraicos. En el caso $k = \mathbb{R}$ resultan ser curvas diferenciables en el sentido de la geometría diferencial, pero si consideramos curvas de grado mayor encontramos algunos fenómenos notables:



$Y^2 = X^3$



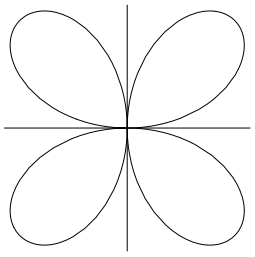
$Y^2 = X^2(X+1)$



$Y^2 = X(X^2-1)$

Estas figuras muestran que hay curvas algebraicas de grado 3 que, si bien parece razonable que les hayamos asignado el nombre de "curvas", lo cierto es que no lo son exactamente en el sentido de la geometría diferencial. La primera tiene un "pico" en el que no es diferenciable, la segunda se corta a sí misma, con lo que ni siquiera es una curva propiamente dicha en el sentido topológico, si bien no deja de corresponderse con una cierta idea intuitiva de "curva" que no tiene por qué excluir que una curva se corte a sí misma. El tercer ejemplo muestra que una curva algebraica en $\mathbb{R}$ no tiene por qué ser conexa.

A medida que aumentamos el grado podemos obtener curvas más sofisticadas. Veamos un último ejemplo en grado 6:



$(X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2 = 0$

1.2 El ideal de un conjunto algebraico

Empezamos ahora a estudiar los conjuntos algebraicos, y el primer problema con que nos encontramos es con que distintos conjuntos de ecuaciones S pueden definir un mismo conjunto algebraico $C = V(S)$ respecto de un mismo sistema de referencia, por lo que si tratamos de definir propiedades de C en términos de S, nos vemos obligados a comprobar que la definición no depende de la elección de S y eso puede ser muy complicado. Para evitar este problema, observamos que todo conjunto algebraico tiene asociado un máximoconjunto de ecuaciones (técnicamente, de polinomios) que lo definen:

Definición 1.4 Si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico (definido sobre k), fijado un sistema de referencia afín, definimos

$$I_k(C) = \{F \in k[X_1, \dots, X_n] \mid F(P) = 0 \text{ para todo } P \in C\}.$$

Normalmente, escribiremos $I(C)$, sin especificar k. En esta definición hemos de entender que $I(\varnothing) = k[X_1, \dots, X_n]$.

Es inmediato que $I(C)$ es un ideal de $k[X_1, \dots, X_n]$, así como que se cumple la relación $C = V(I(C))$. Más aún, si $C = V(S)$, entonces $S \subset I(C)$, por lo que $I(C)$ es ciertamente el mayor conjunto de ecuaciones (de polinomios) que define a C, y está unívocamente determinado por C (y por un sistema de referencia prefijado) sin que medie ninguna elección arbitraria de ecuaciones.

Sin embargo, dado un conjunto algebraico $C = V(S)$, ahora se nos plantea el problema de determinar quién es $I(C)$. ¿Cuáles son los polinomios que se anulan en los puntos donde se anulan los polinomios de S? Puesto que $S \subset I(C)$, también tenemos que $(S) \subset I(C)$, y es natural preguntarse si se da la igualdad. El teorema [Al 3.4] describe los elementos del ideal (S) como los polinomios que pueden obtenerse a partir de los de S mediante combinaciones lineales con coeficientes en $k[X_1, \dots, X_n]$. Obviamente todos ellos se anulan en $C = V(S)$, pero ¿puede haber más polinomios en $I(C)$?

La respuesta es afirmativa. Basta considerar, por ejemplo, $C = V(S) \subset A^1$ con $S = \{X^2\}$. Entonces $C = \{0\}$ y es fácil ver que $(S) = (X^2) \subsetneq (X) = I(C)$.

Vemos que, para formar $I(C)$, no podemos considerar únicamente las combinaciones lineales de los polinomios de S, sino que puede hacer falta tomar "raíces", para pasar de un polinomio como X^2 hasta X. Vamos a dar una definición que precise esta idea:

Definición 1.5 Llamaremos *radical* de un ideal I de un anillo conmutativo y unitario A al ideal

$$\operatorname{Rad} I = \{a \in A \mid a^n \in I \text{ para un natural } n > 0\}.$$

Es fácil ver que, efectivamente, se trata de un ideal de A, pues si $a^m \in I$ y $b^n \in I$ entonces $(a+b)^{m+n} \in I$. Además $I \subset \operatorname{Rad} I$ y si $I \neq A$ entonces $\operatorname{Rad} I \neq A$.

Un ideal I es *radical* si $I = \operatorname{Rad} I$ o, equivalentemente, si cuando $a^n \in I$ entonces $a \in I$. Es claro que $\operatorname{Rad} I$ cumple esta propiedad, luego $\operatorname{Rad} I$ es el menor ideal radical que contiene a I. Todo ideal primo es radical.

Es evidente que todo ideal $I(C)$ es radical, por lo que la igualdad $I = I(V(I))$ no puede darse a menos que el ideal I sea radical.

Enseguida veremos que esta condición es suficiente, pero conviene probar aparte un hecho técnico que usaremos a menudo:

Teorema 1.6 *Consideremos cuerpos $k \subset k'$ y un ideal $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$. Llamemos $I' \subset k'[X_1, \ldots, X_n]$ al ideal que genera en $k'[X_1, \ldots, X_n]$ y sea $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ una k-base de k'. Entonces todo $F \in k'[X_1, \ldots, X_n]$ se expresa en forma única como $F = \sum_{j\in J_0} \alpha_j F_j$, con $J_0 \subset J$ finito y $F_j \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Además $F \in I'$ si y sólo si cada $F_j \in I$ y también $I' \cap k[X_1, \ldots, X_n] = I$.*

DEMOSTRACIÓN: El coeficiente α en F de cada monomio M se expresa de forma única como combinación lineal $\alpha = \sum_{j\in J_0} a_{M,j}\,\alpha_j$, con $J_0 \subset J$ finito y $a_{M,j} \in k$. Añadiendo coeficientes nulos podemos tomar el mismo J_0 para todos los monomios que aparecen en F. Es claro entonces que los polinomios $F_j = \sum_M a_{M,j} M$ cumplen

$$F = \sum_{j\in J_0} \alpha_j F_j, \tag{1.3}$$

así como que la expresión es única.

Para la segunda parte basta ver que el conjunto $I \subset I^* \subset I'$ formado por todos los polinomios F de la forma (1.3) con los $F_j \in I$ es un ideal de $k'[X_1, \ldots, X_n]$, pues entonces tiene que darse la igualdad.

Ciertamente I^* es cerrado para sumas y, si $G \in K[X_1, \ldots, X_n]$ y $F \in I^*$, para probar que $GF \in I'$, podemos descomponer F y G en la forma (1.3) y así suponer sin pérdida de generalidad que $G = \alpha_k G_0$ y $F = \alpha_j F_0$, con $G_0 \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $F_0 \in I$. Desarrollamos $\alpha_k\alpha_j = \sum_{j'} c_{j'}\alpha_{j'}$, con $c_{j'} \in k$, y entonces

$$\alpha_k G_0\, \alpha_j F_0 = \sum_{j'} \alpha_{j'} c_{j'} G_0 F_0 \in I^*,$$

ya que $c_{j'} G_0 F_0 \in I$.

Para la última parte tomamos concretamente una base tal que $\alpha_{j_0} = 1$, para cierto $j_0 \in J$. Así, si $F \in I' \cap k[X_1, \ldots, X_n]$, sea M cualquier monomio con coeficiente 1, sea $\beta_j \in k$ su coeficiente en F_j y sea $\beta \in k$ su coeficiente en F. Entonces

$$\beta \cdot \alpha_{j_0} = \sum_{j\in J_0} \alpha_j \beta_j.$$

Por la independencia lineal de los α_j es necesario que $j_0 \in J_0$, que $\beta_{j_0} = \beta$ y que $\beta_j = 0$, para $j \neq j_0$. Esto implica que $F_j = 0$ si $j \neq j_0$ (pues todos sus monomios tienen coeficientes nulos). Por consiguiente $F = F_{j_0} \in I$. ∎

Teorema 1.7 *Sea k un cuerpo y sea I un ideal de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Entonces*[2] *se cumple que $I(V(I)) = \operatorname{Rad} I$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que $k = K$ es algebraicamente cerrado. Obviamente se cumple que $I \subset I(V(I))$ y, como el ideal

[2]Aquí es fundamental que hemos definido $V(I)$ como subconjunto de $A^n(K)$ y no como subconjunto de $A^n(k)$. De no haberlo hecho así, habría que añadir como hipótesis que k fuera algebraicamente cerrado. Este teorema se conoce a veces como "Teorema de los ceros de Hilbert", aunque nosotros reservaremos ese nombre para [Al 13.49].

de la derecha es radical, de hecho $\operatorname{Rad} I \subset I(V(I))$. Como $k[X_1,\dots,X_n]$ es noetheriano [Al 3.8], tenemos que el ideal I es finitamente generado, digamos $I = (F_1,\dots,F_m)$. Tomemos $G \in I(V(I))$, de modo que G se anula en todos los puntos donde se anulan los polinomios F_i. Añadamos una indeterminada T y consideremos los polinomios

$$F_1,\dots,F_m, TG-1 \in k[X_1,\dots,X_n,T].$$

Por hipótesis no tienen soluciones en común, luego por el teorema de los ceros de Hilbert [Al 13.49] existen polinomios $H_1,\dots,H_m,H \in k[X_1,\dots,X_n,T]$ tales que

$$H_1F_1 + \cdots + H_mF_m + H(TG-1) = 1.$$

Ahora sustituimos $T = 1/Y$ y, multiplicando por una potencia adecuada de Y, obtenemos una ecuación de la forma

$$H'_1F_1 + \cdots + H'_mF_m + H'(G-Y) = Y^N,$$

para ciertos polinomios $H'_1,\dots,H'_m,H' \in k[X_1,\dots,X_n,Y]$. Finalmente sustituimos $Y = G$ y queda que $G^N \in (F_1,\dots,F_m)$, luego $G \in \operatorname{Rad}(I)$.

Si k es arbitrario, sea $C = V(I)$ y llamemos I' al ideal generado por I en $K[X_1,\dots,X_n]$. Entonces $C = V(I')$. Por el teorema anterior tenemos que $I = I' \cap k[X_1,\dots,X_n]$ y, por la parte ya probada:

$$I(V(I)) = I(V(I')) \subset I_K(V(I')) = \operatorname{Rad} I'.$$

Entonces, si $F \in I(V(I))$, existe un $n \geq 1$ tal que $F^n \in I' \cap k[X_1,\dots,X_n] = I$, luego $F \in \operatorname{Rad} I$. Esto prueba la inclusión $I(V(I)) \subset \operatorname{Rad} I$, y la otra es obvia. ∎

En particular, si el ideal I es radical tenemos que $I(V(I)) = I$, luego la aplicación $I \mapsto V(I)$ biyecta los ideales radicales con los conjuntos algebraicos. Su inversa es $C \mapsto I(C)$. Claramente ambas correspondencias invierten las inclusiones.

Nota Terminamos esta sección con una observación elemental que, en su día, fue un notable descubrimiento de Hilbert. Si $S \subset k[X_1,\dots,X_n]$ es un conjunto arbitrario de polinomios, se cumple que $C = V(S) = V(I)$, donde $I = (S)$, pero I es un ideal en el anillo noetheriano $k[X_1,\dots,X_n]$, luego es finitamente generado, es decir, existe un conjunto finito $S_0 \subset I$ tal que $I = (S_0)$ y por lo tanto $C = V(S) = V(I) = V(S_0)$.

Esto significa que todo conjunto algebraico C está determinado por un número finito de ecuaciones. Aunque en teoría, al tratar con los ideales $I(C)$, estamos considerando simultáneamente infinitas ecuaciones, vemos que en la práctica, cualquier sistema de ecuaciones infinito puede reducirse a un sistema finito equivalente, en el sentido de que sus soluciones son las mismas. ∎

1.3 Funciones polinómicas

Introducimos ahora las aplicaciones que relacionan los conjuntos algebraicos afines. Éstas son, naturalmente, las aplicaciones definidas a través de polinomios.

Definición 1.8 Sean $C \subset A^m$ y $D \subset A^n$ dos conjuntos algebraicos afines. Una aplicación $\phi : C \longrightarrow D$ es *polinómica* (definida sobre k) si, fijados sistemas de referencia afines, existen polinomios $F_1, \ldots, F_n \in k[X_1, \ldots, X_m]$ tales que para todo $P \in C$ se cumple que $\phi(P) = (F_1(P), \ldots, F_n(P))$. (Entiéndase: las coordenadas de $\phi(P)$ son las imágenes por los F_i de las coordenadas de P.) Un *isomorfismo* entre conjuntos algebraicos afines es una aplicación polinómica biyectiva cuya inversa sea también polinómica.[3]

Es fácil ver que el carácter polinómico de una aplicación no depende de los sistemas de referencia considerados. También es fácil comprobar que la composición de aplicaciones polinómicas es una aplicación polinómica.[4]

Ejemplo 1 Si $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, es claro que la gráfica de F, es decir, el conjunto

$$\mathrm{Gr}(F) = V(X_{n+1} - F(X_1, \ldots, X_n)) \subset A^{n+1}$$

es un conjunto algebraico afín. Claramente es isomorfo a A^n, pues un isomorfismo $\phi : A^n \longrightarrow \mathrm{Gr}(F)$ es el dado por

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, F(x_1, \ldots, x_n)).$$

La aplicación inversa es $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$. ∎

En particular, la parábola $Y = X^2$ es isomorfa a la recta afín A^1.

Ejemplo 2 Si $V \subset A^n$ es una variedad lineal afín de dimensión $d \geq 0$ (definida sobre k), entonces es isomorfa a A^d.

En el ejemplo de la página 4 hemos visto que las coordenadas de los puntos de una variedad lineal afín $V \subset A^n$ de dimensión $d \geq 0$ y definida sobre k (respecto de un sistema de referencia adecuado) son de la forma

$$\phi(t_1, \ldots, t_d) = (t_1, \ldots, t_d, F_{d+1}(t_1, \ldots, t_d), \ldots, F_n(t_1, \ldots, t_d)),$$

donde los F_i son polinomios de grado 1 con coeficientes en k. Esta expresión define una función polinómica $\phi : A^d \longrightarrow V$ cuya inversa es la dada por $\psi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_d)$. ∎

Ejemplo 3 Si $C_1 \subset A^n$ y $C_2 \subset A^m$ son conjuntos algebraicos afines, las proyecciones $p_i : C_1 \times C_2 \longrightarrow C_i$ son claramente aplicaciones polinómicas.

[3] En el ejercicio de la página 112 se muestra un ejemplo de aplicación polinómica biyectiva con inversa no polinómica.

[4] Más precisamente, es claro que el conjunto de todos los conjuntos algebraicos respecto de una misma extensión K/k forma una categoría tomando como morfismos las aplicaciones polinómicas.

El álgebra asociada a un conjunto algebraico afín Si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico afín (definido sobre k), llamaremos $k[C]$ al conjunto de las funciones polinómicas $C \longrightarrow K$ (definidas sobre k). Notemos que tiene sentido hablar de aplicaciones polinómicas de C en K porque $K = A^1$ es un conjunto algebraico afín, pero escribimos K porque vamos a tener en cuenta su estructura de cuerpo, ya que ella nos permite dotar a $k[C]$ de estructura de anillo (conmutativo y unitario) con las operaciones definidas puntualmente. Más aún, $k[C]$ contiene un subcuerpo isomorfo a k (el determinado por las funciones constantes), por lo que, de hecho, $k[C]$ es una k-álgebra (conmutativa y unitaria).

Notemos que la definición de $k[C]$ no depende de la elección de un sistema de referencia en A^n, pero, si fijamos uno, podemos obtener una representación en coordenadas de cada función de $k[C]$. Concretamente, cada $F \in k[X_1, \ldots, X_m]$ define una función polinómica $f \in k[C]$ dada por $f(P) = F(P)$ (entendiendo que el segundo miembro es F actuando sobre las coordenadas de P). La aplicación $F \mapsto f$ es un epimorfismo de anillos y su núcleo es $I(C)$. Por consiguiente tenemos la representación

$$k[C] \cong k[X_1, \ldots, X_n]/I(C). \tag{1.4}$$

En la práctica consideraremos a (1.4) como una igualdad, si bien hemos de recordar que sólo tiene sentido cuando hemos fijado un sistema de referencia en A^n. Representaremos por x_i a la clase de X_i en $k[X_1, \ldots, X_n]/I(C)$. Observemos que las funciones x_i son las que asignan a cada punto $P \in C$ sus coordenadas en el sistema de referencia fijado.

Se cumple que $k[C] = k[x_1, \ldots, x_n]$. Más concretamente, cada $f \in k[C]$ tiene una representación coordenada (que salvo casos triviales no es única) de la forma $f = F(x_1, \ldots, x_n)$, donde $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ es cualquier polinomio que cumpla $f = [F]$. Si $P \in C$ tiene coordenadas $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$, entonces $f(P) = F(a_1, \ldots, a_n)$.

Ejemplo Sea $V = V(X - Y^2)$. Entonces $k[V] = k[x, y]$, y es fácil ver que x e y son trascendentes sobre k, pero no son algebraicamente independientes, sino que $x = y^2$. Por lo tanto $k[V] = k[y]$ es isomorfo al anillo de polinomios $k[Y]$. Alternativamente, podemos llamar $y = \sqrt{x}$ y entonces $k[V] = k[x][\sqrt{x}]$.

Cada punto $x \in K$ se corresponde con dos puntos $(x, \sqrt{x})$ y $(x, -\sqrt{x})$ en V (salvo el 0, para el que los dos puntos son el mismo), de modo que la función $\sqrt{x}$, que en K ha de verse como una "función multiforme" —que asocia dos imágenes a cada punto— es en V una función uniforme que asocia a cada uno de los dos puntos correspondientes a x en V una de las raíces cuadradas de x en K. ∎

Definición 1.9 Si $\phi : C \longrightarrow D$ es una aplicación polinómica entre conjuntos algebraicos afines, definimos $\bar{\phi} : k[D] \longrightarrow k[C]$ mediante $\bar{\phi}(f) = \phi \circ f$. Claramente se trata de un homomorfismo de anillos. Notemos que $\bar{\phi}$ transforma cada función constante de $k[D]$ en la constante correspondiente de $k[C]$. Expresaremos esto diciendo que $\bar{\phi}$ es un k-*homomorfismo* (de k-álgebras).

Es inmediato comprobar que[5] $\overline{\phi \circ \psi} = \bar{\psi} \circ \bar{\phi}$.

Teorema 1.10 *Sean $C \subset A^m$ y $D \subset A^n$ dos conjuntos algebraicos afines. Entonces la correspondencia $\phi \mapsto \overline{\phi}$ es una biyección entre las aplicaciones polinómicas $\phi : C \longrightarrow D$ y los k-homomorfismos de álgebras $\overline{\phi} : k[D] \longrightarrow k[D]$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\bar{\phi} = \bar{\psi}$ y $P \in C$, entonces

$$x_i(\phi(P)) = \bar{\phi}(x_i)(P) = \bar{\psi}(x_i)(P) = x_i(\psi(P)),$$

luego $\phi(P)$ y $\psi(P)$ tienen las mismas coordenadas, luego $\phi(P) = \psi(P)$ y, como P es arbitrario, $\phi = \psi$. Esto prueba que la correspondencia es inyectiva.

Sea ahora un k-homomorfismo $\alpha : k[D] \longrightarrow k[C]$ y sea $\alpha(x_i) = [F_i]$. Los polinomios $F_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$ determinan una función polinómica

$$\phi : A^m \longrightarrow A^n,$$

así como un homomorfismo de anillos $\phi^* : k[X_1, \ldots X_n] \longrightarrow k[X_1, \ldots, X_m]$ definido mediante $G \mapsto G(F_1, \ldots, F_n)$. Se cumple que $\phi^*[I(D)] \subset I(C)$, pues si tomamos $G \in I(W)$, la clase de $\phi^*(G)$ módulo $I(C)$ es

$$G([F_1], \ldots, [F_n]) = G(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)) = \alpha([G]) = \alpha(0) = 0.$$

Por lo tanto $\phi[C] \subset D$, pues si tomamos $P \in C$ y $G \in I(D)$, entonces $G(\phi(P)) = \phi^*(G)(P) = 0$, luego $\phi(P) \in V(I(D)) = D$. Así pues, ϕ se restringe a una función polinómica de C en D, y es fácil ver que cumple $\overline{\phi} = \alpha$. ∎

Es claro que, bajo la biyección de este teorema, los isomorfismos entre variedades se corresponden con k-isomorfismos de anillos. Así pues, dos variedades son isomorfas si y sólo si sus álgebras de funciones polinómicas son k-isomorfas.

Mientras el ideal $I(C)$ determina el conjunto algebraico C de forma "extrínseca", es decir, indicando cómo está sumergido en A^n, vamos a ver que la k-álgebra $k[C]$ lo determina de forma "intrínseca", salvo isomorfismo. Esto se traduce en que todas las propiedades "algebraicas" de un conjunto algebraico C (las que se conservan por isomorfismos) tienen que tener un reflejo en $k[C]$.

Definición 1.11 Si $D \subset C$ son conjuntos algebraicos afines, definimos $I_C(D)$ como el conjunto de todas las funciones $f \in k[C]$ que se anulan en D. Claramente es un ideal radical de $k[C]$ y, si fijamos un sistema de referencia en A^n, tenemos que $I(C) \subset I(D)$ y es inmediato que, a través de la identificación entre $k[C]$ y $k[X_1, \ldots, X_n]/I(C)$, se cumple que $I_C(D) = I(D)/I(C)$.

Por otra parte, todo ideal radical de $k[C]$ es de la forma $I/I(C)$, donde I es un ideal radical de $k[X_1, \ldots, X_n]$, que será de la forma $I = I(D)$ para cierto conjunto algebraico afín $D \subset C$ (ya que $I(C) \subset I(D)$).

[5]Más precisamente, es fácil ver que la aplicación $C \mapsto k[C]$ es un funtor contravariante de la categoría de los conjuntos algebraicos afines respecto a K/k en la categoría de las k-álgebras, considerando en ésta como morfismos los k-homomorfismos de álgebras.

Concluimos que la correspondencia $D \mapsto I_C(D)$ es una biyección entre los subconjuntos algebraicos de C y los ideales radicales de $k[C]$. Claramente invierte las inclusiones.

Estudiar sistemáticamente las relaciones entre C y $k[C]$ requiere estudiar en profundidad la estructura de las k-álgebras conmutativas y unitarias, lo que conduce hacia el álgebra conmutativa, y no vamos a seguir ese camino. No obstante, podemos señalar algunos hechos sencillos:

Si $P \in C(k)$ tiene coordenadas $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$, se cumple que

$$I(P) = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n),$$

pues claramente el ideal de la derecha está contenido en $I(C)$ y es maximal, ya que el cociente que determina es isomorfo a k, luego también

$$I_C(P) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

y tenemos un isomorfismo $k[C]/I_C(P) \cong k$ respecto al que $f = F(x_1, \ldots, x_n)$ se corresponde con $F[a_1, \ldots, a_n] = f(P)$. En otras palabras, $f(P)$ está determinado como el único elemento de k que cumple $f(P) \equiv f \pmod{I_C(P)}$.

En el caso en que $k = K$, tenemos que $C(k) = C$ y así vemos que los puntos de C se corresponden biunívocamente con los ideales maximales de $k[C]$ (pues un ideal maximal es primo, luego radical, y no tiene ningún ideal por encima más que $k[C]$, luego su conjunto algebraico asociado no tiene más conjunto algebraico por debajo que $\varnothing$, lo cual obliga a que sea un punto), y además la pura estructura algebraica de $k[C]$ permite identificar a cada $f \in k[C]$ con una función definida sobre los ideales maximales de $k[C]$.

1.4 La topología de Zariski

El teorema 1.3, unido al hecho de que $\varnothing$ y A^n son subconjuntos algebraicos de A^n, implica que los subconjuntos algebraicos de A^n (definidos sobre k) son los cerrados de una topología en A^n.

Definición 1.12 La *topología de Zariski* en A^n (relativa a k) es la topología que tiene por abiertos a los complementarios de los conjuntos algebraicos (definidos sobre k). Si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico (definido sobre k), la *topología de Zariski* en C es la relativización a C de la topología de Zariski de A^n, cuyos cerrados son los subconjuntos algebraicos de C.

En lo sucesivo consideraremos a los conjuntos algebraicos (definidos sobre k) como espacios topológicos con la topología de Zariski (relativa a k).

Enseguida veremos que la topología de Zariski no es de Hausdorff. En general, cuando hablemos de espacios topológicos, nunca supondremos que son de Hausdorff.

Un espacio topológico X es *irreducible* si cuando $X = C_1 \cup C_2$ con C_1 y C_2 cerrados, necesariamente $C = C_1$ o $C = C_2$.

Un conjunto algebraico afín (sobre k) es una *variedad algebraica afín* (sobre k) si es irreducible respecto a la topología de Zariski relativa a k.

Por ejemplo, el conjunto algebraico $V(XY) \subset A^2$ no es una variedad, pues $V(XY) = V(X) \cup V(Y)$ es unión de dos rectas.

Comprobar que un conjunto algebraico es irreducible suele ser una tarea delicada. El resultado fundamental es el siguiente:

Teorema 1.13 *Un conjunto algebraico C no vacío es irreducible si y sólo si el ideal $I(C)$ es primo.*

DEMOSTRACIÓN: Si C es irreducible y $F_1,\ F_2 \in k[X_1, \ldots, X_n]$ cumplen $F_1F_2 \in I(C)$, entonces podemos tomar $H_1 = V(F_1)$, $H_2 = V(F_2)$, con lo que tenemos dos cerrados tales que $C = (C \cap H_1) \cup (C \cap H_2)$. Por consiguiente $C = C \cap H_i$ para un i, de donde se sigue que $F_i \in I(C)$.

Recíprocamente, si $I(C)$ es primo y se cumple que $C = C_1 \cup C_2$, entonces $I(C) = I(C_1) \cap I(C_2) \supset I(C_1)I(C_2)$, luego $I(C) \supset I(C_i)$ para algún i, luego $C \subset C_i$, es decir, $C = C_i$. ∎

Equivalentemente, un conjunto algebraico $C \subset A^n$ no vacío es irreducible si y sólo si el álgebra $k[C]$ es un dominio íntegro. (Notemos que, para el conjunto vacío, se cumple $I(\varnothing) = k[X_1, \ldots, X_n]$ y que $k[\varnothing] = 0$.)

Ejemplo 1 Los conjuntos definidos por una ecuación $Y = G(X_1, \ldots, X_n)$ (es decir, las gráficas de los polinomios) son variedades algebraicas afines.

En el ejemplo 1 de la página 11 hemos visto que las gráficas de polinomios son isomorfas a A^n, luego sus álgebras de funciones polinómicas son isomorfas a $k[A^n] = k[X_1, \ldots, X_n]$, luego son dominios íntegros. ∎

Ejemplo 2 Las variedades lineales afines son variedades algebraicas afines.

En efecto, esto es trivialmente cierto para $\varnothing$ y, si $V \subset A^n$ es una variedad lineal afín de dimensión $d \geq 0$, en el ejemplo 2 tras la definición 1.8 hemos probado que es isomorfa a A^d, luego $k[V]$ es isomorfo a $k[A^d] = k[X_1, \ldots, X_d]$, que es un dominio íntegro. ∎

En particular, los puntos de $A^n(k)$ (las variedades lineales afines de dimensión 0 definidas sobre k) son variedades algebraicas afines.

Teorema 1.14 *Sea X un espacio topológico. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *X es irreducible.*
2. *Si U_1 y U_2 son abiertos no vacíos, entonces $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.*
3. *Todo abierto no vacío es denso en X.*

DEMOSTRACIÓN: La equivalencia entre 1) y 2) se obtiene tomando complementos, y la equivalencia entre 2) y 3) es trivial. ∎

Como consecuencia:

Teorema 1.15 *Un subconjunto Y de un espacio topológico X es irreducible si y sólo si lo es su clausura $\overline{Y}$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\overline{Y}$ es irreducible, dos abiertos no vacíos de Y son de la forma $U_1 \cap Y$, $U_2 \cap Y$, con los U_i abiertos no vacíos en $\overline{Y}$. La intersección es $U_1 \cap U_2 \cap Y$, que es no vacío, puesto que $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ y Y es denso en $\overline{Y}$. El recíproco se prueba similarmente. ∎

Definición 1.16 Una *componente irreducible* de un espacio topológico X es un subconjunto irreducible maximal respecto a la inclusión.

Por el teorema precedente, las componentes irreducibles son cerradas.

Teorema 1.17 *Todo subconjunto irreducible de un espacio topológico está contenido en una componente irreducible. Todo espacio topológico es la unión de sus componentes irreducibles.*

DEMOSTRACIÓN: Puesto que los puntos son trivialmente irreducibles, la segunda afirmación se deduce inmediatamente de la primera. Si X es un espacio topológico y X' es un subconjunto irreducible, consideramos la familia de todos los subconjuntos irreducibles de X que contienen a X'. Basta probar que podemos aplicar el lema de Zorn, para lo cual basta a su vez demostrar que la unión de una cadena de conjuntos irreducibles es también irreducible.

En efecto, dos abiertos no vacíos de la unión M son las intersecciones con M de dos abiertos no vacíos de X, digamos U_1 y U_2. Existe un miembro de la familia, digamos M' tal que $M' \cap U_i \neq \varnothing$ para los dos índices i, con lo que $M' \cap U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ y también $M \cap U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. ∎

Definición 1.18 Un espacio topológico es *noetheriano* si para toda cadena decreciente de cerrados $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$ existe un índice i tal que $C_i = C_j$ para todo $j \geq i$.

Por ejemplo, si C es un conjunto algebraico definido sobre k, entonces el álgebra $k[C]$ es noetheriana, pues $k[X_1, \ldots, X_n]$ es noetherisno por [Al 3.8] y todo cociente de un anillo noetheriano es noetheriano. Esto se traduce a su vez en que C es un espacio topológico noetheriano, pues toda cadena decreciente de cerrados en C se corresponde con una cadena creciente de ideales en $k[C]$.

Teorema 1.19 *Un espacio topológico noetheriano tiene un número finito de componentes irreducibles, ninguna de las cuales está contenida en la unión de las demás.*

DEMOSTRACIÓN: Sea M el conjunto de los subconjuntos cerrados del espacio que no pueden expresarse como unión finita de componentes irreducibles. Vamos a demostrar que $M = \varnothing$. Si existe un $C_0 \in M$, entonces C_0 no es irreducible, luego $C_0 = C_1 \cup D_1$, donde ninguno de los dos cerrados es igual a C_0. Si ambos cerrados se descompusieran en unión finita de conjuntos irreducibles, lo mismo le sucedería a C_0, luego al menos uno de ellos, digamos C_1 no admite tal descomposición, es decir, $C_1 \in M$. Repitiendo el argumento formamos una cadena estrictamente decreciente $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$, en contradicción con el carácter noetheriano del espacio.

Así pues, todo cerrado, y en particular el propio espacio, es unión de un número finito de componentes irreducibles. Digamos que la descomposición es $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ (donde podemos suponer que las componentes son distintas dos a dos). Si Y es cualquier componente irreducible de X, entonces

$$Y = Y \cap X = (Y \cap X_1) \cup \cdots \cup (Y \cap X_r),$$

de donde se sigue que $Y = Y \cap X_i$ para algún i, es decir, $Y \subset X_i$ y, por maximalidad, $Y = X_i$. Esto prueba que el número de componentes irreducibles es finito. Más aún, ninguna de ellas puede estar contenida en la unión de las restantes, pues el argumento que acabamos de emplear probaría que sería igual a una de las restantes. ∎

El teorema anterior se aplica en particular a todo conjunto algebraico (con la topología de Zariski).

Ejemplo *Sea $V = V(F) \subset A^n$ una hipersuperficie y sea $F = F_1^{r_1} \cdots F_m^{r_m}$ la descomposición de F en factores irreducibles en $k[X_1, \ldots, X_n]$. Entonces*

$$V = V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_m)$$

es la descomposición de V en subconjuntos algebraicos irreducibles (sobre k).

En efecto, cada conjunto $V_i = V(F_i)$ es irreducible, pues el ideal $I_i = (F_i)$ es primo, luego es radical, luego $I(V_i) = \mathrm{Rad}(F_i) = (F_i)$, y podemos aplicar el teorema 1.13.

Además, no puede ocurrir que $V_i \subset V_j$ para $i \neq j$, pues entonces $(F_j) \subset (F_i)$, luego $F_i \mid F_j$ y $F_i = F_j$.

Concluimos que una hipersuperficie es irreducible si y sólo si la ecuación que la define es irreducible o, a lo sumo, potencia de un polinomio irreducible. En cualquier caso, una curva plana irreducible siempre puede definirse mediante una ecuación irreducible. ∎

Así, por ejemplo, las componentes irreducibles del conjunto $C = V(XY)$ son las rectas $C_1 = V(X)$ y $C_2 = V(Y)$. Por ello es razonable considerar que el conjunto no es una curva, sino más bien la unión de dos curvas, por lo que es razonable exigir la irreducibilidad en la definición de "curva":

Nota En lo sucesivo, cuando hablemos de *hipersuperficies* y, en particular, de *curvas planas,* sobrentenderemos que son irreducibles, es decir, que son variedades algebraicas afínes. ∎

Ejemplo *Los conjuntos algebraicos dados por*

$$Y^2 = X^3, \quad Y^2 = X^2(X+1), \quad Y^2 = X(X^2-1) \quad y \quad X^2+Y^2 = 1$$

son curvas planas (irreducibles) definidas sobre cualquier cuerpo. (Véanse las figuras de la página 7).

Según el ejemplo precedente, basta probar que los polinomios correspondientes son irreducibles en $k[X,Y]$. Para los tres últimos podemos aplicar el criterio de irreducibilidad de Eisenstein.

Por ejemplo, el polinomio $Y^2 - X^2(X+1) \in k[X][Y]$ cumple que todos sus coeficientes menos el director son divisibles entre el primo $X+1$ y el término independiente no es divisible entre $(X+1)^2$.

Para $Y^2 - X(X^2-1)$ usamos el primo X y para Y^2+X^2-1 el primo $X+1$.

Supongamos ahora que $Y^2 - X^3 = F_1F_2$. Es fácil ver que si el grado en Y de uno de los factores es 2, el otro ha de ser constante. Supongamos, pues, que

$$F_1 = G_1(X)Y + H_1(X), \qquad F_2 = G_2(X)Y + H_2(X).$$

Multiplicando e igualando coeficientes queda que

$$G_1G_2 = 1, \quad G_1H_2 + H_1G_2 = 0, \quad H_1H_2 = -X^3.$$

De la primera igualdad obtenemos que G_1 y G_2 son constantes, de la segunda que $H_1 = aH_2$, para cierto $a \in k$, y de la tercera que $aH_2^2 = -X^3$, lo cual es imposible. Por lo tanto $Y^2 - X^3$ es irreducible. ∎

1.5 Funciones racionales

Si $V \subset A^n$ es una variedad algebraica afín no vacía, entonces el anillo $k[V]$ es un dominio íntegro, por lo que podemos considerar su cuerpo de cocientes. Vamos a estudiarlo con detalle.

Definición 1.20 Sea $V \subset A^n$ una variedad algebraica afín no vacía. Llamaremos cuerpo de las *funciones racionales* de V al cuerpo de cocientes de $k[V]$. Lo representaremos por $k(V)$. Esta definición no depende de la elección de un sistema de referencia en A^n. Convenimos en que $k(\varnothing) = 0$.

Diremos que una función racional $\alpha \in k(V)$ es *regular* o que *está definida* en un punto $P \in V$ si puede expresarse como $\alpha = f/g$ con $g(P) \neq 0$, y en tal caso definimos $\alpha(P) = f(P)/g(P)$.

Observemos que puede haber representaciones de α para las que el denominador se anule y otras para las que no se anule. No obstante, si α es regular en P, el valor $\alpha(P)$ no depende de la representación con la que se calcula.

En efecto, si $\alpha = f/g = f'/g'$ y $g(P) \neq 0 \neq g'(P)$, entonces $fg' = f'g$, luego $f(P)g'(P) = f'(P)g(P)$, luego $f(P)/g(P) = f'(P)/g'(P)$.

Se dice que α es *singular* en un punto P, o que P es una *singularidad* de α si α no es regular en P.

Ejemplo Si $V = V(X^2 + Y^2 - 1)$, entonces, como elementos de $k(V)$, tenemos la igualdad

$$\frac{1+y}{x} = \frac{x}{1-y},$$

luego esta función racional es regular en $(0, -1)$, a pesar de lo que parece indicar la expresión izquierda. No es difícil ver que $(0, 1)$ es su única singularidad. ∎

Para cada punto $P \in V$ definimos el *anillo local* $\mathcal{O}_P(V)$ como el anillo de las funciones racionales de V regulares en P. Claramente $k[V] \subset \mathcal{O}_P(V) \subset k(V)$.

Teorema 1.21 *Sea V una variedad algebraica afín. El conjunto de las singularidades de una función racional sobre V es algebraico. Además*

$$k[V] = \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V),$$

es decir, $k[V]$ es el conjunto de las funciones racionales sin singularidades.

Demostración: La primera afirmación sería inmediata si no fuera por que no podemos usar siempre la misma representación de una función racional como cociente de polinomios para determinar sus singularidades. En general, fijado un sistema de referencia y una función racional $\alpha \in k(V)$, definimos

$$I_\alpha = \{G \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid [G]\alpha \in k[V]\}.$$

Claramente I_α es un ideal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ que contiene a $I(V)$ y los puntos de $V(I_\alpha)$ son exactamente las singularidades de α.

Para probar la segunda afirmación observamos que si α no tiene singularidades entonces $V(I_\alpha) = \varnothing$, luego, por el teorema de los ceros de Hilbert, $1 \in I_\alpha$, luego $\alpha = [1]\alpha \in k[V]$. ∎

Así pues, a cada elemento de $k(V)$ le hemos asignado una función definida en un abierto de V, pero, en principio, nada nos asegura que dos elementos distintos de $k(V)$ no puedan definir la misma función. El teorema siguiente prueba que no es así:

Teorema 1.22 *Si V es una variedad algebraica afín y $\alpha \in k(V)$ se anula en un abierto no vacío de V, entonces $\alpha = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $U \subset V$ un abierto no vacío en el que $\alpha = 0$. Pongamos que $\alpha = f/g$, con $f,\ g \in k[V]$ y $g \neq 0$. Entonces $U_g = \{P \in V \mid g(P) \neq 0\}$ es un abierto no vacío. Como en V los abiertos no vacíos son densos (por el teorema 1.14), tenemos que $U \cap U_g$ es un abierto no vacío (luego denso), y claramente

$$U \cap U_g \subset C_f = \{P \in V \mid f(P) = 0\}.$$

Entonces C_f es denso, pero también cerrado, luego $C_f = V$ y así $f = 0$, luego concluimos que $\alpha = 0$. ∎

En particular, si dos funciones racionales coinciden en cualquier abierto no vacío en el que estén definidas, son iguales. Por consiguiente, podemos identificar los elementos de $k(V)$ con las funciones que determinan, lo que justifica el nombre de "funciones racionales" para los elementos de $k(V)$.

Notemos que toda aplicación polinómica $\phi : V \longrightarrow W$ entre variedades algebraicas afines induce un k-homomorfismo de álgebras $\bar{\phi} : k[W] \longrightarrow k[V]$ de modo que si $\alpha \in \mathcal{O}_{\phi(P)}(W)$, digamos $\alpha = f/g$ con $g(\phi(P)) \neq 0$, entonces $\bar{\phi}(g)(P) = g(\phi(P)) \neq 0$, luego $\bar{\phi}(\alpha) = \bar{\phi}(f)/\bar{\phi}(g) \in \mathcal{O}_P(V)$. Es fácil ver que $\bar{\phi}(\alpha)$ no depende de la representación elegida de α como fracción, por lo que tenemos un homomorfismo de anillos[6] $\bar{\phi} : \mathcal{O}_{\phi(P)}(W) \longrightarrow \mathcal{O}_P(V)$.

Ejemplo Si V es la parábola $X = Y^2$, entonces $k(V) = k(x)(\sqrt{x})$ es una extensión cuadrática del cuerpo $k(x)$, el cual es isomorfo al cuerpo de funciones racionales $k(X)$. Así, un ejemplo de función racional en V podría ser

$$\alpha = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1},$$

cuya única singularidad es $(1, 1)$. ∎

Anillos locales de conjuntos algebraicos reducibles Si C es un conjunto algebraico reducible, el álgebra $k[C]$ no es un dominio íntegro, por lo que no está definido su cuerpo de cociente $k(C)$. Sin embargo, es posible generalizar la definición de los anillos $\mathcal{O}_P(C)$. Ocasionalmente tendremos necesidad de trabajar en este contexto más general.

Definición 1.23 Sea $C = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ la descomposición en componentes irreducibles de un conjunto algebraico afín C, sea $P \in C$ y sea $C(P)$ la unión de las componentes irreducibles que contienen a P. Definimos $\mathcal{O}_P(C)$ como el cociente del conjunto

$$\{(f, g) \in k[C] \times k[C] \mid g(P) \neq 0\}$$

respecto de la relación de equivalencia dada por

$$(f, g) \sim (f', g') \leftrightarrow (fg' - f'g)|_{C(P)} = 0.$$

[6]Es fácil ver que $\mathcal{O}$ es un funtor contravariante de la categoría de pares (V, P), donde V es una variedad algebraica afín y $P \in V$, en la categoría de anillos.

Representamos por f/g la clase de equivalencia del par (f,g), y es fácil ver que $\mathcal{O}_P(C)$ es un anillo con las operaciones dadas por

$$\frac{f}{g}+\frac{f'}{g'}=\frac{fg'+f'g}{gg'}, \qquad \frac{f}{g}\frac{f'}{g'}=\frac{ff'}{gg'}.$$

Las comprobaciones son exactamente las mismas que las de la construcción del cuerpo de cocientes. En lugar de la integridad de $k[C]$ usamos que si se cumple $g(P)\neq 0\neq g'(P)$ entonces $(gg')(P)\neq 0$.

Notemos que la restricción $f/g\mapsto f|_{C(P)}/g|_{C(P)}$ determina un isomorfismo entre $\mathcal{O}_P(C)$ y $\mathcal{O}_P(C(P))$, así como que si C es irreducible $\mathcal{O}_P(C)$ es el anillo que ya teníamos definido, pero es fácil ver que si P está en varias componentes irreducibles entonces $\mathcal{O}_P(C)$ no es un dominio íntegro.

Observemos que si $\alpha=f/g\in\mathcal{O}_P(C)$, el valor $\alpha(P)=f(P)/g(P)$ no depende de la representación de α como fracción.

Es claro que las unidades de $\mathcal{O}_P(C)$ son los elementos del ideal

$$\mathfrak{m}_P=\{\alpha\in\mathcal{O}_P(C)\mid \alpha(P)\neq 0\},$$

que es, por consiguiente, el único ideal maximal de $\mathcal{O}_P(C)$.

Tenemos un monomorfismo $i_P: k[C]\longrightarrow\mathcal{O}_P(C)$ dado por $i(f)=f/1$, cuyo núcleo es el ideal de las funciones que se anulan en $C(P)$. En particular, es un monomorfismo si $C(P)=C$, es decir, si P está en todas las componentes irreducibles de C. En tal caso podemos considerar que $k[C]\subset\mathcal{O}_P(C)$.

Necesitaremos este hecho elemental:

Teorema 1.24 *Si C es un conjunto algebraico afín y $P\in C$, entonces el anillo $\mathcal{O}_P(C)$ es noetheriano.*

Demostración: Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathcal{O}_P(C)$, como $k[C]$ es noetheriano (es un cociente de un anillo de polinomios) el ideal $\overline{\mathfrak{a}}=i_P^{-1}[\mathfrak{a}]$ es finitamente generado, digamos, $\overline{\mathfrak{a}}=(f_1,\dots,f_r)$, pero entonces también $\mathfrak{a}=(f_1,\dots,f_r)$. En efecto, si $f/g\in\mathfrak{a}$, también $f/1\in\mathfrak{a}$, luego $f\in\overline{\mathfrak{a}}$ y así $f=h_1f_1+\cdots+h_rf_r$, con lo que $f/g=(h_1/g)f_1+\cdots+(h_r/g)f_r$. ∎

1.6 Extensiones del cuerpo de definición

Observemos que si $k\subset k'\subset K$ y $C\subset A^n$ es un conjunto algebraico definido sobre k, también podemos considerarlo como definido sobre k'. Si C es irreducible sobre k', también lo es sobre k, pues $I_k(C)=I_{k'}(C)\cap k[X_1,\dots,X_n]$, que claramente es un ideal primo. Sin embargo, si C es irreducible sobre k, puede ocurrir que deje de serlo al considerarlo sobre k'.

Ejemplo Consideremos $k=\mathbb{Q}$ y sea $C=V(X^2+Y^2)$. Es fácil ver que X^2+Y^2 es irreducible en $\mathbb{Q}[X,Y]$, luego $I=(X^2+Y^2)$ es un ideal primo en $\mathbb{Q}[X,Y]$, luego $I(C)=I(V(I))=I$, luego C es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Sin embargo, $C=V(X+iY)\cup V(X-iY)$ es reducible sobre $\mathbb{Q}(i)$. ∎

Este ejemplo muestra que "obstinarnos" en trabajar con ecuaciones con coeficientes en un cuerpo prefijado k puede ocultarnos la estructura de un conjunto algebraico, por ejemplo, haciéndonos ver como curva irreducible lo que "en realidad" es una unión de dos rectas, como en el ejemplo anterior. En esta sección estudiaremos la situación con detalle. También abordaremos la cuestión de qué sucede si decidimos cambiar el cuerpo K en el que "realizamos" los conjuntos algebraicos por otro cuerpo algebraicamente cerrado mayor. A este respecto empezamos probando lo siguiente:

Teorema 1.25 *Sea $k \subset K \subset K'$ una cadena de cuerpos de modo que K y K' sean algebraicamente cerrados y sea $C \subset A^n(K)$ un conjunto algebraico definido sobre k. Entonces la clausura $\overline{C}$ de C en $A^n(K')$ respecto a la topología de Zariski relativa a k coincide con su clausura respecto a la topología de Zariski relativa a K o a K', y está definida por las mismas ecuaciones que C. Más aún, las correspondencias*

$$C \mapsto \overline{C} \qquad C' \mapsto C \cap A^n(K)$$

son biyecciones mutuamente inversas entre los conjuntos algebraicos de $A^n(K)$ y $A^n(K')$ definidos sobre k.

DEMOSTRACIÓN: Sea $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$ tal que $C = V_K(S)$. Vamos a probar que $C_{K'} = V_{K'}(S)$ es el menor subconjunto algebraico de $A^n(K')$ que contiene a C. De este modo, como esta definido sobre k (y sobre K), será la clausura de C respecto de la topología de Zariski relativa a cualquier extensión de k. En particular vemos que $C_{K'}$ no depende de la elección de S.

En efecto, sea $C \subset D \subset A^n(K')$, donde D es algebraico. Tenemos que probar que $C_{K'} \subset D$, lo cual equivale a que $I_{K'}(D) \subset I_{K'}(C_{K'})$.

Fijemos una K-base $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ de K'. Así, cada $F \in K'[X_1, \dots, X_n]$ se expresa en forma única como $F = \sum_{i\in I_0} \alpha_i F_i$, donde $I_0 \subset I$ es finito y $F_i \in K[X_1, \dots, X_n]$.

Si $F \in I_{K'}(D)$ y $P \in C \subset C_{K'} \cap A^n(K)$, tenemos que $\sum_{i\in I_0} \alpha_i F_i(P) = 0$ y $F_i(P) \in K$, luego la independencia lineal de los α_i nos da que $F_i(P) = 0$ para todo i, luego $F_i \in I_K(C) = \mathrm{Rad}(I)$, donde $I = (S) \subset K[X_1, \dots, X_n]$. Por lo tanto, existe un m tal que $F_i^m \in I \subset I_\Omega(C_{K'})$, luego $F_i \in I_\Omega(C_{K'})$, luego $F \in I_\Omega(C_{K'})$.

Así pues, $\overline{C} = V_{K'}(S)$, y es claro entonces que $\overline{C} \cap A^n(K) = C$. Recíprocamente, si $C' \subset A^n(K')$ es un conjunto algebraico definido sobre k, digamos $C' = V_{K'}(S)$, para cierto $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$, entonces $C = C' \cap A^n(K) = V_K(S)$ cumple que $C' = \overline{C}$. ∎

De este modo vemos que cambiar el cuerpo algebraicamente cerrado K por otro mayor es una operación aparentemente irrelevante a la hora de estudiar los conjuntos algebraicos definidos sobre k, sin embargo, vamos a ver que no es así, sino que trabajar con una extensión de K "suficientemente grande" puede simplificar sustancialmente el estudio de los conjuntos algebraicos definidos sobre k. Aquí "suficientemente grande" significa lo siguiente:

En lo sucesivo sobreentenderemos que $k \subset \bar{k} \subset K \subset \Omega$ es una cadena de cuerpos en la que K y Ω son algebraicamente cerrados y Ω tiene grado de trascendencia infinito sobre K.

Siempre podemos encontrar un cuerpo Ω en estas condiciones sin más que considerar un cuerpo de fracciones algebraicas $K(S)$, donde S es un conjunto infinito de indeterminadas, y tomar como Ω la clausura algebraica de $K(S)$. No obstante, si, por ejemplo, $k = \mathbb{Q}$ y $K = \bar{k}$, podemos tomar simplemente $\Omega = \mathbb{C}$.

En estas condiciones podemos asegurar que los conjuntos algebraicos irreducibles tienen puntos genéricos en el sentido siguiente:

Definición 1.26 Si X es un espacio topológico, un *punto genérico* en X es un punto P tal que $\{P\}$ es denso en X.

Como los puntos son trivialmente irreducibles, el teorema 1.15 nos da que si un espacio topológico X tiene un punto genérico, entonces es irreducible.

Teorema 1.27 *Sea $V \subset A^n$ una variedad algebraica afín sobre k. Un punto $\xi \in V$ es genérico (respecto a la topología de Zariski relativa a k) si y sólo si*

$$I_k(V) = \{F \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid F(\xi) = 0\}.$$

Demostración: Si ξ es genérico y $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ cumple $F(\xi) = 0$, entonces $V \setminus V(F)$ es un abierto en V que no contiene a ξ, luego tiene que ser vacío, luego $V \subset V(F)$ y así $F \in I_k(V)$.

Recíprocamente, si ξ determina $I_k(V)$ en el sentido indicado y $U \subset V$ es un abierto no vacío, entonces $C = V \setminus U$ es un conjunto algebraico (sobre k) estrictamente contenido en V, luego $I_k(V) \subsetneq I_k(C)$, luego existe un polinomio $F \in I_k(C) \setminus I_k(V)$, que cumplirá $F(\xi) \neq 0$, luego $\xi \in U$ y esto prueba que $\{\xi\}$ es denso. ∎

Si V es un conjunto algebraico irreducible sobre k y $\xi \in V$ es un punto genérico, podemos considerar el cuerpo $k(\xi) = k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Es fácil ver que no depende de la elección del sistema de referencia. Además, es inmediato que el homomorifmo $k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow k(\xi)$ dado por $X_i \mapsto \xi_i$ tiene por núcleo a $I_k(V)$, luego induce un k-monomorfismo $k[V] \longrightarrow k(\xi)$, que a su vez se extiende a un k-isomorfismo $k(V) \longrightarrow k(\xi)$ determinado por que $x_i \mapsto \xi_i$.

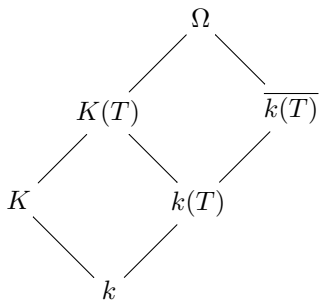
Veamos ahora que, como habíamos indicado, las hipótesis sobre Ω nos permiten probar la existencia de puntos genéricos:

Teorema 1.28 *Toda variedad algebraica $V \subset A^n(\Omega)$ (sobre k) tiene un punto genérico ξ. Además, si la extensión K/k es regular* [Al 13.51]*, $k(\xi)$ puede tomarse linealmente disjunto de K sobre k.*

Demostración: Tenemos que $k(V) = k(x_1, \ldots, x_n)$. Por [Al 13.26] podemos suponer que $x_1, \ldots, x_d$ es una base de trascendencia de $k(V)$ sobre k.

No perdemos generalidad si suponemos que K/k es regular, pues en caso contrario podemos probar el teorema tomando $K = k$. Estamos suponiendo

que Ω tiene grado de trascendencia infinito sobre K, luego podemos tomar un conjunto $T = \{t_1, \ldots, t_d\} \subset \Omega$ algebraicamente independiente sobre K. Tenemos la situación siguiente



donde $\overline{k(T)}$ representa la clausura algebraica de $k(T)$ en Ω. Por [Al 13.34] tenemos que K y $k(T)$ son linealmente disjuntos sobre k, y [Al 13.54] nos da que la extensión $K(T)/k(T)$ también es regular. Esto significa que $K(T)$ y $\overline{k(T)}$ son linealmente disjuntos. Por [Al 13.33] concluimos que K y $\overline{k(T)}$ son linealmente disjuntos sobre k.

Por [Al 13.22] existe un único k-isomorfismo de cuerpos

$$k(x_1, \ldots, x_d) \longrightarrow k(T)$$

determinado por $x_i \mapsto t_i$.

A su vez, como la extensión $k(V)/k(x_1, \ldots, x_d)$ es algebraica, [Al 7.53] nos da un k-monomorfismo de cuerpos $\phi : k(V) \longrightarrow \overline{k(T)} \subset \Omega$.

Sea $\xi_i = \phi(x_i) \in \overline{k(T)}$, con lo que tenemos determinado un punto $\xi \in A^n(\Omega)$. Vamos a ver que cumple lo pedido. Como $k(\xi) \subset \overline{k(T)}$, tenemos que $k(\xi)$ y K son linealmente disjuntos sobre k.

Por otra parte, para cada polinomio $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, se cumple que $F(\xi) = 0$ si y sólo si $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, si y sólo si $[F(X_1, \ldots, X_n)] = 0$ en $k[V]$, si y sólo si $F \in I_k(V)$. En particular esto implica que $\xi \in V(I_k(V)) = V$. ∎

Vamos a ver ahora la relevancia de la última afirmación del teorema anterior. Veamos una primera consecuencia:

Teorema 1.29 *Si $V \subset A^n$ es una variedad algebraica afín sobre k y K/k es regular, entonces K y $k(V)$ son linealmente disjuntos sobre k.*

Demostración: Sea $\{\beta_j\}_{j\in J}$ una k-base de K. Basta probar que es linealmente independiente sobre $k(V)$. Para ello suponemos que $\sum_{j\in J_0} \beta_j f_j = 0$, con $J_0 \subset J$ finito y $f_j \in k(V)$.

Por el teorema anterior podemos considerar una extensión Ω/K de modo que exista un punto genérico $\xi \in \overline{V} \subset A^n(\Omega)$ tal que K y $k(\xi)$ sean linealmente disjuntos sobre k. Entonces $\{\beta_j\}_{j\in J}$ es linealmente independiente sobre $k(\xi)$ y $\sum_{j\in J_0} \beta_j f_j(\xi) = 0$, con $f_j(\xi) \in k(\xi)$, luego $f_j(\xi) = 0$ y también $f_j = 0$, para todo índice j. ∎

Observemos ahora que si K/k es una extensión de cuerpos, un ideal dado $I \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ tiene un generador en $k[X_1, \ldots, X_n]$ si y sólo si tiene una base en $k[X_1, \ldots, X_n]$ como K-espacio vectorial.

En efecto, una base es también un generador como ideal, luego una implicación es obvia y, si I tiene un generador $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ como ideal, el conjunto que los polinomios que resultan de multiplicar un elemento de S por un monomio arbitrario (con coeficiente 1) es un generador de I como K-espacio vectorial que está en $k[X_1, \ldots, X_n]$, y éste a su vez contendrá una base.

Teorema 1.30 *Sea $\xi \in A^n(\Omega)$ y consideremos el ideal primo*

$$P = \{F \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid F(\xi) = 0\}.$$

Se cumple que P tiene un generador en $k[X_1, \ldots, X_n]$ si y sólo si K y $k(\xi)$ son linealmente disjuntos sobre k.

DEMOSTRACIÓN: Por la observación precedente, que P tenga un generador en $k[X_1, \ldots, X_n]$ equivale a que tenga una base en $k[X_1, \ldots, X_n]$.

Supongamos que K y $k(\xi)$ son linealmente disjuntos. Entonces, si $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ es una k-base de K, también es linealmente independiente sobre $k(\xi)$.

Dado $F \in P$, podemos expresarlo como $F = \sum_{i\in I_0} \alpha_i F_i$, para ciertos polinomios $F_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Puesto $F(\xi) = 0$ y $F_i(\xi) \in k(\xi)$, concluimos que $F_i(\xi) = 0$ para todo $i \in I_0$, luego $F_i \in P \cap k[X_1, \ldots, X_n]$, por lo que $P \cap k[X_1, \ldots, X_n]$ es un generador de P como K-espacio vectorial, luego contiene una base.

Supongamos ahora que P tiene una base $\{F_j\}_{j\in J}$ en $k[X_1, \ldots, X_n]$. Como $k(\xi)$ es el cuerpo de cocientes de $k[\xi]$, basta probar que una k-base prefijada de $k[\xi]$ sigue siendo linealmente independiente sobre K (véase la tercera observación tras la definición [Al 13.32]). Dicha base la podemos tomar formada por monomios $M_i(\xi)$, con $M_i(X_1, \ldots, X_n) \in k[X_1, \ldots, X_n]$, pues la totalidad de los monomios forman obviamente un sistema generador de $k[\xi]$.

Supongamos que $\sum_{i\in I_0} \alpha_i M_i(\xi) = 0$, para ciertos $\alpha_i \in K$. Entonces tenemos que $F = \sum_{i\in I_0} \alpha_i M_i \in P$, luego podemos expresar F en la forma

$$\sum_{i\in I_0} \alpha_i M_i = \sum_{j\in J_0} \beta_j F_j,$$

con $\beta_j \in K$. Se cumple que los polinomios M_i y F_j (con $i \in I_0$ y $j \in J_0$) son linealmente independientes sobre k, pues en caso contrario tendríamos una combinación lineal nula

$$\sum_{i\in I_0} a_i M_i + \sum_{j\in J_0} b_j F_j = 0,$$

con a_i, $b_j \in k$. Evaluando en ξ y teniendo en cuenta que $F_j(\xi) = 0$ y que los $M_i(\xi)$ son linealmente independientes sobre k, concluimos que $a_i = 0$ para todo $i \in I_0$ y, como los F_i son linealmente independientes sobre K (luego sobre k), también $b_j = 0$.

En particular, podemos concluir que ninguno de los monomios M_i aparece en ninguno de los polinomios F_j, luego en la relación inicial entre ellos podemos concluir que $\alpha_i = 0$ para todo $i \in I_0$, lo que prueba la independencia lineal de los $M_i(\xi)$. ∎

De aquí obtenemos varias consecuencias relevantes:

Teorema 1.31 *Sea $\xi \in A^n(\Omega)$, sea $I_k = \{F \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid F(\xi) = 0\}$ y supongamos que K y $k(\xi)$ son linealmente disjuntos. Entonces*

$$I_K = \{F \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid F(\xi) = 0\}$$

es el ideal generado por I_k en $K[X_1, \ldots, X_n]$.

Demostración: Por el teorema anterior $I_K = (S)$, para cierto conjunto $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$. Así $S \subset I_k \subset (I_k) \subset I_K$, luego $(I_k) = I_K$. ∎

Teorema 1.32 *Si K/k es una extensión regular de cuerpos y $P \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ es un ideal primo, entonces el ideal $(P) \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ generado por P en $K[X_1, \ldots, X_n]$ es primo.*

Demostración: Sea $V = V_\Omega(P)$, que es un conjunto algebraico irreducible sobre k. Por el teorema 1.28 tiene un punto genérico ξ tal que $k(\xi)$ y K son linealmente disjuntos sobre k. Esto significa que

$$P = I_k(V) = \{F \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid F(\xi)) = 0\}.$$

Por el teorema anterior, $(P) = \{F \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid F(\xi) = 0\}$, que obviamente es un ideal primo. ∎

Vamos a reinterpretar esto en términos de variedades algebraicas:

Teorema 1.33 *Si $V \subset A^n(K)$ es un conjunto algebraico afín definido sobre k y es irreducible sobre $\bar{k}$, entonces es irreducible sobre cualquier cuerpo intermedio $k \subset k' \subset K$. Más aún, si L es cualquier extensión algebraicamente cerrada de K, la clausura $\overline{V}$ de V en $A^n(L)$ respecto a la topología de Zariski relativa a k (o a L) sigue siendo irreducible sobre cualquier cuerpo $k \subset k' \subset L$.*

Demostración: Por hipótesis el ideal $I_{\bar{k}}(V)$ es primo y, como la extensión $K/\bar{k}$ es regular, el teorema anterior nos da que el ideal generado por $I_{\bar{k}}(V)$ en $K[X_1, \ldots, X_n]$ es primo y, como $V = V(I_{\bar{k}}(V))$, tenemos que

$$I_K(V) = I_K(V(I_{\bar{k}}(V))) = \mathrm{Rad}((I_k(V))) = (I_{\bar{k}}(V))$$

es un ideal primo, es decir, que V es irreducible sobre K y, más aún, $I_K(V)$ está generado por los mismos polinomios que $I_{\bar{k}}(V)$.

Por lo tanto, V es irreducible sobre K, y también sobre cualquier cuerpo intermedio, pues es claro que $I_{k'}(V) = I_K(V) \cap k'[X_1, \ldots, X_n]$ es un ideal primo.

Para la segunda parte, el teorema 1.25 nos da que $\overline{V} = I_L(I_{\bar{k}}(V))$. Como la extensión $L/\bar{k}$ es regular, el teorema anterior nos da que el ideal $(I_{\bar{k}}(V))$ generado por $I_{\bar{k}}(V)$ en $L[X_1, \ldots, X_n]$ es primo, luego

$$I_L(\overline{V}) = I_L(V(I_{\bar{k}}(V))) = \mathrm{Rad}((I_{\bar{k}}(V))) = (I_{\bar{k}}(V)).$$

En particular vemos que $\overline{V}$ es irreducible sobre L, luego también sobre cualquier cuerpo intermedio $k \subset k' \subset L$. ∎

En resumen, si tenemos una variedad algebraica afín V sobre k, sabemos que puede dejar de ser irreducible sobre un cuerpo mayor, pero acabamos de probar que si permanece irreducible sobre $\bar{k}$, entonces es irreducible sobre cualquier extensión de k. Incluso, si extendemos K hasta otro cuerpo algebraicamente cerrado L, la clausura $\overline{V}$ de V en $A^n(L)$ sigue siendo irreducible.

Definición 1.34 Si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico definido sobre k, diremos que C es *absolutamente irreducible* (o *geométricamente irreducible,*) o que es una *variedad algebraica afín absoluta,* si es irreducible sobre $\bar{k}$.

En general, llamaremos *componentes geométricamente irreducibles* (o *absolutamente irreducibles*) de C a las componentes irreducibles de C visto como conjunto algebraico sobre $\bar{k}$.

Así, las componentes geométricamente irreducibles $C_1, \ldots, C_m$ de C son variedades absolutas, están definidas sobre $\bar{k}$ y $C = C_1 \cup \cdots \cup C_m$.

Notemos que la irreducibilidad absoluta es invariante por k-isomorfismos, pues un k-isomorfismo $\phi : V \longrightarrow W$ induce un $\bar{k}$-isomorfismo $\bar{\phi} : \bar{k}[W] \longrightarrow \bar{k}[V]$, por lo que $\bar{k}[V]$ es un dominio íntegro si y sólo si lo es $\bar{k}[W]$.

Por ejemplo, es inmediato que los espacios afines A^n son variedades algebraicas afines absolutas definidas sobre k, de donde se sigue a su vez que también lo son las gráficas de polinomios (con coeficientes en k) y las variedades lineales afines (definidas sobre k), pues hemos probado que son isomorfas (sobre k) a espacios afines.

Las curvas del ejemplo de la página 18 son todas absolutamente irreducibles, pues la prueba que hemos dado de su irreducibilidad es válida para cualquier cuerpo, luego en particular para $\bar{k}$.

Notemos que, expresando $C_i = V(S_i)$, con $S_i \subset \bar{k}[X_1, \ldots, X_n]$ finito y adjuntando a k los coeficientes de todos los polinomios de todos los conjuntos S_i obtenemos una extensión finita k'/k tal que todas las componentes C_i están definidas sobre k'.

Dicho de otro modo, las componentes geométricamente irreducibles de C son las componentes irreducibles de C sobre k'. Obviamente, k' puede sustituirse por cualquier otro cuerpo mayor, luego la extensión k'/k se puede tomar normal. Vamos a ver que también podemos tomarla separable. Esto se debe esencialmente a que las extensiones puramente inseparables no afectan a la irreducibilidad de los conjuntos algebraicos:

Teorema 1.35 *Si k'/k es una extensión puramente inseparable, todo conjunto algebraico $C \subset A^n$ irreducible sobre k lo es también sobre k'.*

DEMOSTRACIÓN: Si C no fuera irreducible sobre k', podríamos descomponerlo en unión $C = C_1 \cup C_2$ de dos cerrados estrictamente contenidos en C definidos sobre k'. Tomando conjuntos finitos de polinomios que los definan y adjuntando a k sus coeficientes, obtendríamos una extensión finita de k, que seguiría siendo puramente inseparable, en la que C no sería irreducible. Por lo tanto, no perdemos generalidad si suponemos que la extensión k'/k es finita.

Sea p la característica de k. El teorema [Al 13.15] nos da que existe un m tal que $\alpha^{p^m} \in k$ para todo $\alpha \in k'$ (basta tomar un m que cumpla esto cuando α recorre una k-base de k' y entonces lo cumple para todo α).

Tenemos que el ideal $I_k(C)$ es primo. Sea $I' \subset k'[X_1, \dots, X_n]$ el ideal generado por $I_k(C)$. Tenemos que probar que $I_{k'}(C) = I_{k'}(I') = \mathrm{Rad}(I')$ también es primo.

Supongamos que $FG \in \mathrm{Rad}(I')$ pero $G \notin \mathrm{Rad}(I')$. Entonces existe un r tal que $F^r G^r \in I'$. Por otra parte, podemos tomar un m de manera que $G^{p^m} \in k[X_1, \dots, X_n]$. Podemos tomarlo de modo que $p^m \geq r$. Fijemos una k-base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ de k' y expresemos $F^r = \sum_i \alpha_i F_i$, donde $F_i \in k[X_1, \dots, X_n]$. Así

$$\sum_i \alpha_i F_i G^{p^m} = G^{p^m} F^r = G^{p^m - r} F^r G^r \in I'.$$

El teorema 1.6 nos da que $F_i G^{p^m} \in I_k(C)$ para todo i, pero $G^{p^m} \notin I_k(C)$, pues en tal caso $G^{p^m} \in I'$ y $G \in \mathrm{Rad}(I')$, en contra de lo supuesto. Como $I_k(C)$ es primo, concluimos que $F_i \in I_k(C)$, luego $F^r \in I'$, luego $F \in \mathrm{Rad}(I')$. ∎

Con esto ya podemos probar:

Teorema 1.36 *Sea $C \subset A^n$ un conjunto algebraico irreducible sobre k. Entonces existe un cuerpo $k \subset k' \subset K$ tal que la extensión k'/k es finita de Galois y las componentes irreducibles de C sobre k' son sus componentes geométricamente irreducibles.*

DEMOSTRACIÓN: Tras la definición 1.34 hemos razonado que existe una extensión finita k'/k que cumple lo requerido. Como puede sustituirse por cualquier otra mayor, podemos tomarla normal, y sólo falta probar que podemos tomarla separable. Para ello consideramos la clausura separable k'_s de k en k', que ciertamente es finita de Galois sobre k. Si C_i es una componente irreducible de C sobre k'_s, el teorema anterior nos da que es irreducible sobre k', luego la descomposición $C = C_1 \cup \cdots \cup C_m$ de C en componentes irreducibles sobre k'_s es también su descomposición en k', luego las C_i son geométricamente irreducibles.

∎

Vamos a extraer consecuencias de este hecho. En primer lugar observamos que podemos precisar el teorema 1.33: si un conjunto algebraico afín definido sobre k es irreducible sobre la clausura separable k_s de k, entonces es geométricamente irreducible.

Dada una extensión de cuerpos k'/k, llamamos $G(k'/k)$ al grupo de todos los k-automorfismos de k'. Si $\sigma \in G(K/k)$, podemos definir una biyección $\sigma : A^n \longrightarrow A^n$ mediante

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\sigma = (\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_n)).$$

Aquí hemos "recordado" que $A^n = K^n$, cosa que nos habíamos propuesto "olvidar", pero podemos volver a "olvidarlo" en cuanto observamos que, como $G(K/k)$ deja invariantes a los puntos de cualquier sistema de referencia (sobre k), para cada $\sigma \in G(K/k)$ y cada $P \in A^n$, las coordenadas de P^σ son las imágenes por σ de las coordenadas de P, y así tenemos determinada la acción de $G(K/k)$ sobre A^n sin hacer referencia a las "coordenadas absolutas" de los puntos.

Similarmente, si $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$, definimos $F^\sigma \in K[X_1, \ldots, X_n]$ como el polinomio que resulta de aplicar σ a todos los coeficientes de F. Así tenemos definido un k-isomorfismo de anillos $\sigma : K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow K[X_1, \ldots, X_n]$.

Teorema 1.37 *Si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico no necesariamente definido sobre k y $\sigma \in G(K/k)$, se cumple que $\sigma[C]$ es algebraico. Más precisamente, $I_K(\sigma[C]) = \sigma[I_K(C)]$. En particular, C es geométricamente irreducible si y sólo si lo es $\sigma[C]$.*

Demostración: Si $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ y $P \in A^n$, se cumple $F(P^{\sigma^{-1}}) = 0$ si y sólo si $(F^\sigma)^{\sigma^{-1}}(P^{\sigma^{-1}}) = 0$, si y sólo si $F^\sigma(P) = 0$.

Así, $P \in \sigma[C]$ si y sólo si $P^{\sigma^{-1}} \in C$, si y sólo si $F^\sigma(P) = F(P^{\sigma^{-1}}) = 0$ para todo $F \in I_K(C)$, si y sólo si $F(P) = 0$ para todo $F \in \sigma[I_K(P)]$.

Esto prueba que $\sigma[C] = V(\sigma[I_K(C)])$. Como σ es un isomorfismo de anillos, el ideal $\sigma[I_K(C)]$ es radical, luego $I_K(\sigma[C]) = \sigma[I_K(C)]$, e igualmente $\sigma[I_K(C)]$ es primo si y sólo si lo es $I_K(C)$, luego C es geométricamente irreducible si y sólo si lo es $\sigma[C]$. ∎

Teorema 1.38 *Si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico definido sobre k, para todo $\sigma \in G(K/k)$ se cumple que $\sigma[C] = C$. Si C está definido sobre k', donde $k \subset k' \subset K$ y k'/k es una extensión separable, entonces C está definido sobre k si y sólo si $\sigma[C] = C$ para todo $\sigma \in G(K/k)$.*

Demostración: Pongamos que $C = V(S)$, con $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$. Si $P \in C$ y $F \in S$, entonces $F(P) = 0$, luego $F(P^\sigma) = 0$, luego $P^\sigma \in C$. Esto prueba que $\sigma[C] \subset C$, y aplicando esto a σ^{-1} tenemos la igualdad.

Si C está definido sobre k', adjuntando a k los coeficientes (en k') de un conjunto finito de polinomios que defina a C, obtenemos una extensión finita separable de k que cumple lo mismo que k', luego podemos suponer que la extensión k'/k es finita. Extendiendo k' hasta su clausura normal sobre k, podemos suponer que k'/k es finita de Galois.

Por la parte ya probada sabemos que si C está definido sobre k entonces queda fijo por todos los k-automorfismos. Veamos el recíproco. Pongamos que

$C = V(S)$, con $S \subset k'[X_1, \ldots, X_n]$. Observemos que si $\sigma \in G(k'/k)$, por el teorema [Al 7.54] podemos extenderlo a un k-automorfismo $\bar{\sigma} : \bar{k} \longrightarrow \bar{k}$. Si T es una base de trascendencia de K sobre $\bar{k}$, por [Al 13.22] podemos extender σ a un k-automorfismo $\bar{\sigma} : \bar{k}(T) \longrightarrow \bar{k}(T)$ y, de nuevo por [Al 7.54], llegamos a un k-automorfismo $\bar{\sigma} : K \longrightarrow K$.

Así, si $F \in S$ y $\sigma \in G(\bar{k}/k)$, está definido F^σ, y se cumple que $F^\sigma(P) = 0$ para todo $P \in C$, pues $P^{\bar{\sigma}^{-1}} \in C$, luego $F(P^{\bar{\sigma}^{-1}}) = 0$, luego concluimos que $F^\sigma(P) = F^{\bar{\sigma}}(P) = 0$.

Por consiguiente, extendiendo S, podemos suponer que es unión de órbitas respecto a la acción de $G(k'/k)$. Supongamos que $F_1, \ldots, F_r$ es una de estas órbitas y sean $e_1, \ldots, e_r$ los polinomios simétricos elementales con r indeterminadas. Vamos a probar que $V(S)$ no se altera si sustituimos $F_1, \ldots, F_r$ por $e_i(F_1, \ldots, F_r)$, para $i = 1, \ldots, r$, con lo que el teorema quedará probado, pues estos polinomios tienen sus coeficientes en k (ya que están en k' y son invariantes por $G(k'/k)$).

Concretamente, hemos de probar que un punto P anula a los polinomios F_i si y sólo si anula a los $e_i(F_1, \ldots, F_r)$. Una implicación es obvia. Si P es raíz de los $e_i(F_1, \ldots, F_r)$, en particular lo es de

$$e_r(F_1, \ldots, F_r) = F_1 \cdots F_r.$$

Esto significa que $F_i(P) = 0$ para un i. No perdemos generalidad si suponemos $F_1(P) = 0$. Teniendo en cuenta esto y que P es raíz de $e_{r-1}(F_1, \ldots, F_r)$, concluimos que también es raíz de $F_2 \cdots F_r$, luego $F_i(P) = 0$ para un $i \geq 2$. Podemos suponer $F_2(P) = 0$. Prosiguiendo de este modo concluimos que P anula a todos los F_i. ∎

Con esto podemos probar que todo conjunto irreducible se descompone en una clase de conjugación de componentes geométricamente irreducibles:

Teorema 1.39 *Si $C \subset A^n$ es una variedad algebraica afín sobre k, sus componentes geométricamente irreducibles son conjugadas, es decir, si C_1 y C_2 son dos de ellas, existe $\sigma \in G(K/k)$ tal que $C_2 = \sigma[C_1]$. Además C es la clausura de cualquiera de ellas respecto de la topología de Zariski relativa a k.*

Demostración: Sean $C_1, \ldots, C_r$ las componentes geométricamente irreducibles de C. Por 1.36 están definidas sobre un cuerpo k' tal que k'/k es una extensión finita de Galois. Si $\sigma \in G(K/k)$, el teorema anterior nos da que

$$C = \sigma[C] = \sigma[C_1] \cup \cdots \cup \sigma[C_r],$$

y los $\sigma[C_i]$ son conjuntos algebraicos geométricamente irreducibles. Por consiguiente son los mismos $C_1, \ldots, C_r$. Con esto hemos probado que si C_i es una componente geométricamente irreducible de C, también lo es cada $\sigma[C_i]$.

El conjunto $W_1 = \bigcup_{\sigma \in G(K/k)} \sigma[C_1]$ es una unión de un número finito de componentes C_i, luego es un conjunto algebraico contenido en C y definido sobre k'. Además es invariante por $G(K/k)$, luego el teorema anterior nos da que W_1 está

definido sobre k. Si W_1 no contuviera a alguna componente C_i, podemos formar igualmente $W_2 = \bigcup_{\sigma\in G(K/k)} \sigma[C_i]$, y de nuevo $W_2 \subset C$ está definido sobre k.

Tras un número finito de pasos llegamos a una expresión $C = W_1 \cup \cdots \cup W_s$ que contradice la irreducibilidad de C sobre k salvo que sólo haya un término en la descomposición, lo cual equivale a que todas las C_i son conjugadas de una misma componente, luego todas son conjugadas entre sí.

Por lo tanto, si $\overline{C}_i$ es la clausura de C_i respecto de la topología de Zariski relativa a k, como $C_i \subset C$, también $\overline{C}_i \subset C$. Por otra parte, $C_i \subset \overline{C}_i$, luego $\sigma[C_i] \subset \overline{C}_i$, pues $\overline{C}_i$ está definida sobre k, luego es invariante por k-automorfismos, luego $C \subset \overline{C}_i$. ∎

Notemos que el hecho de que C sea la clausura de sus componentes geométricamente irreducibles C_i equivale a que $I_k(C) = I_k(C_i)$, es decir, que si un polinomio $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ se anula en C_i, de hecho se anula en C, pues $C_i \subset V_k(F)$, luego $C = \overline{C}_i \subset V_k(F)$.

En términos de puntos genéricos, esto equivale claramente a que todo punto genérico de C_i sobre un cuerpo k' sobre el que esté definida C_i es también un punto genérico de C sobre k.

Otra consecuencia es que si las componentes geométricamente irreducibles C_i de C están definidas sobre k', tenemos un monomorfismo $k[C] \longrightarrow k'[C_i]$. Si identificamos a $k[C]$ con un subanillo de $k'[C_i]$ se cumple obviamente que $k'[C_i] = k'k[C]$ (donde el producto se calcula en una clausura algebraica de $k(C)$), luego también $k'(C_i) = k'k(C)$.

En otros términos: al añadir (suficientes) constantes al cuerpo $k(C)$ no obtenemos el cuerpo de funciones racionales $k'(C)$ (que no existe si C no es geométricamente irreducible), sino el cuerpo de funciones racionales $k'(C_i)$ de cualquiera de las componentes geométricamente irreducibles de C.

Ahora podemos dar una caracterización de la irreducibilidad geométrica de una variedad en términos de su cuerpo de funciones racionales:

Teorema 1.40 *Si $V \subset A^n$ es una variedad algebraica afín sobre k, entonces V es geométricamente irreducible si y sólo si la clausura algebraica de k en $k(V)$ es puramente inseparable sobre k.*

Demostración: Si la clausura algebraica de k en $k(V)$ es puramente inseparable sobre k, entonces $k(V)/k$ es lo que en [Al 13.57] hemos llamado una extensión primaria y, por [Al 13.56], sabemos que $k(V)$ es linealmente disjunto de la clausura separable de k.

Por 1.36 podemos tomar una extensión finita de Galois k'/k tal que las componentes geométricamente irreducibles de V están definidas sobre k', y tenemos que k' y $k(V)$ son linealmente disjuntos sobre k.

Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ una k-base de k'. Si $F \in k'[X_1, \ldots, X_n]$, podemos expresarlo de forma única como $F = \sum_i \alpha_i F_i$, con $F_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$, y se cumple que $F \in I_{k'}(V)$ si y sólo si $F_i \in I_k(C)$ para todo i.

En efecto, una implicación es obvia y, si $F \in I_{k'}(C)$ y $P \in C$, para cada automorfismo $\sigma \in G(k'/k)$ se cumple que $P^{\sigma^{-1}} \in V$, luego $F(P^{\sigma^{-1}}) = 0$, luego $F^\sigma(P) = 0$. Esto significa que $F_1(P), \ldots, F_m(P)$ es solución del sistema de ecuaciones lineales de matriz $(\sigma_j(\alpha_i))$, que tiene determinante no nulo (su cuadrado es el determinante de la matriz de la forma bilineal asociada a la traza de la extensión k'/k, véase [Al 10.2]). Por consiguiente, todos los $F_i(P)$ son nulos.

En una clausura algebraica de $k(V)$ podemos construir el producto $k'k[V]$, así como el epimorfismo de anillos $\phi : k'[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow k'k[V]$ definido mediante $F \mapsto \sum_i \alpha_i[F_i]$. (Para probar que conserva productos basta expresar $\alpha_i\alpha_j = \sum_l \beta_{ijl}\alpha_l$, con $\beta_{ijl} \in k$.)

Hemos probado que si $F \in I_{k'}(V)$, entonces cada $[F_i]$ es nula, luego $\phi(F) = 0$, y el recíproco se cumple porque k' y $k(V)$ son linealmente disjuntos sobre k, luego el núcleo de ϕ es $I_{k'}(V)$ y así ϕ induce un k'-isomorfismo $k'[V] \longrightarrow k'k[V]$ (para probar que fija a los elementos de k' podemos suponer que un $\alpha_i = 1$). Esto prueba que $k'[V]$ es un dominio íntegro, luego V es irreducible sobre k', luego sólo tiene una componente geométricamente irreducible, luego V es geométricamente irreducible.

Supongamos ahora que V es geométricamente irreducible, tomamos una función $\alpha \in k(V)$ algebraica separable sobre k y tenemos que probar que $\alpha \in k$. En caso contrario, el polinomio mínimo de α sobre k tiene grado mayor que 1 y, como sus raíces son simples, existe $\beta \in \bar{k}$, $\beta \neq \alpha$, que también es raíz de dicho polinomio. Por el teorema [Al 7.15] existe un k-isomorfismo $\sigma : k(\alpha) \longrightarrow k(\beta)$ tal que $\sigma(\alpha) = \beta$, que por [Al 7.54] se extiende a un k-automorfismo $\sigma \in G(\bar{k}/k)$ que no fija a α.

Por el teorema 1.38 sabemos que $\sigma[V] = V$ y por el teorema 1.37 además $\sigma[I_K(V)] = I_K(\sigma[V]) = I_k(V)$. Por lo tanto, si $F - G \in I_K(V)$, también $F^\sigma - G^\sigma \in \sigma[I_K(V)] = I_K(V)$, lo que prueba que, si $f = [F] \in K[V]$, podemos definir $f^\sigma = [F^\sigma]$ sin que importe la elección de F. Más precisamente, tenemos que cada $\sigma \in G(K/k)$ se extiende a un k-automorfismo $\sigma : K[V] \longrightarrow K[V]$ que fija a $k[V]$, que a su vez se extiende a un $k(V)$-automorfismo de $K(V)$. Pero esto es absurdo, porque $\alpha \in k(V)$, luego σ debería fijar a α. ∎

En particular, si k es perfecto, una variedad V definida sobre k es geométricamente irreducible si y sólo si k es algebraicamente cerrado en $k(V)$.

Ejemplo Consideremos de nuevo $k = \mathbb{Q}$ y $C = V(X^2 + Y^2)$. Al principio de esta sección hemos visto que C es irreducible sobre $\mathbb{Q}$, pero no geométricamente irreducible. Por otra parte, en $k(C)$ tenemos las funciones x e y que cumplen $x^2 + y^2 = 0$, luego $i = x/y$ cumple $i^2 = -1$, luego $i \in k(C)$ es una función racional algebraica sobre $\mathbb{Q}$ y $k_1 = \mathbb{Q}(i) \subset k(C)$ es la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$ en $k(C)$. En efecto, antes del teorema 1.40 hemos observado que si C_i es cualquiera de las dos componentes irreducibles de C, puesto que está definida sobre k_1, se cumple que $k_1(C_i) = k_1k(C) = k(C)$, luego por el teorema anterior k_1 es algebraicamente cerrado en $k(C)$. ∎

Sin embargo, si k no es perfecto, puede ocurrir que k no sea algebraicamente cerrado en $k(V)$ aunque V sea geométricamente irreducible.

Ejemplo Sea F un cuerpo de característica prima p, sea $k = F(X)$ el cuerpo de fracciones algebraicas en una indeterminada, sea $K = \bar{k}$ su clausura algebraica y sea $V = V(T^p - X) \subset A^1$.

El polinomio $T^p - X$ es irreducible en $k[T]$ por el criterio de irreducibilidad de Eisenstein [Al 3.29], luego $I_k(V) = \mathrm{Rad}((T^p - X)) = (T^p - X)$.

Por otra parte, sea $\alpha \in K$ tal que $\alpha^p = X$. Entonces $T^p - X = (T - \alpha)^p$, por lo que

$$I_K(V) = \mathrm{Rad}((T - \alpha)^p) = (T - \alpha),$$

que es un ideal primo, luego $V = \{\alpha\}$ es irreducible sobre K, luego también sobre k. Por lo tanto, V es una variedad algebraica afín sobre k geométricamente irreducible.

Por otra parte, $k(V)$ es el cuerpo de cocientes de $k[T]/(T^p - X)$, que ya es de por sí un cuerpo, la extensión algebraica $k(V) = k[t]$, donde $t^p = X$. Por lo tanto, la clausura algebraica de k en $k(V)$ es todo $k(V)$ que, ciertamente, es puramente inseparable sobre k.

Observemos además que, aunque V es una variedad algebraica afín definida sobre k, el ideal $I_K(V)$ no admite un generador en $k[T]$, pues en caso contrario podríamos expresar

$$T - \alpha = \sum_{i \in I} F_i G_i,$$

con $G_i \in I_K(V) \cap k[T] = I_k(V) = (T^p - X)$ y llegaríamos a que $T^p - X \mid T - \alpha$, lo cual es absurdo. ∎

El ejemplo precedente muestra que al extender el cuerpo de constantes de un conjunto algebraico afín hay un aspecto que debemos tener en cuenta: Si $V \subset A^n$ es una variedad algebraica definida sobre k, esto significa que $V = V(S)$, para cierto $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ o, llamando $I = (S) \subset K[X_1, \ldots, X_n]$, tenemos que $V = V(I)$, donde el ideal I tiene un generador en $k[X_1, \ldots, X_n]$, pero en general $I_K(V) = \mathrm{Rad}(I)$, y acabamos de ver que el hecho de que V esté definida sobre k no garantiza que $I_K(V)$ admita un generador en $k[X_1, \ldots, X_n]$. La situación general es la siguiente:

Teorema 1.41 *Sea $V \subset A^n$ una variedad absoluta sobre k. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *La extensión $k(V)/k$ es regular.*
2. *El ideal $I_{\bar{k}}(V)$ está generado por $I_k(V)$.*
3. *Si $k \subset k' \subset K$, el ideal $I_{k'}(V)$ está generado por $I_k(V)$.*

Demostración: 1) ⇒ 2) Notemos que podemos considerar a $\bar{k}$ y $k(V)$ como subcuerpos del cuerpo de cocientes $\bar{k}(V)$ de $\bar{k}[V]$. La regularidad de $k(V)/k$ equivale a que $\bar{k}$ y $k(V)$ son linealmente disjuntos sobre $k(V)$. Por consiguiente,

si $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ es una k-base de $\bar{k}$, es linealmente independiente sobre $k(V)$, luego en particular sobre $k[V]$. Así, si $F \in \bar{k}[X_1,\dots,X_n]$, podemos expresarlo como

$$F = \sum_{i\in I_0} \alpha_i F_i,$$

con $F_i \in k[X_1,\dots,X_n]$, y entonces $F \in I_{\bar{k}}(V)$ si y sólo si $[F] = \sum_{i\in I_0} \alpha_i[F_i] = 0$ en $\bar{k}[V]$, si y sólo si $[F_i] = 0$ para todo $i \in I_0$, si y sólo si $F_i \in I_k(V)$. Esto prueba que $I_{\bar{k}}(V)$ es el ideal generado por $I_k(V)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Como la extensión $K/\bar{k}$ es regular, el teorema 1.32 implica que el ideal generado por $I_{\bar{k}}(V)$ en $K[X_1,\dots,X_n]$ es primo, luego es $I_K(V)$, luego por 2) $I_k(V)$ también genera $I_K(V)$.

Si k' es arbitrario, por 1.28, podemos considerar una extensión Ω/K tal que $\overline{V} \subset A^n(\Omega)$ tenga un punto genérico ξ sobre K, es decir, tal que

$$I_K(\overline{V}) = \{F \in K[X_1,\dots,X_n] \mid F(\xi) = 0\}.$$

Notemos que $I_K(V) = I_K(\overline{V})$, pues una inclusión es obvia y si $F \in I_K(V)$, entonces $V \subset V_\Omega(F)$, luego $\overline{V} \subset V_\Omega(F)$, luego $F \in I_K(\overline{V})$. Así pues:

$$I_K(V) = \{F \in K[X_1,\dots,X_n] \mid F(\xi) = 0\},$$

$$I_{k'}(V) = I_K(V) \cap k'[X_1,\dots,X_n] = \{F \in k'[X_1,\dots,X_n] \mid F(\xi) = 0\}.$$

Como $I_K(V)$ tiene un generador en $k[X_1,\dots,X_n]$, el teorema 1.30 nos da que K y $k(\xi)$ son linealmente disjuntos sobre k, luego lo mismo vale para k' y $k(\xi)$, luego 1.30 implica que $I_{k'}(V)$ tiene un generador en $k[X_1,\dots,X_n]$, que estará contenido en $I_{k'}(V)\cap k[X_1,\dots,X_n] = I_k(V)$, luego $I_k(V)$ también genera el ideal $I_{k'}(V)$.

3) $\Rightarrow$ 2) es trivial. Para probar 2) $\Rightarrow$ 1), podemos tomar Ω/K de manera que $\overline{V} \subset A^n(\Omega)$ tenga un punto genérico ξ sobre $\bar{k}$. Como antes

$$I_{\bar{k}}(V) = \{F \in \bar{k}[X_1,\dots,X_n] \mid F(\xi) = 0\}.$$

Por 1.30 tenemos que $\bar{k}$ y $k(\xi)$ son linealmente disjuntos sobre k, luego si $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ es una k-base de $\bar{k}$, tenemos que es linealmente independiente sobre $k(\xi)$. Vamos a probar que también lo es sobre $k(V)$, y así $\bar{k}$ y $k(V)$ serán linealmente disjuntos sobre k, lo cual equivale a que la extensión $k(V)/k$ sea regular.

Si $\sum_{i\in I_0} \alpha_i f_i = 0$, con $f_i \in k(V)$, expresando $f_i = g_i/h$, con $g_i,\ h \in k[V]$ y multiplicando por h, podemos suponer que $f_i \in k[V]$. Si $f_i = [F_i]$, tenemos que $\sum_{i\in I_0} \alpha_i F_i \in I_k(V)$, luego $\sum_{i\in I_0} \alpha_i F_i(\xi) = 0$ y $F_i(\xi) \in k(\xi)$, luego $\alpha_i = 0$, por la independencia de los α_i sobre $k(\xi)$. ∎

Notemos que la propiedad 1) del teorema anterior ya implica que V es una variedad absoluta (por el teorema 1.40) y si k es perfecto equivale, de hecho, a que V sea una variedad absoluta, luego en este caso se cumplen siempre las condiciones del teorema anterior.

Más adelante necesitaremos este hecho:

Teorema 1.42 *Sea $V \subset A^n$ una variedad absoluta tal que $k(V)/k$ sea regular. Entonces $k[V] = K[V] \cap k(V)$.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a ver en primer lugar que la conclusión es cierta si K y $k(V)$ son linealmente disjuntos sobre k.

Sea $\{\beta_j\}_{j\in J}$ una k-base de K, que por hipótesis también es una $k(V)$-base de $K(V)$. Podemos suponer que $\beta_{j_0} = 1$. Todo polinomio $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ puede expresarse como $F = \sum_{j\in J_0} \beta_j F_j$, con $J_0 \subset J$ finito y $F_j \in k[X_1, \dots, X_n]$, luego, tomando clases, toda función $\alpha = [F] \in K[V]$ se expresa en la forma $\alpha = \sum_{j\in J_0} \beta_j \alpha_j$, con $\alpha_j \in k[V]$.

Si $\alpha \in K[V] \cap k(V)$, tenemos también la expresión $\alpha = \beta_{j_0} \cdot \alpha$, luego por la unicidad de las coordenadas respecto de una base, tiene que ser $\alpha = \alpha_{j_0} \in k[V]$. Esto nos da una inclusión y la otra es trivial.

Si $k(V)/k$ es regular, entonces $\bar{k}$ y $k(V)$ son linealmente disjuntos sobre k, luego hemos probado que $k[V] = \bar{k}[V] \cap k(V)$. Por otro lado, la extensión $K/\bar{k}$ es regular, luego también hemos probado que $\bar{k}[V] = K[V] \cap \bar{k}(V)$. Combinando ambas igualdades concluimos que $k[V] = K[V] \cap k(V)$. ∎

Teorema 1.43 *Sea $V \subset A^n$ una variedad absoluta sobre un cuerpo perfecto k. Entonces $k[V]$ es íntegramente cerrado si y sólo si lo es $\bar{k}[V]$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\bar{k}[V]$ es íntegramente cerrado y $\alpha \in k(V)$ es entero sobre $k[V]$, entonces también es entero sobre $\bar{k}[V]$, luego por hipótesis $\alpha \in \bar{k}[V] \cap k(V)$. Por el teorema anterior, tenemos que $\alpha \in k[V]$, luego $k[V]$ es íntegramente cerrado.

Veamos ahora que si $k[V]$ es integramente cerrado, también lo es $\bar{k}[V]$. De hecho, vamos a probar algo un poco más general, y es que si A es la clausura entera de $k[V]$ en $k(V)$, entonces la clausura entera $\overline{A}$ de $\bar{k}[V]$ en $\bar{k}(V)$ es $\bar{k}A$.

Claramente, todos los elementos de A son enteros sobre $\bar{k}[V]$, luego $\bar{k}A \subset \overline{A}$. Por otro lado, si $\alpha \in \overline{A}$, tomamos una extensión finita de Galois k'/k tal que $\alpha \in k'(V)$. Los elementos de $\bar{k}$ son algebraicos sobre k, luego enteros sobre $k[V]$, luego la extensión $\bar{k}[V]/k[V]$ es entera y, por consiguiente, α es entero sobre $k[V]$.

Como k es perfecto, por 1.40 tenemos que la extensión $k(V)/k$ es regular, luego k' y $k(V)$ son linealmente disjuntos sobre k. Por lo tanto, si $\beta_1, \dots, \beta_r$ es una k-base de k', también es una $k(V)$-base de $k'(V)$, luego podemos expresar

$$\alpha = \xi_1\beta_1 + \cdots + \xi_r\beta_r,$$

para ciertos $\xi_i \in k(V)$. Sea $\beta'_1, \dots, \beta'_r \in k'$ la base dual de $\beta_1, \dots, \beta_r$ respecto de la traza [Al 10.1]. Por [Al 7.45] tenemos que $G(k'/k) \cong G(k'(V)/k(V))$, de donde se sigue que la traza de la extensión $k'(V)/k(V)$ extiende a la traza de k'/k, luego $\beta'_1, \dots, \beta'_r$ también es la base dual respecto de la traza de la extensión $k'(V)/k(V)$. Por consiguiente, $\xi_i = \mathrm{Tr}(\alpha\beta'_i)$, pero $\alpha\beta'_i$ es entero sobre $k[V]$, y también lo son sus conjugados, luego también su traza ξ_i. Por lo tanto, $\xi_i \in A$, luego $\alpha \in \bar{k}A$. ∎

Capítulo II

Variedades proyectivas

Consideremos la afirmación siguiente:

Toda recta corta a toda cónica en exactamente dos puntos.

Tal vez el lector considere que es falsa. Basta pensar, por ejemplo, en la parábola $Y = X^2$ y en la recta $Y = -1$, que no tienen puntos en común. Sin embargo, podemos objetar que la recta y la parábola indicadas se cortan en dos puntos, a saber, $(i, -1)$ y $(-i, -1)$. Ya hemos señalado que en geometría algebraica no podemos permitirnos el lujo de despreciar las soluciones imaginarias. Nos interesen o no en un contexto dado, lo cierto es que los dos puntos de corte imaginarios están ahí. Es algo análogo a lo que sucede si nos preguntan por el número de raíces del polinomio $X^4 + X^2$. Aunque en un contexto dado sólo nos interesen las raíces reales y veamos que la única es $X = 0$, entenderá mejor la situación quien sepa que, además, el polinomio tiene las raíces imaginarias $\pm i$.

Aun así, el lector podría objetar que la recta $Y = 0$ corta a la parábola únicamente en el punto $(0, 0)$. La respuesta a esta objeción es que, como dicha recta es precisamente la tangente a la parábola por $(0, 0)$, la intersección "cuenta doble", con lo que los puntos de intersección son dos: $(0, 0)$ y $(0, 0)$. Que ambos sean el mismo punto es una mera "coincidencia".

En efecto, veremos más adelante que es posible definir una multiplicidad en los puntos de intersección de dos curvas algebraicas, de modo que el punto de corte entre una curva y su tangente tiene al menos multiplicidad 2, y que en el ejemplo que estamos considerando es exactamente 2. De nuevo, tener en cuenta estas multiplicidades nos da un conocimiento más profundo de la geometría de los conjuntos algebraicos, en el mismo sentido en que podemos decir que comprende mejor el polinomio $X^4 + X^2$ quien sea consciente de que "en realidad" tiene cuatro raíces, a saber, 0, 0, i, $-i$. Por ejemplo, quien haya localizado la raíz $X = 0$ y se haya dado cuenta de que es doble, sabrá que el polinomio no puede tener más que otras dos raíces (reales o imaginarias), mientras que quien no tenga en cuenta la multiplicidad creerá erróneamente que podría haber hasta tres raíces más.

Por último, el lector podría objetar que la recta $X = 0$ también corta a la parábola únicamente en el punto $(0, 0)$, y esta vez no se trata de la recta tangente, por lo que "sería trampa" considerarlo como un punto doble.

La "contraobjeción" en este caso es que —de acuerdo con la geometría proyectiva— la parábola tiene un punto en el infinito, que coincide con el punto infinito de la recta, luego también hay dos puntos de intersección, uno finito y otro infinito.

Con esto terminan nuestros "ases en la manga". La geometría proyectiva (clásica) permite enunciar propiedades muy generales sobre los conjuntos algebraicos que se cumplen a condición de que adoptemos sobre ellos la "perspectiva correcta", lo que se traduce en:

1. No despreciar puntos "imaginarios". Aunque consideremos ecuaciones con coeficientes en un cuerpo k, debemos considerar al menos sus posibles soluciones con coordenadas en la clausura algebraica de k.
2. Tener en cuenta los "puntos infinitos" de la geometría proyectiva.
3. Contar puntos "con multiplicidades debidamente definidas" cuando corresponda, como al calcular los puntos de intersección de dos curvas.

Viendo las cosas "algebraicamente" veremos que se cumplen principios muy generales, como que la intersección de una cónica y una recta consta siempre de dos puntos, o que la intersección de dos cónicas consta siempre de cuatro puntos, etc. Como hemos visto, en las "cuentas" de este tipo pueden faltarnos puntos si no tenemos en cuenta puntos imaginarios o infinitos, o si no contamos con las multiplicidades debidas.

En el capítulo anterior hemos definido adecuadamente los conjuntos algebraicos afines para que contengan todos los puntos "imaginarios" necesarios, y en este capítulo nos ocuparemos de añadirles los puntos "infinitos" necesarios para que no nos falten puntos a la hora de enunciar resultados globales como el que hemos discutido brevemente sobre la intersección de una recta y una cónica.

2.1 Conjuntos algebraicos proyectivos

Espacios proyectivos Recordemos la teoría básica sobre los espacios proyectivos:

Definición 2.1 Llamaremos *espacio proyectivo* n-dimensional de un cuerpo k al conjunto $\mathrm{P}^n(k)$ de todos los subespacios vectoriales de dimensión 1 en k^{n+1}.

Si K/k es una extensión de cuerpos, podemos definir una aplicación inyectiva $\mathrm{P}^n(k) \longrightarrow \mathrm{P}^n(K)$ mediante $\langle v\rangle \mapsto \langle v\rangle$.

La aplicación es ciertamente inyectiva, pues si $\langle v_1\rangle = \langle v_2\rangle$ en $\mathrm{P}^n(K)$, existe un $\alpha \in K$ no nulo tal que $v_2 = \alpha v_1$, pero, tomando una coordenada $\beta \in k$ no nula de v_1, resulta que $\alpha\beta \in k$ (porque es una coordenada de v_2, luego $\alpha \in k$, luego $\langle v_1\rangle = \langle v_2\rangle$ en $\mathrm{P}^n(k)$.

Esto nos permite considerar que $\mathrm{P}^n(k) \subset \mathrm{P}^n(K)$.

Como en el capítulo anterior, vamos a fijar una extensión de cuerpos K/k con K algebraicamente cerrado, y abreviaremos $\mathrm{P}^n = \mathrm{P}^n(K)$.

Un *sistema de referencia proyectivo* en P^n (definido sobre k) es una $n+2$-tupla de puntos $(P_0, \ldots, P_{n+1}) \in \mathrm{P}^n(k)$ tales que, si $P_i = \langle v_i \rangle$ con $v_i \in k^{n+1}$, los vectores $v_1, \ldots, v_{n+1}$ son linealmente independientes en k^{n+1} (luego en K^{n+1}) y $v_0 = v_1 + \cdots + v_{n+1}$. Notemos que si elegimos otros v_i' (para los mismos P_i) que cumplan la definición, existirá necesariamente un $\lambda \in k$ no nulo tal que $v_i' = \lambda v_i$, para todos los índices $i = 0, \ldots, n+1$.

Fijado un sistema de referencia proyectivo, todo punto $P = \langle v \rangle \in \mathrm{P}^n$ cumple que $v = a_1 v_1 + \cdots + a_{n+1} v_{n+1}$, para cierta $n+1$-tupla $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in K^{n+1}$, no nula, unívocamente determinada por P (y el sistema de referencia) salvo un factor constante. Diremos que $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ es un vector de *coordenadas homogéneas* de P en el sistema de referencia dado.

De este modo, todo $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in K^{n+1}$ no nulo es un vector de coordenadas homogéneas de un único punto de P^n, y dos vectores de coordenadas corresponden al mismo punto si y sólo si se diferencian en un factor constante. Cuando se sobrentienda un sistema de referencia prefijado, identificaremos a cada punto de P^n con su clase de coordenadas homogéneas.

Los puntos de $\mathrm{P}^n(k)$ son los puntos de P^n que admiten coordenadas homogéneas en k^{n+1}.

Si consideramos otro sistema de referencia proyectivo $(P_0', \ldots, P_{n+1}')$, la relación entre las coordenadas homogéneas de un mismo punto P respecto a ambos sistemas de referencia es de la forma

$$\begin{array}{rcccc} X_1' & = & a_{11}X_1 + & \cdots & + a_{1n+1}X_{n+1}, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{n+1}' & = & a_{n+1\,1}X_1 + & \cdots & + a_{n+1n+1}X_{n+1}, \end{array} \tag{2.1}$$

para cierta matriz de coeficientes (a_{ij}) regular con coeficientes en k, y cualquier relación de esta forma se corresponde con un cambio de sistema de referencia.

Un *hiperplano proyectivo* en P^n (definido sobre k) es un conjunto de la forma

$$H = \{\langle v \rangle \mid v \in W\},$$

donde W es un subespacio de k^{n+1} de dimensión n. Si respecto a la base $v_1, \ldots, v_{n+1}$ asociada a un sistema de referencia proyectivo el subespacio W está formado por los vectores cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$a_1 X_1 + \cdots + a_{n+1} X_{n+1} = 0,$$

entonces H está formado por los puntos de P^n cuyas coordenadas homogéneas en el sistema de referencia dado satisfacen esta misma ecuación. Igualmente, toda ecuación de este tipo (con algún coeficiente no nulo) determina un hiperplano

proyectivo en un sistema de referencia dado y, fijado un hiperplano H, siempre podemos elegir un sistema de referencia proyectivo respecto al cual la ecuación de H sea $X_i = 0$.

Fijemos un hiperplano proyectivo arbitrario H_∞ (sobre k) en P^n, al que llamaremos *hiperplano del infinito,* y tomemos un sistema de referencia respecto al cual la ecuación de H_∞ sea $X_i = 0$ (por concretar tomemos $i = n+1$, pero todo es válido para un i arbitrario). Entonces los puntos de $\mathrm{P}^n \setminus H_\infty$ tienen coordenadas homogéneas $(X_1, \ldots, X_{n+1})$ con $X_{n+1} \neq 0$, luego dividiendo entre X_{n+1} vemos que tienen un único vector de coordenadas homogéneas de la forma $(X_1, \ldots, X_n, 1)$. Esto nos permite identificar los puntos de $\mathrm{P}^n \setminus H_\infty$ con K^n y, por consiguiente, considerar a $\mathrm{P}^n \setminus H_\infty$ como un espacio afín n-dimensional. Con esta identificación, los puntos de $\mathrm{P}^n(k) \setminus H_\infty$ se identifican con los de $A^n(k)$.

Fijado un sistema de referencia, el espacio proyectivo P^n está cubierto por los $n+1$ espacios afines A_i formados por los puntos de P^n cuya i-ésima coordenada homogénea es no nula. Cuando consideremos $A^n \subset \mathrm{P}^n$ sin más especificación, se entenderá que A^n es el espacio afín A_{n+1}.

Conjuntos algebraicos Pasamos ya a introducir el concepto de conjunto algebraico proyectivo:

Definición 2.2 Si $S \subset k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$, llamaremos

$$V(S) = \{P \in \mathrm{P}^n \mid F(P) = 0 \text{ para todo } F \in S\},$$

donde $F(P) = 0$ ha de entenderse como que $F(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0$ para todo vector de coordenadas homogéneas $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ de P (en un sistema de referencia dado).

Un conjunto $C \subset \mathrm{P}^n$ es *algebraico* (definido sobre k) si se expresa de la forma $C = V(S)$, para cierto $S \subset k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Como en el caso afín, es fácil ver que el carácter algebraico de un conjunto no depende del sistema de referencia en el que se compruebe.

Llamaremos $C(k) = C \cap \mathrm{P}^n(k)$ al conjunto de los puntos racionales de C.

Para cada conjunto $C \subset \mathrm{P}^n$, definimos el ideal

$$I_k(C) = \{F \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}] \mid F(P) = 0 \text{ para todo } P \in C\},$$

donde, como antes, $F(P) = 0$ tiene que entenderse como que F se anula en todos los vectores de coordenadas homogéneas de P.

Recordemos que una *forma* de grado n es un polinomio cuyos monomios tienen todos grado n. Todo polinomio F se descompone de forma única como

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots,$$

donde F_i es una forma de grado i.

Diremos que un ideal $I \subset k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ es *homogéneo* si cuando $F \in I$ se descompone en suma de formas $F = F_0 + F_1 + \cdots$, entonces $F_i \in I$ para todo i.

Observemos que los ideales $I(C)$ son homogéneos.

Para probarlo basta ver que si $F = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots$ es la descomposición de un polinomio F en suma de formas, entonces $F(P) = 0$ si y sólo si $F_i(P) = 0$ para todo i. En efecto, si $a = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ es un vector de coordenadas homogéneas de P y $\lambda \in K$ es no nulo, entonces

$$F(\lambda a) = \sum_i F_i(a)\lambda^i = 0 \quad \text{para todo } \lambda \in K^*.$$

Esto sólo es posible si todos los coeficientes de este polinomio (en λ) son nulos, como queríamos probar. (Aquí usamos que K es infinito, porque es algebraicamente cerrado.)

Es claro que si un conjunto algebraico es de la forma $C = V(S)$, también se cumple que $C = V(I)$, donde I es el ideal generado por S. Como los anillos de polinomios son noetherianos, I tiene un generador finito, luego C está definido por un número finito de polinomios, y también por un número finito de formas (pues podemos sustituir cada polinomio por el conjunto finito de formas en las que se descompone).

En los ejemplos concretos, presentaremos siempre los conjuntos proyectivos en términos de conjuntos finitos de formas y, como en el caso afín, a menudo lo haremos indicando las ecuaciones que satisfacen, como $XY + Z^2 = 0$ en lugar de $V(XY + Z^2)$.

Veamos un par de resultados elementales sobre ideales homogéneos que a menudo son útiles:

Teorema 2.3 *Un ideal $I \subset k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ es homogéneo si y sólo si está generado por un conjunto (finito) de formas.*

Demostración: Supongamos que $I = (F^1, \ldots, F^r)$, donde cada F^i es una forma. Sea $F \in I$. Entonces $F = \sum_i A^i F^i$, para ciertos polinomios A^i. La forma de menor grado en que se descompone F ha de ser $F_m = \sum_i A^i_{m-d_i} F^i$, donde d_i es el grado de F^i. Por lo tanto $F_m \in I$. Ahora $F - F_m \in I$ y, repitiendo el argumento, llegamos a que todas las formas de F están en I. La otra implicación es obvia. ∎

Teorema 2.4 *Un ideal homogéneo $I \subsetneq k[X_1, \ldots, X_n]$ es primo si y sólo si para todo par de formas F, G tales que $FG \in I$, o bien $F \in I$ o bien $G \in I$.*

Demostración: Supongamos que $F \notin I$ y $G \notin I$. Sea F_m la forma de menor grado de F que no está en I y sea G_n la forma de menor grado de G que no está en I. Entonces

$$(FG)_{mn} = \sum_{u+v=m+n} F_u G_v \in I.$$

Por la elección de m y n, todos los sumandos tienen un factor en I salvo $F_m G_n$, luego $F_m G_n \in I$, en contradicción con la hipótesis. ∎

Conos Los resultados proyectivos análogos a los que hemos obtenido en el capítulo anterior para el espacio afín se derivan fácilmente de éstos a través del concepto de cono de un conjunto. Usaremos I_p, V_p, I_a, V_a para distinguir las correspondencias proyectivas de las afines. Recordemos que P^n está formado por los subespacios de dimensión 1 de K^{n+1}.

Si $C \subset \mathrm{P}^n$ es un conjunto algebraico, definimos el *cono* de C como el conjunto $\mathrm{Cn}(C)$ de los elementos (en K^{n+1}) de los elementos de C. De este modo, si a través de un sistema de referencia identificamos $A^{n+1} = K^{n+1}$, las coordenadas afines de los puntos de $\mathrm{Cn}(C)$ son 0 y las coordenadas homogéneas de los puntos de C.

Además, si $C \subset \mathrm{P}^n$, se cumple $I_a(\mathrm{Cn}(C)) = I_p(C)$, y si I es un ideal homogéneo de $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ tal que $V_p(I) \neq \varnothing$, entonces $\mathrm{Cn}(V_p(I)) = V_a(I)$.

Veamos una primera aplicación:

Teorema 2.5 *Sea I un ideal homogéneo en $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Entonces*

1. *$V_p(I) = \varnothing$ si y sólo si existe un natural N tal que I contiene a todas las formas de grado $\geq N$.*
2. *Si $V_p(I) \neq \varnothing$ entonces $I_p(V_p(I)) = \operatorname{Rad} I$.*

Demostración: 1) $V_p(I) = \varnothing$ si y sólo si $V_a(I) \subset \{0\}$, lo que a su vez equivale a que $(X_1, \ldots, X_{n+1}) = I_a(\{0\}) \subset I_a(V_a(I)) = \operatorname{Rad} I$. A su vez, es fácil ver que esto equivale a que $(X_1, \ldots, X_{n+1})^N \subset I$ para algún N.

2) $I_p(V_p(I)) = I_a(\mathrm{Cn}(V_p(I)) = I_a(V_a(I)) = \operatorname{Rad} I$. ∎

Observemos que los únicos ideales homogéneos radicales que cumplen 1) son 1 y $(X_1, \ldots, X_{n+1})$, luego tenemos que V_p e I_p biyectan los conjuntos algebraicos proyectivos con los ideales homogéneos radicales distintos de $(X_1, \ldots, X_{n+1})$. (Podemos admitir a 1 en la biyección entendiendo que $\varnothing = V_p(1)$ es algebraico.)

Nota Conviene observar que, a diferencia del caso afín, los puntos no se corresponden con ideales maximales. De hecho, ningún ideal $I_p(C)$ es maximal, pues si $C \neq \mathrm{P}^n$, se cumple que $\{0\} \subsetneq \mathrm{Cn}(C)$, luego

$$I_p(C) = I_a(\mathrm{Cn}(C)) \subsetneq I_a(\{0\}) = (X_1, \ldots, X_{n+1}).$$

∎

Definición 2.6 Diremos que un conjunto $X \subset A^{n+1}$ es *homogéneo* si cuando $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in X$, entonces $(ta_1, \ldots, ta_{n+1}) \in X$, para todo $t \in K$.

Es claro que si $C \subset \mathrm{P}^n$ es un conjunto algebraico proyectivo, entonces $\mathrm{Cn}(C) \subset A^{n+1}$ es un conjunto algebraico homogéneo. Recíprocamente, si $X \subset A^{n+1}$ es un conjunto algebraico homogéneo, entonces el conjunto C de los puntos de P^n con coordenadas homogéneas en X es un conjunto algebraico proyectivo tal que $X = \mathrm{Cn}(C)$.

Observemos que un conjunto algebraico $X \subset A^{n+1}$ es homogéneo si y sólo si el ideal $I_a(X)$ es homogéneo.

En efecto, si X es homogéneo, entonces tenemos que $X = \mathrm{Cn}(C)$, para cierto C, y $I_a(X) = I_p(C)$ es un ideal homogéneo. Recíprocamente, si $I_a(X)$ es homogéneo, luego está generado por un conjunto S de formas, y es claro que $X = V_a(I_a(X)) = V_a(S)$ es homogéneo.

La topología de Zariski Dejamos al lector la comprobación de que el teorema 1.3 es válido igualmente para conjuntos algebraicos proyectivos, es decir, que toda unión finita y toda intersección de conjuntos algebraicos proyectivos es proyectiva. Esto puede hacerse adaptando la prueba del caso afín o bien empleando conos para reducir la prueba al caso afín ya demostrado. Esto permite definir la topología de Zariski en P^n:

Definición 2.7 La *topología de Zariski* en P^n (relativa a k) es la topología que tiene por abiertos a los complementarios de los conjuntos algebraicos (definidos sobre k). Si $C \subset \mathrm{P}^n$ es un conjunto algebraico (definido sobre k), la *topología de Zariski* en C es la relativización a C de la topología de Zariski de P^n, cuyos cerrados son los subconjuntos algebraicos de C.

Llamaremos *variedades algebraicas proyectivas* (sobre k) a los conjuntos algebraicos proyectivos (sobre k) irreducibles respecto de la topología de Zariski (relativa a k).

Los conjuntos algebraicos proyectivos son espacios topológicos noetherianos, pues una sucesión decreciente de cerrados da lugar a una sucesión creciente de ideales de $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ y, como este anillo es noetheriano, tiene que estabilizarse, luego la sucesión de cerrados también se estabiliza. Por consiguiente, son aplicables los teoremas 1.17 y 1.19, según los cuales todo conjunto algebraico proyectivo se descompone de forma única en unión de un número finito de componentes irreducibles. La versión proyectiva del teorema 1.13 se prueba análogamente teniendo en cuenta el teorema 2.4:

Teorema 2.8 *Un conjunto algebraico $C \subset \mathrm{P}^n$ no vacío es irreducible si y sólo si el ideal $I(C)$ es primo.*

De aquí se sigue que $C \subset \mathrm{P}^n$ es una variedad (sobre k) si y sólo si lo es $\mathrm{Cn}(C)$. Más en general, si $C = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ es la descomposición de C en componentes irreducibles, entonces $\mathrm{Cn}(C) = \mathrm{Cn}(C_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Cn}(C_r)$ es la descomposición de $\mathrm{Cn}(C)$ en componentes irreducibles. Por la correspondencia entre conos y conjuntos algebraicos homogéneos podemos concluir que las componentes irreducibles de los conjuntos algebraicos afines homogéneos son homogéneas.

Teorema 2.9 *Si k es un cuerpo infinito, entonces $\mathrm{P}^n(k)$ es denso en P^n (respecto de la topología de Zariski relativa a k).*

Demostración: Se trata de probar que si $C \neq \mathrm{P}^n$ es un conjunto algebraico proyectivo (sobre k), entonces existe $P \in \mathrm{P}^n(k) \setminus C$. Equivalentemente, hay que encontrar $P \in k^{n+1} \setminus \mathrm{Cn}(C)$. Fijado un sistema de referencia, si $F \in I(\mathrm{Cn}(C))$ es no nulo, basta encontrar un punto $a \in k^{n+1}$ tal que $F(a) \neq 0$.

Equivalentemente, basta probar que si $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ es un polinomio no nulo, existe $a \in k^n$ tal que $F(a) \neq 0$. Razonamos por inducción sobre n. Si $n = 1$ basta tener en cuenta que $F(X_1)$ tiene un número finito de raíces y que estamos suponiendo que k es infinito. Si es cierto para n, podemos expresar

$$F = G_d X_{n+1}^d + \cdots + G_1 X_{n+1} + G_0,$$

donde los polinomios $G_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$ no son todos nulos. Por hipótesis de inducción existe $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ tal que $G_i(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ para algún i. Entonces $F(a_1, \ldots, a_n, X_{n+1}) \in k[X_{n+1}]$ es un polinomio no nulo, luego, de nuevo por el caso de una indeterminada, existe un a_{n+1} tal que $F(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq 0$, como había que probar. ∎

Funciones racionales Los polinomios no definen funciones polinómicas sobre un conjunto algebraico proyectivo (porque las coordenadas homogéneas de un punto no están unívocamente determinadas), por lo que no podemos imitar la definición de la k-álgebra $k[C]$ asociada a un conjunto algebraico proyectivo. Sin embargo, si V es una variedad, sí que podemos asociarle un cuerpo de funciones racionales $k(V)$. Para ello conviene probar primero lo siguiente:

Teorema 2.10 *Sea I un ideal homogéneo de $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ y consideremos el anillo $A = k[X_1, \ldots, X_{n+1}]/I$. Entonces todo $f \in A$ se expresa de forma única como $f = f_0 + \cdots + f_m$, donde f_i es la clase de una forma de grado i.*

Demostración: Sólo hay que probar la unicidad. Si $f = g_0 + \cdots + g_r$ es otra descomposición, sean $f_i = [F_i]$, $g_i = [G_i]$. Entonces $\sum(F_i - G_i) \in I$ y, al ser homogéneo, $F_i - G_i \in I$, lo que prueba que $f_i = g_i$. ∎

En particular, en un cociente A de este tipo podemos llamar *formas* de grado i a las clases de formas de grado i, de modo que una misma clase no puede ser una forma de dos grados distintos.

Sea $V \subset \mathrm{P}^n$ una variedad algebraica proyectiva (sobre k). Fijado un sistema de referencia proyectivo, definimos

$$k_h[V] = k[X_1, \ldots, X_{n+1}]/I(V).$$

Se trata de un dominio íntegro, pero sus clases no determinan funciones sobre V, y mucho menos los elementos de su cuerpo de cocientes. Ahora bien, si $f = [F]$ y $g = [G]$ son dos formas del mismo grado en $k_h[V]$, entonces F/G determina una función sobre los puntos de V donde G no se anula, pues $F(P)/G(P)$ no depende de las coordenadas homogéneas de P con las que calculemos el cociente. Además, si $[F]/[G] = [F']/[G']$ (y los denominadores no se anulan en P), tenemos que $FG' - F'G \in I(V)$, de donde llegamos a que $F(P)/G(P) = F'(P)/G'(P)$.

Definición 2.11 Sea $V \subset \mathrm{P}^n$ una variedad algebraica proyectiva. Definimos el *cuerpo de funciones racionales* de V como el subcuerpo $k(V)$ del cuerpo de cocientes de $k_h[V]$ formado por los cocientes de formas del mismo grado (más el 0).

Si $\alpha \in k(V)$ y $P \in V$, diremos que α es *regular* o que está definida en P si $\alpha = f/g$, con $f, g \in k_h[V]$ y $g(P) \neq 0$. (Notemos que $g(P)$ no está bien definido, pero la condición $g(P) \neq 0$ sí lo está.) En tal caso, el valor $\alpha(P) = f(P)/g(P)$ está bien definido y no depende de la representación de α como fracción. En caso contrario diremos que α es *singular* en P o que P es una *singularidad* de α.

Si $P \in V$, definimos el *anillo local* $\mathcal{O}_P(V)$ como el conjunto de las funciones de $k(V)$ regulares en P.

Teorema 2.12 *Si $V \subset \mathrm{P}^n$ es una variedad algebraica proyectiva y $\alpha \in k(V)$ se anula en un abierto no vacío de V, entonces $\alpha = 0$*

Demostración: Sea $W = \mathrm{Cn}(V)$. Notemos que $k_h[V] = k[W]$, por lo que $k(V) \subset k(W)$. Si α se anula en un abierto U de V, es claro que $\mathrm{Cn}(U)$ es un abierto en W en el cual se anula α como elemento de $k(W)$, luego 1.22 nos da que $\alpha = 0$. ∎

En particular, teniendo en cuenta que una función racional está definida (al menos) en un abierto no vacío, concluimos que si dos elementos de $k(V)$ determinan la misma función en un abierto, es que son iguales, luego los elementos de $k(V)$ pueden identificarse con las funciones que definen. En principio, la definición de $k(V)$ depende de la elección de un sistema de referencia proyectivo. No obstante, ahora es fácil ver que sus elementos (considerados como funciones) no dependen de dicha elección.

Extensiones del cuerpo de definición Es fácil trasladar el caso proyectivo los resultados que hemos visto en el capítulo anterior sobre extensiones del cuerpo de definición. Por ejemplo, se cumple el teorema análogo a 1.25:

Teorema 2.13 *Sea $k \subset K \subset K'$ una cadena de cuerpos de modo que K y K' sean algebraicamente cerrados y sea $C \subset \mathrm{P}^n(K)$ un conjunto algebraico definido sobre k. Entonces la clausura $\overline{C}$ de C en $\mathrm{P}^n(K')$ respecto a la topología de Zariski relativa a k coincide con su clausura respecto a la topología de Zariski relativa a K o a K', y está definida por las mismas ecuaciones que C. Más aún, las correspondencias*

$$C \mapsto \overline{C} \qquad C' \mapsto C \cap \mathrm{P}^n(K)$$

son biyecciones mutuamente inversas entre los conjuntos algebraicos de $\mathrm{P}^n(K)$ y $\mathrm{P}^n(K')$ definidos sobre k.

Demostración: Sea $X = \mathrm{Cn}(C) \subset A^{n+1}(K)$, que es un conjunto algebraico definido por un conjunto de formas, y entonces su clausura $\overline{X} \subset A^n(K')$ está definida por esas mismas formas, luego $\overline{X}$ es un conjunto homogéneo, luego de la forma $\overline{X} = \mathrm{Cn}(C')$, para cierto conjunto algebraico proyectivo C' (sobre k), definido por las mismas ecuaciones que C y es fácil ver que es el menor que contiene a C, luego es la clausura de C respecto de la topología de Zariski relativa a cualquier cuerpo que contenga a k. La segunda parte del teorema se concluye también sin dificultad. ∎

Lo mismo sucede con el teorema 1.33:

Teorema 2.14 *Si $V \subset \mathrm{P}^n(K)$ es un conjunto algebraico proyectivo definido sobre k y es irreducible sobre $\bar{k}$, entonces es irreducible sobre cualquier cuerpo intermedio $k \subset k' \subset K$. Más aún, si L es cualquier extensión algebraicamente cerrada de K, la clausura $\overline{V}$ de V en $A^n(L)$ respecto a la topología de Zariski relativa a k (o a L) sigue siendo irreducible sobre cualquier cuerpo $k \subset k' \subset L$.*

Demostración: Si $W = \mathrm{Cn}(V)$, el hecho de que V sea irreducible sobre $\bar{k}$ implica que W también lo es, luego es irreducible sobre todo cuerpo k', luego lo mismo le sucede a V. En la prueba del teorema anterior hemos visto que $\overline{W} = \mathrm{Cn}(\overline{V})$ y sabemos que $\overline{W}$ es irreducible sobre todo cuerpo k', luego lo mismo vale para $\overline{V}$. ∎

Definición 2.15 Si $C \subset \mathrm{P}^n$ es un conjunto algebraico definido sobre k, diremos que C es *absolutamente irreducible* (o *geométricamente irreducible*) o que es una *variedad algebraica proyectiva absoluta* si es irreducible sobre $\bar{k}$.

Llamaremos *componentes geométricamente irreducibles* (o *absolutamente irreducibles*) de un conjunto algebraico C a las componentes irreducibles de C visto como conjunto algebraico sobre $\bar{k}$.

Todas las consideraciones que hemos hecho sobre la irreducibilidad geométrica en el caso afín son válidas trivialmente en el caso proyectivo. Notemos además que $V \subset \mathrm{P}^n$ es geométricamente irreducible si y sólo si lo es $\mathrm{Cn}(V)$.

Para enunciar el hecho de que las componentes geométricamente irreducibles de un conjunto algebraico proyectivo irreducible son conjugadas respecto del grupo $G(K/k)$, primero tenemos que introducir el concepto de conjugación.

Si $\sigma \in G(K/k)$, es inmediato que la conjugación $\sigma : A^{n+1} \longrightarrow A^{n+1}$ induce una conjugación $\sigma : \mathrm{P}^n \longrightarrow \mathrm{P}^n$ de modo que si P tiene coordenadas $(a_1, \ldots, a_{n+1})$, entonces P^σ tiene coordenadas $(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_{n+1}))$. Además, claramente, $\sigma[\mathrm{Cn}(C)] = \mathrm{Cn}(\sigma[C])$, y de aquí se sigue inmediatamente la versión proyectiva del teorema 1.39:

Teorema 2.16 *Si $C \subset \mathrm{P}^n$ es una variedad algebraica proyectiva sobre k, sus componentes geométricamente irreducibles son conjugadas, es decir, si C_1 y C_2 son dos de ellas, existe $\sigma \in G(K/k)$ tal que $C_2 = \sigma[C_1]$. Además C es la clausura de cualquiera de ellas respecto de la topología de Zariski relativa a k.*

El teorema 1.40 será inmediato en la sección siguiente. Respecto a 1.41, la prueba se adapta con facilidad:

Teorema 2.17 *Sea $V \subset \mathrm{P}^n$ una variedad absoluta sobre k. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *La extensión $k(V)/k$ es regular.*
2. *El ideal $I_{\bar{k}}(V)$ está generado por $I_k(V)$.*
3. *Si $k \subset k' \subset K$, el ideal $I_{k'}(V)$ está generado por $I_k(V)$.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $W = \mathrm{Cn}(V)$. La prueba de 2) $\Rightarrow$ 3) se reduce a la implicación análoga en el caso afín a través de W, pues $I_{\bar{k}}(V) = I_{\bar{k}}(W)$, $I_k(V) = I_k(W)$, $I_{k'}(V) = I_{k'}(W)$.

En cambio, en 1) hemos de tener en cuenta que $k(V)$ no coincide con $k(W)$, sino que $k(W)$ es el cuerpo de cocientes de $k[W] = k_h[V]$, mientras que $k(V)$ es el subcuerpo de $k(W)$ formado por los cocientes de formas del mismo grado (más el 0). No obstante, la implicación 3) $\Rightarrow$ 1) es inmediata, pues si se cumple 3), la extensión $k(W)/k$ es regular y, como $k(V)$ es un cuerpo intermedio, también es regular $k(V)/k$.

La implicación no trivial es 1) $\Rightarrow$ 2), que no podemos deducirla de la implicación correspondiente en el caso afín, pero la prueba del caso afín se adapta fácilmente al caso proyectivo.

Podemos considerar a $k_h[V] = k[W]$ como subanillo de $\bar{k}_h[V]$, de manera que el grado de una forma de $k_h[V]$ es el mismo en $k_h[V]$ que en $\bar{k}_h[V]$, luego podemos identificar a $k(V)$ con un subcuerpo de $\bar{k}(V)$.

La regularidad de $k(V)/k$ equivale a que $\bar{k}$ y $k(V)$ son linealmente disjuntos sobre $k(V)$. Por consiguiente, si $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ es una k-base de $\bar{k}$, es linealmente independiente sobre $k(V)$.

El ideal $I_{\bar{k}}(V)$ no puede contener a $(X_1, \ldots, X_{n+1})$, luego existe un índice j tal que $X_j \notin I_{\bar{k}}(V)$, luego $x_j \neq 0$ en $\bar{k}_h[V]$, y es una forma de grado 1.

Si $F \in \bar{k}[X_1, \ldots, X_n]$ es una forma de grado m, podemos expresarla como

$$F = \sum_{i\in I_0} \alpha_i F_i,$$

donde cada $F_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$ es también una forma de grado m, y entonces $F \in I_{\bar{k}}(V)$ si y sólo si $[F] = \sum_{i\in I_0} \alpha_i [F_i] = 0$ en $\bar{k}[V]$, si y sólo si

$$\sum_{i\in I_0} \alpha_i [F_i]/x_j^m = 0$$

en $\bar{k}(V)$, pero $[F_i]/x_j^m \in k(V)$, luego la independencia lineal se los α_i nos da que la igualdad se da si y sólo si $[F_i]/x_j^m = 0$ para todo $i \in I_0$, si y solo $[F_i] = 0$ para todo $i \in I_0$, si y sólo si $F_i \in I_k(V)$ para todo $i \in I_0$.

Así pues, toda forma en $I_{\bar{k}}(V)$ es combinación lineal de formas de $I_k(V)$. Como el ideal $I_{\bar{k}}(V)$ es homogéneo, está generado por las formas que contiene, luego también por $I_k(V)$. ∎

2.2 Clausuras proyectivas

En la sección precedente hemos demostrado las propiedades básicas de los conjuntos algebraicos proyectivos a partir de las propiedades análogas de los conjuntos algebraicos afines a través del concepto de cono. Sin embargo, esta relación $C \leftrightarrow \mathrm{Cn}(C)$ entre conjuntos algebraicos proyectivos y afines es meramente "técnica", pues se basa en que los puntos de P^n pueden verse como rectas de A^{n+1}. Sin embargo, la relación "natural", geométrica, entre la geometría afín

y la geometría proyectiva se basa en el hecho de que A^n puede identificarse con $\mathrm{P}^n \setminus H_\infty$, para cualquier hiperplano prefijado como "hiperplano infinito". En esta sección estudiamos la relación entre los subconjuntos algebraicos de A^n y los de P^n a través de la identificación $A^n = \mathrm{P}^n \setminus H_\infty$. Para ello necesitamos establecer unas correspondencias entre polinomios y formas:

Definición 2.18 Para cada forma $F \in k[X_1, \dots, X_{n+1}]$ definimos el polinomio $F_* = F(X_1, \dots, X_n, 1) \in k[X_1, \dots, X_n]$. Recíprocamente, si $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ se expresa como $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$, donde f_i es una forma de grado i, definimos la forma

$$f^* = X_{n+1}^d f_0 + X_{n+1}^{d-1} f_1 + \cdots + f_d \in k[X_1, \dots, X_{n+1}].$$

Al paso de f a f^* y de F a F_* lo llamaremos *homogeneizar* un polinomio y *deshomogeneizar* una forma, respectivamente.

El teorema siguiente recoge las propiedades básicas. La prueba es una comprobación rutinaria.

Teorema 2.19 *Sean F y G formas y f y g polinomios. Entonces*

1. $(FG)_* = F_* G_*, \quad (fg)^* = f^* g^*$.
2. $(f^*)_* = f$ *y* $X_{n+1}^r (F_*)^* = F$, *donde r es la mayor potencia de X_{n+1} que divide a F.*
3. $(F+G)_* = F_* + G_*, \quad X_{n+1}^t (f+g)^* = X_{n+1}^r f^* + X_{n+1}^s g^*$, *donde* $r = \operatorname{grad} g$, $s = \operatorname{grad} f$ *y* $t = r + s - \operatorname{grad}(f+g)$.

Definición 2.20 Consideremos a A^n como subconjunto de P^n, es decir, identificamos $A^n = \mathrm{P}^n \setminus H_\infty$, donde H_∞ es un hiperplano prefijado como infinito. Sea $X \subset A^n$ un conjunto algebraico y sea $I = I(X) \subset k[X_1, \dots, X_n]$. Definimos I^* como el ideal de $k[X_1, \dots, X_{n+1}]$ generado por las formas f^*, para cada $f \in I$. Definimos la *clausura proyectiva* de X como $X^* = V(I^*) \subset \mathrm{P}^n$.

Recíprocamente, sea ahora $X \subset \mathrm{P}^n$ un conjunto algebraico proyectivo, sea $I = I(X) \subset k[X_1, \dots, X_{n+1}]$, sea I_* el ideal de $k[X_1, \dots, X_n]$ generado por los polinomios F_*, para toda forma $F \in I$. Definimos $X_* = V(I_*) \subset A^n$.

En principio estas definiciones dependen del sistema de referencia considerado y también del cuerpo k sobre el que consideramos definidos los conjuntos, pero vamos a ver que sólo dependen de la elección del hiperplano H_∞. En el caso de C_*, esto es consecuencia del primer apartado del teorema siguiente:

Teorema 2.21 *Se cumplen las propiedades siguientes:*

1. *Si $C \subset \mathrm{P}^n$, entonces $C_* = C \cap A^n$.*
2. *Si $C \subset A^n$, entonces $C = C^* \cap A^n$ y $(C^*)_* = C$.*
3. *Si $C \subset D \subset A^n$, entonces $C^* \subset D^* \subset \mathrm{P}^n$. Si $C \subset D \subset \mathrm{P}^n$, entonces $C_* \subset D_* \subset A^n$.*

4. *Si $C \subset A^n$, entonces C^* es el menor conjunto algebraico de P^n (sobre k) que contiene a C (luego es la clausura de C en la topología de Zariski de P^n relativa a k).*

5. *Si $C \subset A^n$ es irreducible, entonces C^* es irreducible en P^n.*

6. *Si $C = \bigcup_i V_i \subset A^n$ es la descomposición de C en componentes irreducibles, entonces $C^* = \bigcup_i V_i^* \subset \mathrm{P}^n$ es la correspondiente descomposición de C^*.*

7. *Si $C \subsetneq A^n$, entonces ninguna componente irreducible de C^* está contenida en, o contiene a, H_∞.*

8. *Si $C \subset \mathrm{P}^n$ y ninguna componente de C está contenida en, o contiene a, H_∞, entonces $C_* \subsetneq A^n$ y $(C_*)^* = C$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que si F es una forma en $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ y $P \in A^n$, entonces $F(P) = 0$ si y sólo si $F_*(P) = 0$ (donde $F(P)$ es F actuando sobre las coordenadas homogéneas de P y $F_*(P)$ es F_* actuando sobre las coordenadas afines de P).

1) Teniendo esto en cuenta, $P \in C_*$ si y sólo si $F_*(P) = 0$ para toda forma $F \in I(C)$, si y sólo si $P \in A^n$ y $F(P) = 0$ para toda forma $F \in I(C)$, si y sólo si $P \in A^n \cap V(I(C)) = A^n \cap C$.

La primera parte de 2) se prueba análogamente (usando que $f(P) = 0$ si y sólo si $f^*(P) = 0$). La segunda es inmediata: $(C^*)_* = C^* \cap A^n = C$. La propiedad 3) también es trivial.

4) Sea D un conjunto algebraico (sobre k) tal que $C \subset D \subset \mathrm{P}^n$. Si $F \in I(D)$, entonces $F_* \in I(C)$, luego $F = X_{n+1}^r (F_*)^* \in I(C)^*$. Así pues, $I(D) \subset I(C)^*$, luego $C^* \subset V(I(D)) = D$.

5) Tenemos que $I = V(C)$ es un ideal primo. Observemos que si $F \in I^*$ entonces $F_* \in I$. En efecto, $F = \sum p_i f_i^*$, con $f_i \in I$, luego $F_* = \sum p_{i*} f_i \in I$. Por lo tanto, si $FG \in I^*$, tenemos que $F_* G_* \in I$, luego $F_* \in I$ o $G_* \in I$, y entonces $F = X_{n+1}^r (F_*)^* \in I^*$ o $G \in I^*$. Por consiguiente I^* es primo y $I(C^*) = I(V(I^*)) = I^*$, luego C^* es irreducible.

6) se sigue inmediatamente de 3), 4), 5).

7) De 1) y 6) se sigue que ninguna componente de C^* está contenida en H_∞. No perdemos generalidad si suponemos que C es irreducible. Si $H_\infty \subset C^*$, entonces $I(C)^* \subset I(C^*) \subset I(H_\infty) = (X_{n+1})$, pero si $0 \neq F \in I(C)$, entonces $F^* \in I(C)^*$, pero $F^* \notin (X_{n+1})$.

8) También podemos suponer que C es irreducible. Basta demostrar que $C \subset (C_*)^*$, pues entonces $C_* \subset C \subset (C_*)^*$ y aplicamos 4). A su vez, basta ver que $I(C_*)^* \subset I(C)$. Tomemos $f \in I(C_*) = I(V(I(C)_*)) = \operatorname{Rad} I(C)_*$. Entonces $f^N \in I(C)_*$, para cierto N. Usando el teorema anterior concluimos que $X_{n+1}^r (f^N)^* \in I(C)$, para cierto r, pero $I(C)$ es primo y $X_{n+1} \notin I(C)$, ya que $C \not\subset H_\infty$. Así pues, $f^* \in I(V)$. ∎

El teorema siguiente mejora el apartado 4) del teorema anterior, y con ello prueba que C^* tampoco depende del cuerpo k (ni del sistema de referencia):

Teorema 2.22 *Si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico afín, entonces C^* es el menor conjunto algebraico proyectivo que contiene a C, por lo que es la clausura de C respecto de la topología de Zariski de P^n relativa a k o a cualquier cuerpo intermedio $k \subset k' \subset K$.*

Demostración: Sea $C \subset D \subset \mathrm{P}^n$, donde D es algebraico (sobre K). Queremos probar que $C^* \subset D$.

Por la propiedad 6) del teorema anterior podemos suponer que C es irreducible sobre k, pues si $C = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ es su descomposición en componentes irreducibles y el teorema vale para conjuntos irreducibles, cada $C_i^* \subset D$, luego también $C^* \subset D$.

Basta probar que $I_K(D) \subset I_K(C^*)$. Tomamos, pues, $F \in I_K(D)$. Pongamos que $F = X_{n+1}^r F'$, donde F' no es divisible entre X_{n+1}. Así F se anula en todos los puntos de C y, como X_{n+1} no se anula en ningún punto de A^n, lo mismo le sucede a F_0. Vamos a probar que $F_0 \in I_K(C^*)$ o, equivalentemente, podemos suponer que X_{n+1} no divide a F.

Que F se anule en las coordenadas homogéneas de los puntos de C equivale a que F_* se anule en sus coordenadas afines. Por lo tanto, $F_* \in I_K(C)$. Como C está definido sobre k, tenemos que $C = V(I_k(C))$, luego $I_K(C) = \mathrm{Rad}((I_k(C))$. Por lo tanto, existe un m tal que $F_*^m \in (I_k(C))$. Esto significa que podemos expresar $F_*^m = \sum_i G_i F_i$, con $G_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$, $F_i \in I_k(C)$. Se cumple entonces que

$$X_{n+1}^N F^m = \sum_i X_{n+1}^{N_i} G_i^* F_i^*,$$

donde los exponentes N_i son los necesarios para que todos los sumandos tengan el mismo grado, y N el necesario para que los dos miembros tengan el mismo grado.

Así $X_{n+1}^N F^m \in (I_k(C^*)) \subset I_K(C^*)$ y a su vez $X_{n+1} F \in I_K(C^*)$, pues ambos polinomios tienen los mismos ceros. Por lo tanto, $C^* \subset V(F) \cup V(X_{n+1})$, o también:

$$C^* = (C^* \cap V(F)) \cup (C^* \cap H_\infty).$$

Basta ver que $C^* \cap H_\infty \subset V(F)$, pues entonces $C^* \subset V(F)$, lo cual equivale a que $F \in I_K(C^*)$.

Si $C^* \cap H_\infty \not\subset V(F)$, descomponiendo $C^* \cap V(F)$ y $C^* \cap H_\infty$ en sus componentes geométricamente irreducibles, tendríamos que alguna de las componentes de $C^* \cap H_\infty$ no estaría contenida en ninguna de las de $C^* \cap V(F)$ (ni, por supuesto, en las demás componentes de $C^* \cap H_\infty$), luego, al eliminar las componentes redundantes para obtener la descomposición de C^*, permanecería alguna de las de $C^* \cap H_\infty$. En otras palabras, alguna componente geométricamente irreducible V de C^* cumpliría $V \subset H_\infty$, pero entonces $C \subset C^* = \overline{V} \subset H_\infty$, lo cual es absurdo. ∎

Otro hecho básico es que la inclusión $A_n \subset \mathrm{P}^n$ es topológica:

Teorema 2.23 *Si identificamos $A^n = \mathrm{P}^n \setminus H_\infty \subset \mathrm{P}^n$, la topología de Zariski de A^n es la inducida por la de P^n.*

DEMOSTRACIÓN: Si $C \subset A^n$ es cerrado respecto de la topología de Zariski de A^n, esto significa que es un conjunto algebraico afín, y 2.21 2) nos da que $C = C^* \cap A^n$ y C^* es cerrado en P^n, luego C también es cerrado para la topología relativa.

Recíprocamente, un cerrado en A^n para la topología relativa es de la forma $C \cap A^n = C_*$, que es un conjunto algebraico afín, luego es cerrado en A^n respecto de la topología de Zariski. ∎

Respecto a 7) y 8) del teorema 2.21, conviene observar lo siguiente:

Teorema 2.24 *Si $V \subset \mathrm{P}^n$ es una variedad algebraica proyectiva que cumple $H_\infty \subset V \subset \mathrm{P}^n$, entonces necesariamente $V = H_\infty$ o $V = \mathrm{P}^n$.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $I(V) \subset (X_{n+1})$. Si $I(V) \neq 0$, podemos tomar $F \in I(V)$ no nulo, y entonces $F = X_{n+1}^r G$, donde $G \notin (X_{n+1})$ y $r \geq 1$. Como $I(V)$ es primo, necesariamente $X_{n+1} \in I(V)$, luego $I(V) = (X_{n+1})$. ∎

Nota Un error muy frecuente es creer que $(f_1, \ldots, f_n)^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$.

Para ver que esto es falso en general basta considerar $V = V(Y - X^2, Y + X^2)$, que claramente es el punto $(0,0)$, luego su clausura proyectiva es $(0,0,1)$. Sin embargo, $V(YZ - X^2, YZ + X^2) = \{(0,0,1), (0,1,0)\}$. ∎

Ejercicio: Demostrar que si $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, entonces $V(F)^* = V(F^*)$.

La relación fundamental entre los conjuntos algebraicos afines y sus clausuras proyectivas viene dada por el teorema siguiente:

Teorema 2.25 *Las correspondencias $C \mapsto C^*$ y $C \mapsto C_*$ son biyecciones mutuamente inversas entre los subconjuntos algebraicos afines de A^n y los subconjuntos algebraicos proyectivos de P^n que no tienen ninguna componente irreducible contenida en H_∞ (más $\varnothing$). Dichas biyecciones hacen corresponder las variedades, así como las variedades absolutas.*

DEMOSTRACIÓN: Si $C \subset A^n$ es algebraico, podemos descomponerlo en componentes irreducibles $C = V_1 \cup \cdots \cup V_n$, y entonces, por 2.21 6), tenemos que $C^* = V_1^* \cup \cdots \cup V_r^*$ es la descomposición de $C*$ en componentes irreducibles y ninguna de ellas está contenida en H_∞, pues todas contienen a la correspondiente $V_i \subset A^n$ (salvo que $C = \varnothing$).

Así pues, C^* es, en efecto, un conjunto algebraico proyectivo cuyas componentes irreducibles no están contenidas en H_∞ (salvo si $C = \varnothing$). Además, por 2.21 2) sabemos que $(C^*)_* = C$.

Supongamos ahora que $C \subset \mathrm{P}^n$ no tiene componentes irreducibles contenidas en H_∞. Si alguna de ellas contiene a H_∞, por 2.24 es P^n, y entonces $C = \mathrm{P}^n$, luego $(C_*)^* = C$. En otro caso 2.21 8) nos da la misma conclusión.

Esto prueba que las correspondencias $C \mapsto C^*$ y $C \mapsto C_*$ son biyecciones mutuamente inversas. Los conjuntos irreducibles se corresponden con irreducibles por 2.21 5) y 6). Como las correspondencias no dependen de k, esto implica a su vez que los conjuntos geométricamente irreducibles también se corresponden entre sí. ∎

Teorema 2.26 *Sea V una variedad algebraica afín y sea V^* su clausura proyectiva. Entonces la restricción a V determina un k-isomorfismo $k(V^*) \longrightarrow k(V)$. Para cada $P \in V$, el anillo $\mathcal{O}_P(V^*)$ se transforma en $\mathcal{O}_P(V)$.*

Demostración: Fijado un sistema de referencia proyectivo, una función racional f de V^* está determinada por dos formas F y G del mismo grado. Claramente, su restricción a V viene dada (en términos de las coordenadas afines de los puntos de V) por F_*/G_*, luego ciertamente dicha restricción es una función racional sobre V. Es fácil ver que esta aplicación no depende de la elección de F y G. También es claro que se trata de un homomorfismo. Basta ver que es suprayectivo, pero es que si $[F]/[G]$ es cualquier función racional en V y, digamos, $\operatorname{grad} F = \operatorname{grad} G + r$, entonces las formas F^* y $X_{n+1}^r G^*$ determinan una función racional de V^* cuya restricción a V es $[F]/[G]$. Si $\operatorname{grad} F < \operatorname{grad} G$ multiplicamos F^* por la potencia adecuada de X_{n+1}. ∎

Ejemplo Sea V la parábola $X = Y^2$ y sea V^* su clausura proyectiva, determinada por la ecuación $XZ = Y^2$. Sabemos que $k(V^*) \cong k(V) \cong k(x)(\sqrt{x})$. La función racional

$$\alpha = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1},$$

(donde $\sqrt{x} = y$), se corresponde con la función racional

$$\alpha^* = \frac{xy}{yz - z^2}.$$

∎

Notas Observemos que el teorema anterior implica que una variedad afín V cumple las condiciones del teorema 1.41 si y sólo si V^* cumple las condiciones correspondientes del teorema 2.17.

Toda variedad proyectiva V es la clausura proyectiva de V_* (sin más que elegir H_∞ que no contenga a V) y por el teorema anterior $k(V) = k(V^*)$. Además V es geométricamente irreducible si y sólo si lo es V_*, luego ahora es inmediata la versión proyectiva del teorema 1.40: V es geométricamente irreducible si y sólo si la clausura algebraica de k en $k(V)$ es puramente inseparable sobre k. Si k es perfecto, esto equivale a que k sea algebraicamente cerrado en $k(V)$. ∎

En la práctica —cuando no haya confusión— identificaremos cada variedad afín con su clausura proyectiva.

Ejemplo 1 Si decimos que la parábola $Y = X^2 + 1$ tiene un punto en el infinito hay que entender que su clausura proyectiva, dada por $YZ = X^2 + Z^2$, corta a la recta infinita $Z = 0$ en un único punto. Ciertamente, éste es $(0, 1, 0)$.

Si ahora consideramos como recta infinita la recta $Y = 0$, la parte finita de la curva pasa a ser $Z = X^2 + Z^2$, que es una elipse. Como curva en $\mathbb{R}^2$ tiene todos sus puntos finitos, si bien en $\mathbb{C}^2$ corta a la recta del infinito en dos puntos imaginarios. ∎

Ejemplo 2 Más en general, una cónica (no necesariamente irreducible) en P^2 está determinada por una forma cuadrática $F(X, Y, Z) = 0$. Esta ecuación puede expresarse matricialmente como $(X, Y, Z)A(X, Y, Z)^t = 0$, donde A es una matriz simétrica.

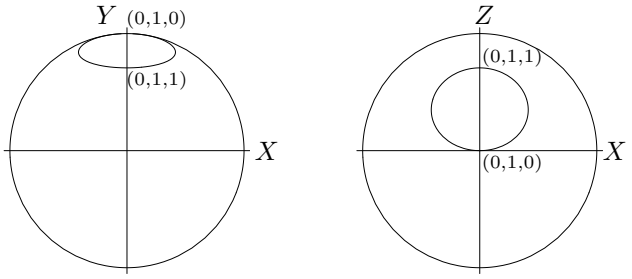
Si k es algebraicamente cerrado de característica distinta de 2, el teorema [Al 8.50] nos da que existe una matriz regular M tal que MAM^t tiene todos sus coeficientes nulos salvo r unos en su diagonal. Así el cambio de coordenadas determinado por M transforma una cónica arbitraria en otra cuya ecuación es una de las siguientes:

$$X^2 = 0, \qquad X^2 + Y^2 = 0, \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

Las dos primeras son claramente reducibles, mientras que la última es irreducible (ha de serlo, pues existen cónicas irreducibles). Así pues, todas las cónicas (irreducibles sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica distinta de 2) admiten en un cierto sistema de referencia la ecuación $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$. ∎

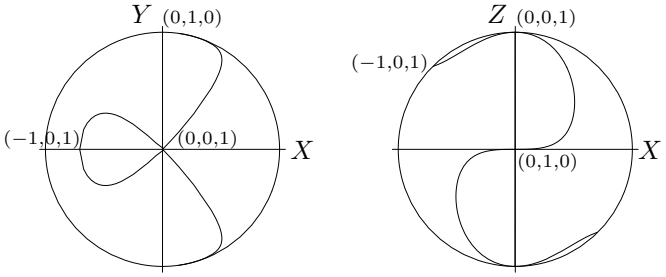
Ejemplo 3 Veamos otra prueba de la irreducibilidad de la curva algebraica afín V dada por $Y^2 = X^3$ (compárese con el ejemplo de la página 18). Tenemos que su clausura proyectiva V^* es $Y^2Z = X^3$ y deshomogeneizando respecto de Y obtenemos el polinomio $Z - X^3$. Como $Z = X^3$ es irreducible (por ser una gráfica), concluimos que su clausura proyectiva también es irreducible, pero ésta es V^*, luego V también es irreducible. ∎

Ejemplo 4 Una forma de visualizar el plano proyectivo completo $\mathrm{P}^2(\mathbb{R})$ es la siguiente: identificamos cada punto con la terna de coordenadas homogéneas $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ de norma euclídea 1 y $Z \geq 0$. Esto nos da un único punto de la semiesfera unidad, excepto para los puntos infinitos (con $Z = 0$) para los que tenemos dos posibilidades (dos puntos antípodas en el ecuador de la esfera). Después podemos proyectar ortogonalmente esta terna sobre el plano XY, con lo que tenemos una correspondencia entre el plano proyectivo y el círculo unidad, biyectiva salvo por que cada punto infinito se corresponde con dos puntos opuestos de la circunferencia unidad.



Por ejemplo, las dos figuras precedentes muestran la curva $Y = X^2 + 1$, de modo que se ve claramente que la diferencia entre una parábola y una elipse es simplemente una cuestión de punto de vista (proyectivo). La parábola corresponde al punto de vista de la izquierda, donde uno de los puntos está en la circunferencia unidad, mientras que la elipse corresponde al punto de vista de la derecha.

Las figuras siguientes muestran dos vistas de la curva "alfa" $Y^2 = X^2(X+1)$ (véase la figura de la página 7).



Su clausura proyectiva es $Y^2Z = X^2(X + Z)$. Las dos ramas infinitas de la "alfa" se unen en el punto infinito $(0, 1, 0)$, que se vuelve finito si tomamos como recta infinita $Y = 0$. La parte finita es entonces la curva $Z = X^3 + ZX^2$, que también puede verse como la gráfica de la función

$$Z = \frac{X^3}{1 - X^2}.$$

Ahora hay dos puntos infinitos, que son el $(0, 0, 1)$ y el $(-1, 0, 1)$ (que se corresponden con las asíntotas de la función anterior). ∎

Ejemplo: Variedades lineales En la geometría proyectiva se definen las variedades proyectivas como los subconjuntos de P^n de la forma $V = \mathrm{P}^n(W)$, donde W es un subespacio vectorial de K^{n+1}. Es claro que esto equivale a que $\mathrm{Cn}(V) = W$, y todo subespacio vectorial de K^{n+1} es una variedad lineal afín, luego las variedades proyectivas en este sentido lo son también en el sentido de la geometría algebraica.

Más precisamente, los subespacios vectoriales de K^{n+1} son las variedades algebraicas afines definibles mediante un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, luego tenemos que las variedades proyectivas (en el sentido de la geometría proyectiva) son las variedades proyectivas (en el sentido general de la geometría algebraica) definibles mediante un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Por esta razón, en el contexto de la geometría algebraica, las llamaremos *variedades lineales proyectivas.*

Es fácil ver que una variedad $V = \mathrm{P}^n(W)$ está definida sobre k si y sólo si el subespacio W admite una base en k^{n+1}. También se comprueba sin dificultad que las variedades lineales proyectivas son las clausuras proyectivas de las variedades lineales afines (eligiendo un hiperplano infinito en el que no estén contenidas). ∎

Terminamos probando la versión proyectiva del teorema 1.21:

Teorema 2.27 *El conjunto de las singularidades de una función racional en una variedad proyectiva es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea V una variedad proyectiva y $\alpha \in k(V)$. Vamos a probar que el conjunto de puntos en los que α es regular es abierto. Para ello tomamos un punto $P \in V$ donde α es regular y elegimos un hiperplano H_∞ que no contenga a P. Entonces $P \in V_* = V \cap A^n$ y, por el teorema 2.26, tenemos que $\alpha|_{V_*} \in k(V_*)$ está definida en P. Por 1.21, el conjunto U de los puntos donde $\alpha|_{V_*}$ es regular es un entorno abierto de P en C_*, pero, como A^n es abierto en P^n, tenemos que C_* es abierto en C, luego U también es abierto en C y α es regular en todos los puntos de U. ∎

2.3 Variedades cuasiproyectivas

La teoría que hemos desarrollado sobre variedades proyectivas presenta lagunas sustanciales, pues, por ejemplo, ni siquiera hemos definido el concepto de isomorfismo entre variedades. La razón es que ahora vamos a introducir los conjuntos algebraicos cuasiproyectivos, que generalizan tanto a los conjuntos algebraicos proyectivos como a los afines, y es más práctico desarrollar la teoría en este contexto más general.

Definición 2.28 Un *conjunto algebraico cuasiproyectivo* (definido sobre k) es un abierto en un conjunto algebraico proyectivo (sobre k) respecto de la topología de Zariski (relativa a k). Una *variedad algebraica cuasiproyectiva* es un conjunto algebraico cuasiproyectivo irreducible.

Si C es un conjunto algebraico cuasiproyectivo, existe un conjunto algebraico proyectivo $D \subset \mathrm{P}^n$ tal que $C \subset D$ es abierto, pero, como D es cerrado en P^n, tenemos que $\overline{C} \subset D$ y, como C es abierto en D, también lo es en $\overline{C}$. Así, un ejemplo concreto de conjunto algebraico proyectivo en el que C es abierto es $\overline{C}$.

Obviamente, los conjuntos algebraicos proyectivos son también cuasiproyectivos (pues son abiertos en sí mismos), y también los conjuntos algebraicos afines, pues si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico afín, tenemos que $C = C^* \cap A^n$, donde $A^n = \mathrm{P}^n \setminus H_\infty$ es abierto en P^n y así la clausura proyectiva C^* es un conjunto algebraico proyectivo en el cual C es abierto.

Nota Como los conjuntos algebraicos cuasiproyectivos son los más generales que vamos a considerar, cuando hablemos de conjuntos algebraicos o variedades en general se entenderá que son cuasiproyectivos, salvo que especifiquemos que son afines o proyectivos. ∎

Observemos ahora que las variedades son los abiertos en las variedades proyectivas, pues si C es irreducible, entonces $\overline{C}$ también lo es por 1.15 y, según hemos visto, C es abierto en $\overline{C}$. Recíprocamente, si $C \neq \varnothing$ es abierto en D y D es un conjunto algebraico proyectivo irreducible, entonces C es denso en D (por 1.14) y D es cerrado, luego $\overline{C} = D$ y, por lo tanto, C es irreducible.

Más precisamente, acabamos de ver que si $C \neq \varnothing$ es una variedad, entonces $\overline{C}$ es la única variedad proyectiva en la cual C es abierto.

Obviamente, todo abierto en un conjunto algebraico (resp. variedad) es un conjunto algebraico (resp. variedad).

Observemos ahora que si C es un conjunto algebraico, los cerrados en C se corresponden biunívocamente con los cerrados en $\overline{C}$ mediante las correspondencias mutuamente inversas $A \mapsto \overline{A}$, $A \mapsto A \cap C$. Estas correspondencias conservan las inclusiones, luego, el hecho de que $\overline{C}$ sea un espacio topológico noetheriano hace que C también lo sea.

En particular, todo conjunto algebraico se descompone en forma única como unión finita de sus componentes irreducibles.

Más precisamente, si la descomposición es $C = C_1 \cup \cdots \cup C_r$, entonces $\overline{C} = \overline{C}_1 \cup \cdots \cup \overline{C}_r$ es la descomposición de $\overline{C}$ en componentes irreducibles. Equivalentemente, las componentes irreducibles de C son las de la forma $D \cap C$, donde D es una componente irreducible de $\overline{C}$.

Diremos que un conjunto algebraico (sobre k) es *geométricamente irreducible* o *absolutamente irreducible* o una *variedad absoluta* si es irreducible sobre $\overline{k}$).

Ahora es evidente que un conjunto algebraico C es geométricamente irreducible si y sólo si lo es $\overline{C}$, lo cual equivale a su vez a que C sea irreducible sobre cualquier extensión de k.

El hecho de que los anillos de polinomios son noetherianos (el teorema de Hilbert) se traduce en que los conjuntos algebraicos satisfacen la propiedad de compacidad (pero no son espacios de Hausdorff):

Teorema 2.29 *Todo cubrimiento por abiertos de un conjunto algebraico admite un subcubrimiento finito.*

Demostración: Equivalentemente, hemos de probar que si una familia $\{C_i\}_{i\in I}$ de cerrados en un conjunto algebraico $C \subset \mathrm{P}^n$ tiene intersección vacía, entonces una subfamilia finita tiene también intersección vacía. Más en general, probaremos que existe un conjunto finito $I_0 \subset I$ tal que

$$\bigcap_{i\in I} C_i = \bigcap_{i\in I_0} C_i.$$

Para ello basta probar que

$$\bigcap_{i\in I} \overline{C}_i = \bigcap_{i\in I_0} \overline{C}_i,$$

donde las clausuras se toman en P^n, pues, si se cumple esto, tomando la intersección con C llegamos a la igualdad correspondiente en C. Equivalentemente, cambiando C por $\overline{C}$ podemos suponer que C es proyectivo.

Sea $I_i = I(C_i)$ y sea I el ideal de $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ generado por la unión de los I_i. Por el teorema de Hilbert I es un ideal finitamente generado, digamos

$I = (F_1, \dots, F_r)$, y las formas F_j pueden obtenerse como suma de múltiplos de un número finito de formas de un número finito de ideales I_i, digamos con $i \in I_0$. Así, si $P \in \bigcap_{i\in I_0} C_i$ tenemos que $F_j(P) = 0$, para $j = 1, \dots, r$. Si $F \in I_i \subset I$, entonces F se expresa como suma de múltiplos de las formas F_j, luego $F(P) = 0$, luego $P \in V(I_i) = C_i$. Así $P \in \bigcap_{i\in I} C_i$. ∎

Funciones racionales El teorema 2.26 nos permite identificar las funciones racionales de un conjunto algebraico afín irreducible con las de su clausura proyectiva. Generalizaremos este hecho definiendo las funciones racionales de un conjunto algebraico irreducible arbitrario como las de su clausura:

Definición 2.30 Si V es un conjunto algebraico irreducible, definimos el cuerpo de las *funciones racionales* en V como $k(V) = k(\overline{V})$. Para cada punto $P \in V$ definimos el anillo local $\mathcal{O}_P(V) = \mathcal{O}_P(\overline{V})$. El anillo de las *funciones regulares* en V es

$$k[V] = \bigcap_{P\in V} \mathcal{O}_P(V).$$

Si V es un conjunto algebraico irreducible afín o proyectivo, estos conceptos coinciden con los que ya teníamos definidos.

En realidad, para que estas definiciones resulten razonables, es necesario justificar que podemos considerar a los elementos de $k(V)$ como funciones sobre abiertos de V (en principio, según 2.27, son funciones en abiertos de $\overline{V}$). Ahora bien, como V es abierto en $\overline{V}$, el teorema siguiente es consecuencia inmediata de 2.12:

Teorema 2.31 *Si V es una variedad y $\alpha \in k(V)$ se anula en un abierto no vacío de V, entonces $\alpha = 0$.*

Por lo tanto, si $\alpha, \beta \in k(V)$ cumplen que $\alpha|_V = \beta|_V$ (entendiendo que $\alpha|_V$ es la restricción de α a los puntos de su dominio que están en V), de hecho se cumple $\alpha = \beta$, luego podemos identificar los elementos de $k(V)$ con funciones definidas en abiertos de V, y tenemos que la restricción $k(\overline{V}) \longrightarrow k(V)$ es un k-isomorfismo de cuerpos.

Así, si V es una variedad, cada función racional de V es regular en un abierto $U \subset V$, de modo que $k(V)$ es la unión de los anillos $k[U]$, donde U recorre los abiertos de V. Similarmente, si $P \in V$, el anillo $\mathcal{O}_P(V)$ es la unión de los anillos $k[U]$, donde U varía en los entornos abiertos de P.

Aplicaciones regulares Nos ocupamos ahora de las aplicaciones entre variedades. Debido a que la topología de Zariski no es de Hausdorff, las aplicaciones continuas no tienen un comportamiento muy satisfactorio. Sin embargo, si a la continuidad le añadimos un requisito más, obtenemos el concepto de aplicación regular, y veremos que las aplicaciones regulares entre variedades se comportan como las aplicaciones continuas entre espacios de Hausdorff.

Definición 2.32 Una aplicación $\phi : V \longrightarrow W$ entre dos variedades es *regular* si es continua y para todo abierto U de W tal que $\phi[V] \cap U \neq \varnothing$ y toda función $\alpha \in k[U]$, se cumple que $\overline{\phi}(\alpha) = \phi \circ \alpha \in k[\phi^{-1}[U]]$. La aplicación ϕ es un *isomorfismo* si es biyectiva y tanto ϕ como ϕ^{-1} son regulares.

Notemos que una definición alternativa es la siguiente: ϕ es regular si es continua y para todo $P \in V$ y toda $\alpha \in \mathcal{O}_{\phi(P)}(W)$ se cumple que $\overline{\phi}(\alpha) \in \mathcal{O}_P(V)$.

En tal caso, $\overline{\phi} : \mathcal{O}_{\phi(P)}(W) \longrightarrow \mathcal{O}_P(V)$ es un homomorfismo de anillos.

Nota Si $\phi : V \longrightarrow W$ es regular en el sentido de la definición anterior y consideramos $k \subset k' \subset K$, de modo que V y W sean también variedades sobre k', no es inmediato que ϕ sea también regular respecto de k', pues lo único que exige la definición es que sea continua para la topología de Zariski relativa a k, que es menos fina que la relativa a k', y que transforma funciones de $\mathcal{O}_{\phi(P)}(W)$ en $\mathcal{O}_P(V)$, entendiendo que estos anillos están formados por funciones definidas sobre k, pero esto no garantiza que suceda lo mismo con las funciones definidas sobre k'. Así pues, habría que distinguir entre aplicaciones k-regulares y k'-regulares. Es fácil ver que toda aplicación k'-regular es regular, pero más adelante demostraremos que el recíproco también es cierto (teorema 2.40). ∎

Es fácil ver que la composición de aplicaciones regulares es regular, así como que la regularidad es una propiedad local, es decir, que una aplicación es regular si y sólo si lo es su restricción a un entorno abierto de cada punto.

Toda aplicación regular $\phi : V \longrightarrow W$ induce un k-homomorfismo de anillos $\overline{\phi} : k[W] \longrightarrow k[V]$. Si ϕ es un isomorfismo entonces $\overline{\phi}$ también lo es. Ahora probamos que la regularidad generaliza la noción de aplicación polinómica. En particular, dos variedades afines son isomorfas en el sentido de la definición 1.8 si y sólo si lo son en el sentido de la definición precedente.

Teorema 2.33 *Si V y W son variedades afines, una aplicación $\phi : V \longrightarrow W$ es regular si y sólo si es polinómica.*

Demostración: Si ϕ es polinómica, fijados dos sistemas de referencia, $\phi(P) = (F_1(P), \ldots, F_n(P))$, para ciertos polinomios F_i. Si $C \subset W$ es un subconjunto algebraico de W, entonces $P \in \phi^{-1}[C]$ si y sólo si $\phi(P) \in C$, si y sólo si $F(\phi(P)) = 0$, para toda $F \in I(C)$. Las funciones $\phi \circ F$ son polinomios, y C es el conjunto de ceros de todos ellos. Por lo tanto C es algebraico. Esto prueba la continuidad de ϕ.

Si U es abierto en W y $\alpha \in k[U]$, entonces α es una función racional definida en todos los puntos de U. Digamos que $\alpha = [F]/[G]$, donde F, G son polinomios. Sea $\overline{\alpha} = [\phi \circ F]/[\phi \circ G] \in k(V)$. Vamos a ver que $\overline{\alpha}$ está definida en $\phi^{-1}[U]$ y que sobre sus puntos $\overline{\alpha} = \phi \circ \alpha$. Esto probará que $\overline{\phi}(\alpha) = \overline{\alpha}$.

En efecto, si $P \in \phi^{-1}[U]$, entonces α está definida en $\phi(P)$, luego podemos expresar $\alpha = [F']/[G']$, con $G'(\phi(P)) \neq 0$. Así, $FG' - GF' \in I(W)$, luego $(\phi \circ F)(\phi \circ G') - (\phi \circ G)(\phi \circ F') \in I(V)$, y por consiguiente $\overline{\alpha} = [\phi \circ F']/[\phi \circ G']$ está definida en P y $\overline{\alpha}(P) = \alpha(\phi(P))$.

Sea ahora $\phi : V \longrightarrow W$ una función regular. Por el teorema 1.10, existe una función polinómica $\psi : V \longrightarrow W$ tal que $\bar{\phi} = \overline{\psi}$.

Veamos ahora que toda aplicación regular ϕ induce también un K-homomorfismo de anillos $\bar{\phi}_K : K[W] \longrightarrow K[V]$ dado por $\bar{\phi}_K(f) = \phi \circ f$, que obviamente extiende a $\bar{\phi}$.

En efecto, fijamos una k-base $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ de K. Si $f \in K[W]$, tenemos que $f = [F]$, para cierto polinomio $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$, que podemos expresar en la forma $F = \sum_{i\in I_0} \alpha_i F_i$, con $F_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$.

Como $f_i = [F_i] \in k[W]$, sabemos que $\bar{\phi}(f_i) = \phi \circ f_i = [G_i]$, para ciertos polinomios $G_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$. Por consiguiente,

$$(\phi \circ f)(P) = \sum_{i\in I_0} \alpha_i F_i(\phi(P)) = \sum_{i\in I_0} \alpha_i G_i(P) = G(P) = g(P),$$

donde $G = \sum_{i\in I_0} \alpha_i G_i \in K[X_1, \ldots, X_m]$ y $g = [G] \in K[V]$.

Así pues, $\phi \circ f = g \in K[V]$ y $\bar{\phi}_K$ está bien definido. Más aún, como todo elemento de $k[W]$ es de la forma $f = \sum_{i\in I_0} \alpha_i f_i$, se cumple que

$$\bar{\phi}_K(f) = \sum_{i\in I_0} \alpha_i \bar{\phi}(f_i)$$

está determinado por $\bar{\phi}$. Lo mismo vale para ψ, luego la igualdad $\bar{\phi} = \bar{\psi}$ implica que $\bar{\phi}_K = \bar{\psi}_K$.

A continuación observamos que $\bar{\phi}_K$ determina a ϕ, pues si $P \in V$, podemos considerar los ideales $I_V(P) \subset K[V]$, $I_W(\phi(P)) \subset K[W]$, y la relación entre ellos es que $\bar{\phi}_K^{-1}[I_V(P)] = I_W(\phi(P))$, pues

$$f \in \bar{\phi}_K^{-1}[I_V(P)] \leftrightarrow \bar{\phi}_K(f) \in I_V(P) \leftrightarrow f(\phi(P)) = 0 \leftrightarrow f \in I_W(\phi(P)).$$

Por consiguiente $\{\phi(P)\} = V(\bar{\phi}_K^{-1}[I_V(P)])$.

Esto también vale para ψ, luego la igualdad $\bar{\phi}_K = \bar{\psi}_K$ implica que $\phi = \psi$, luego ϕ es polinómica. ∎

Ejemplo 1 Si W es un subespacio vectorial de K^{n+1} de dimensión $d+1$, en la geometría proyectiva se dice que la variedad proyectiva $V = \mathrm{P}^n(W) \subset \mathrm{P}^n$ tiene dimensión d. Vamos a probar que si V está definida sobre k, entonces V es isomorfa (sobre k) a P^d.

En efecto, podemos extender la base de W a una k-base de k^{n+1} (que será también una K-base de K^{n+1}. Esta base determina un sistema de referencia de P^n respecto al cual $V = V(X_{d+1}, \ldots, X_{n+1})$.

La aplicación $\phi : \mathrm{P}^d \longrightarrow V$ dada por $\phi(x_1, \ldots, x_{d+1}) = (x_1, \ldots x_{d+1}, 0, \ldots, 0)$ es un isomorfismo, pues si $P \in \mathrm{P}^d$, podemos tomar un índice i tal que $x_i(P) \neq 0$, con lo que la restricción de ϕ a los espacios afines determinados en P^d y P^n por el hiperplano $X_i = 0$ es claramente un isomorfismo entre las variedades afines A^d y $V \cap A^n$ (es una aplicación polinómica con inversa polinómica). Esto prueba que ϕ y ϕ^{-1} son ambas regulares. ∎

Ejemplo 2 Sea A una matriz regular de dimensión $n+1$ con coeficientes en k y —fijado un sistema de referencia— sea $\phi : \mathrm{P}^n \longrightarrow \mathrm{P}^n$ la aplicación dada por $\phi(X) = XA$. Claramente ϕ está bien definida (no depende de la elección de coordenadas homogéneas y nunca da el vector nulo) y se cumple que es regular.

En efecto, si $C \subset \mathrm{P}^n$ es un conjunto algebraico, tenemos que

$$X \in \phi^{-1}[C] \leftrightarrow XA \in C \leftrightarrow F(XA) = 0,$$

para toda forma $F \in I(C)$. Así pues, $\phi^{-1}[C]$ es el conjunto algebraico determinado por las formas $F(XA)$, donde $F \in I(C)$. Esto prueba que ϕ es continua. Similarmente, si $P \in \mathrm{P}^n$ tiene coordenadas a, una función $\alpha \in \mathcal{O}_{\phi(P)}(\mathrm{P}^n)$ es de la forma $\alpha = F(X)/G(X)$, donde F y G son formas del mismo grado y $G(aA) \neq 0$, y $\bar{\phi}(\alpha) = F(XA)/G(XA)$ también es un cociente de formas del mismo grado y el denominador no se anula en a. Por consiguiente $\bar{\phi}(\alpha) \in \mathcal{O}_P(\mathrm{P}^n)$.

Las aplicaciones ϕ de este tipo se llaman *transformaciones proyectivas* de P^n. Es claro que son biyectivas, y que la inversa de una transformación proyectiva es de nuevo una transformación proyectiva. Por lo tanto las transformaciones proyectivas son isomorfismos de P^n en sí mismo. De hecho, forman un grupo con la composición.

Se dice que dos variedades de P^n son *proyectivamente equivalentes* si una es la imagen de la otra por una transformación proyectiva. En particular esto implica que son isomorfas. Es fácil ver que dos variedades son proyectivamente equivalentes si y sólo si pueden definirse con las mismas ecuaciones respecto de dos sistemas de referencia.

Por ejemplo, en la página 53 hemos visto que todas las cónicas (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica distinta de 2) son proyectivamente equivalentes, y en particular isomorfas. ∎

Si V es una variedad, hemos llamado a $k[V]$ el anillo de las funciones regulares en V. Este nombre es consistente con la definición general que hemos dado de función regular. En efecto:

Teorema 2.34 *Si V es una variedad, entonces el anillo $k[V]$ está formado por todas las funciones regulares $\alpha : V \longrightarrow A^1$.*

Demostración: Si α es regular, como la identidad $I : A^1 \longrightarrow A^1$ cumple $I \in k[A^1]$, la definición de función regular nos da que $\alpha = \alpha \circ I \in k[V]$.

Recíprocamente, si $\alpha \in k[V]$, basta probar la regularidad de su restricción a un entorno de cada punto $P \in V$. Dado P, tenemos que $\alpha = [F]/[G]$, donde F y G son formas del mismo grado con $G(P) \neq 0$. Sea

$$U = \{Q \in V \mid G(Q) \neq 0\}.$$

Basta probar que α es regular en U. Para puntos $Q \in U$, tenemos que $\alpha(Q) = F(Q)/G(Q)$. La continuidad de α es clara, pues es fácil ver que los

únicos cerrados no vacíos en A^1 distintos de todo A^1 son los conjuntos finitos, con lo que basta ver que si $a \in A^1$ entonces $\alpha^{-1}[a]$ es cerrado, pero

$$\alpha^{-1}[a] = \{Q \in U \mid F(Q) - aG(Q) = 0\}.$$

Por otra parte, si $\alpha(Q) = a$ y $\beta \in \mathcal{O}_a(A^1)$, entonces $\beta = F'/G'$, donde F' y G' son polinomios tales que $G'(a) \neq 0$. La composición $\alpha \circ \beta$ es claramente una función racional cuyo denominador no se anula en Q, luego $\alpha \circ \beta \in \mathcal{O}_Q(U)$. ∎

Las aplicaciones regulares conservan los puntos racionales:

Teorema 2.35 *Si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación regular y $P \in V(k)$, entonces $\phi(P) \in W(k)$.*

Demostración: Podemos suponer que $x_{n+1}(\phi(P)) \neq 0$. Consideremos el abierto $U = \{Q \in W \mid x_{n+1}(Q) \neq 0\} \subset W$. Entonces $P \in \phi^{-1}[U]$ y $x_i/x_{n+1} \in k[U]$, luego $\overline{\phi}(x_i/x_{n+1}) \in k(\phi^{-1}[U])$. Por consiguiente

$$x_i(\phi(P))/x_{n+1}(\phi(P)) = \overline{\phi}(x_i/x_{n+1})(P) \in k,$$

porque $P \in C(k)$. De aquí se sigue que si tomamos un vector de coordenadas homogéneas para $\phi(P)$ cuya última coordenada valga 1, todas las demás estarán en k. ∎

Veamos una última propiedad adicional de interés:

Teorema 2.36 *Las inclusiones entre variedades son aplicaciones regulares. Una aplicación $\phi : V \longrightarrow W$ con $W \subset \mathrm{P}^n$ es regular si y sólo si lo es como aplicación $\phi : V \longrightarrow \mathrm{P}^n$.*

Demostración: Sea $i : V \longrightarrow W$ una aplicación de inclusión. Obviamente es continua. Tomemos $\alpha \in \mathcal{O}_P(W)$. Hemos de probar que $\alpha|_V \in \mathcal{O}_P(V)$, pero $\alpha = [F]/[G]$, donde F y G son formas del mismo grado y $G(P) \neq 0$. La restricción a V admite esta misma representación considerando las clases módulo $I(V)$ en lugar de módulo $I(W)$, lo cual prueba que $\alpha|_V \in \mathcal{O}_P(V)$.

Respecto a la segunda afirmación, si ϕ es regular como aplicación en W, lo es como aplicación en P^n porque la inclusión $W \longrightarrow \mathrm{P}^n$ es regular. Supongamos ahora que ϕ es regular como aplicación en P^n. Entonces es continua, y también lo es como aplicación en W. Sea $P \in V$ y tomemos $\alpha \in \mathcal{O}_{\phi(P)}(W)$. Entonces $\alpha = [F]/[G]$ es un cociente de dos clases de formas módulo $I(W)$. Dichas formas determinan una función racional $\beta \in \mathcal{O}_{\phi(P)}(\mathrm{P}^n)$ que coincide con α en un entorno de $\phi(P)$ en W (donde $G \neq 0$). Por consiguiente $\phi \circ \alpha$ coincide con $\phi \circ \beta$ en un entorno de P en V. Por hipótesis $\phi \circ \beta \in \mathcal{O}_P(V)$, luego lo mismo vale para $\overline{\phi}(\alpha) = \phi \circ \alpha$. Esto prueba que ϕ es regular como aplicación en W. ∎

Variedades afines generalizadas En este punto introducimos una generalización crucial del concepto de variedad afín:

Definición 2.37 Llamaremos *variedades afines* (sobre k) a las variedades (cuasiproyectivas) isomorfas (sobre k) a variedades afines (sobre k).

Así, cuando digamos que $V \subset A^n$ es una variedad afín deberá entenderse que es una variedad afín en el sentido usual (una variedad cerrada en A^n), mientras que si hablamos de una variedad afín V se entenderá en este sentido general. El interés de este concepto se debe a que, como veremos enseguida, los abiertos afines en una variedad forman una base de la misma. Así, los isomorfismos entre abiertos afines y variedades afines (cerradas en A^n) representarán un papel análogo a las cartas en la geometría diferencial.

Si V es una variedad afín, llamaremos *abiertos principales* de V a los conjuntos $V_\alpha = \{P \in V \mid \alpha(P) \neq 0\}$, donde $\alpha \in k[V]$ es una función regular no nula.

A continuación vemos que los abiertos principales son realmente abiertos:

Teorema 2.38 *Sea V una variedad afín y $\alpha \in k[V]$, $\alpha \neq 0$. Entonces el abierto principal V_α es una variedad abierta en V. Se cumple que*

$$k[V_\alpha] = k[V][1/\alpha] = \{\beta/\alpha^n \mid \beta \in k[V],\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Además V_α es una variedad afín.

Demostración: No perdemos generalidad si suponemos que $V \subset A^n$. Así podemos representar $\alpha = [F]$, para cierto $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ y $V_\alpha = V \setminus V(F)$ es abierto en V. En particular V_α es una variedad.

En principio, $k[V_\alpha] \subset k(\overline{V}_\alpha) = k(\overline{V})$, pero por 2.26 podemos identificar a $k[V_\alpha]$ con el anillo de las restricciones a V de sus elementos, de modo que $k[V_\alpha] \subset k(V)$.

Tomemos $\gamma \in k[V_\alpha]$. En la demostración del teorema 1.21 hemos visto que el conjunto de las singularidades de γ es $V(I_\gamma)$, donde

$$I_\gamma = \{G \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid [G]\gamma \in k[V]\}.$$

Como γ está definida en los puntos donde F no se anula, $V(I_\gamma) \subset V(F)$, luego $I(V(F)) \subset \operatorname{Rad} I_\gamma$. Por consiguiente $F^N \in I_\gamma$, para cierto N, es decir, $\alpha^N\gamma = \beta \in k[V]$. Esto prueba la inclusión $k[V_\alpha] \subset k[V][1/\alpha]$. La otra es obvia.

Falta probar que V_α es isomorfa a una variedad afín. Para ello consideramos el ideal I' de $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ generado por $I(V)$ y por el polinomio $X_{n+1}F - 1$. Definimos $\psi : k[X_1, \ldots, X_{n+1}] \longrightarrow k[V_\alpha]$ mediante $\psi(X_i) = [X_i]$ para $i \leq n$ y $\psi(X_{n+1}) = 1/\alpha$. Según lo que acabamos de probar, ψ es un epimorfismo de anillos. Es claro que su núcleo contiene a I', luego induce un epimorfismo $\overline{\psi} : k[X_1, \ldots, X_{n+1}]/I' \longrightarrow k[V_\alpha]$.

Llamemos A al subanillo del cociente formado por las clases con un representante en $k[X_1,\dots,X_n]$. Entonces $\bar{\psi}$ se restringe a un isomorfismo $A \longrightarrow k[V]$. Sólo hay que comprobar la inyectividad: si $\bar{\psi}([G]) = 0$, entonces $G \in I(V_\alpha)$, luego $GF \in I(V)$, pero $F \notin I(V)$ (porque $\alpha = [F] \neq 0$), luego $G \in I(V) \subset I'$ y así $[G] = 0$.

El dominio de $\overline{\psi}$ es la adjunción a A de la clase $[X_{n+1}]$, la imagen es $k[V][1/\alpha]$ y $\overline{\psi}([X_{n+1}]) = 1/\alpha$. Es fácil ver entonces que $\overline{\psi}$ es un isomorfismo.

En particular I' es un ideal primo. Llamamos $V' = V(I') \subset A^{n+1}$, que es una variedad afín.

Ahora observamos que $\overline{\psi} : k[V'] \longrightarrow k[V_\alpha]$. La proyección $A^{n+1} \longrightarrow A^n$ en las n primeras componentes es claramente una aplicación regular, que se restringe a una aplicación regular $\phi : V' \longrightarrow V_\alpha$. Esta aplicación es biyectiva pues, si $P \in V_\alpha$, su única antiimagen se obtiene completando sus coordenadas con $1/F(P)$. Falta probar que ϕ^{-1} es regular.

Para ello consideramos $V' \subset \mathrm{P}^{n+1}$. Según hemos visto,

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(a_1,\dots,a_n) &= (a_1,\dots,a_n,F^{-1}(a_1,\dots,a_n),1)\\ &= (a_1F(a_1,\dots,a_n),\dots,a_nF(a_1,\dots,a_n),1,F(a_1,\dots,a_n)).\end{aligned}$$

Ahora consideramos a V' contenido en el espacio afín dado por $X_n \neq 0$, con lo que la expresión para ϕ^{-1} es

$$\phi^{-1}(a_1,\dots,a_n) = (a_1F(a_1,\dots,a_n),\dots,a_nF(a_1,\dots,a_n),F(a_1,\dots,a_n)).$$

Vemos que es una aplicación polinómica, luego es regular. ∎

Nota En las condiciones del teorema anterior, supongamos que $V \subset A^n$ es afín (sobre k) en sentido estricto, y que $k \subset k' \subset K$ es un cuerpo intermedio sobre el que V siga siendo irreducible. Como V_α también es abierto en V respecto de la topología de Zariski relativa a k', también es irreducible sobre k'.

Vamos a probar que la variedad V' que hemos construido también es irreducible sobre k' y que el isomorfismo $\phi : V' \longrightarrow V_\alpha$ es también un isomorfismo respecto de k'.

Para ello consideramos el ideal $I'_{k'}$ de $k'[X_1,\dots,X_{n+1}]$ generado por $I_{k'}(V)$ y por $X_{n+1}F-1$, que también resulta ser un ideal primo, por el mismo argumento.

Ahora bien, se cumple que $V' = V(I')$ coincide con $V(I'_{k'})$, pues los polinomios de $I_{k'}(V)$ se anulan en los mismos puntos que los de $I(V)$ (en los de V en ambos casos), luego

$$V(I') = V(I(V) \cup \{X_{n+1}F - 1\}) = V(I_{\bar{k}}(V) \cup \{X_{n+1}F - 1\}) = V(I'_{k'}).$$

Esto prueba que V' es también una variedad afín sobre k'. Además, la aplicación $\phi : V \longrightarrow V_\alpha$ es también regular sobre k', pues no es sino la restricción de la proyección $A^{n+1} \longrightarrow A^n$, que es regular sobre cualquier cuerpo. Similarmente, ϕ^{-1} es la restricción de una aplicación polinómica sobre k, pero toda aplicación polinómica sobre k lo es también sobre k', luego ϕ^{-1} también es regular sobre k'. ∎

Ahora ya podemos probar lo que habíamos anunciado:

Teorema 2.39 *En una variedad, los abiertos afines forman una base.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $V \subset \mathrm{P}^n$ una variedad, $P \in V$ y U un entorno (abierto) de P. Tenemos que probar que existe un abierto afín U' tal que $P \subset U' \subset U$. Como V es abierto en $\overline{V}$, se cumple que U es abierto en $\overline{V}$, luego, cambiando V por $\overline{V}$, no perdemos generalidad si suponemos que V es proyectiva.

Sea A^n un espacio afín que contenga a P. Entonces $P \in U \cap A^n$, que es abierto en $V \cap A^n$, luego, cambiando V por $V \cap A^n$, no perdemos generalidad si suponemos que $V \subset A^n$ es afín.

Como $P \notin V \setminus U$, y éste es un subconjunto algebraico de A^n, existe un polinomio $F \in I(V \setminus U)$ tal que $F(P) \neq 0$. Sea $\alpha = [F] \in k[V]$. Entonces $P \in V_\alpha \subset U$ y, por el teorema anterior, V_α cumple lo pedido. ∎

Notemos que, en particular, hemos probado que, en toda variedad afín, los abiertos principales son una base (en principio, en toda variedad afín cerrada en A^n, pero, como los isomorfismos transforman claramente abiertos principales en abiertos principales, lo mismo vale para toda variedad afín en el sentido general).

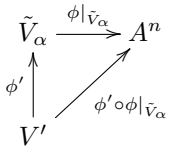
Y como aplicación probamos lo anunciado en la nota tras la definición 2.32:

Teorema 2.40 *Si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación regular entre variedades definidas sobre k, también es regular como aplicación entre variedades definidas sobre cualquier cuerpo intermedio $k \subset k' \subset K$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que ϕ se restringe a una aplicación k'-regular en un entorno de cada punto $P \in V$. Por 2.36 no perdemos generalidad si suponemos que $W = \mathrm{P}^m$. Elegimos un sistema de referencia en P^m de modo que $\phi(P) \in A^m$.

Si $V \subset \mathrm{P}^n$ y elegimos un sistema de referencia de modo que $P \in A^n$, tenemos que $\tilde{V} = \overline{V} \cap A^n \subset A^n$ es una variedad afín y ϕ está definida (y es k-regular) en $\tilde{V} \cap V \cap \phi^{-1}[A^m]$, que es un entorno de P en $\tilde{V}$ (porque V es abierto en $\bar{V}$). Por la prueba del teorema anterior, existe $\alpha \in k[\tilde{V}]$ tal que ϕ está definida en $\tilde{V}_\alpha$ y $\phi|_{\tilde{V}_\alpha} : \tilde{V}_\alpha \longrightarrow A^n$ es k-regular.

Como V es abierto en $\overline{V}$, tenemos que $\overline{V}$ es irreducible sobre k', y como $\tilde{V}$ es abierto en $\overline{V}$, lo mismo vale para $\tilde{V}$. Ahora aplicamos a $\tilde{V}$ la nota posterior al teorema 2.38, en virtud de la cual $\tilde{V}_\alpha$ es irreducible sobre k' y tenemos un isomorfismo $\phi' : V' \longrightarrow \tilde{V}_\alpha$ sobre k, y también sobre k'. Así llegamos al diagrama conmutativo siguiente:



Ahora bien, la composición es una aplicación k-regular entre variedades afines, luego es una aplicación polinómica (definida sobre k), luego también es

polinómica como aplicación entre variedades definidas sobre k', luego también es regular como aplicación entre variedades definidas sobre k'. A su vez, esto nos da que $\phi|_{\tilde{V}_\alpha}$ es composición de dos aplicaciones regulares sobre k', luego es regular sobre k'. ∎

Veamos otra aplicación. Si V es una variedad afín y $\alpha \in k(V)$, por definición, $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$ si $\alpha = f/g$, con $f, g \in k[V]$ y $g(P) \neq 0$. En principio, podría ocurrir que α no fuera regular en P como variedad definida sobre k, pero sí como variedad definida sobre K, es decir, que podría ocurrir que $\alpha = f/g$ con f, $g \in K[V]$ y $g(P) \neq 0$. Vamos a ver que, en realidad, esto no es posible. Más en general:

Teorema 2.41 *Si V es una variedad absoluta definida sobre un cuerpo perfecto, para todo punto $P \in V$ se cumple que $\mathcal{O}_P^k(V) = \mathcal{O}_P^K(V) \cap k(V)$.*

Demostración: Pasando a la clausura proyectiva de V y luego a un entorno afín de P, podemos suponer que V es afín. El teorema 1.41 nos da que $I_K(V)$ está generado por polinomios de $k[X_1, \ldots, X_n]$, luego es invariante por $G(K/k)$. Esto implica que si $\alpha \in k(V)$, aunque veamos a V como variedad definida sobre K, el conjunto de los puntos singulares de α está definido sobre k. En efecto, si $\alpha = f/g$ con $f, g \in K[V]$ y $g(P) \neq 0$, entonces $\alpha = \alpha^\sigma = f^\sigma/g^\sigma$ y $g^\sigma(P^\sigma) \neq 0$, luego α también es regular en P^σ. Así pues, si C es el conjunto de puntos singulares de α, se cumple que $\sigma[C] = C$ para todo $\sigma \in G(K/k)$, luego el teorema 1.38 nos da que C está definido sobre k.

El teorema 2.39 nos da un entorno afín U de P (respecto a la topología de Zariski de V relativa a k) tal que $\alpha \in K[U] \cap k(U) = k[U]$, por el teorema 1.42, luego α también está definida en P considerando a V como variedad sobre k. ∎

2.4 Producto de variedades

Hemos visto que podemos considerar como variedad afín a cualquier producto de variedades afines sin más que identificar $A^m \times A^n$ con A^{m+n} de forma natural. De todos modos, debemos advertir que la topología de Zariski en el producto obtenida por esta identificación no es la topología producto. El caso es que nos gustaría generalizar esto a variedades cualesquiera, no necesariamente afines, para lo cual introducimos el concepto siguiente:

Definición 2.42 Sean m y n números naturales no nulos. Llamemos $N = (m+1)(n+1) - 1$. Fijamos un sistema de referencia en P^N y consideramos las coordenadas homogéneas de cada punto como una matriz (X_{ij}) de orden $(m+1) \times (n+1)$. Definimos la *variedad de Segre* $m \times n$ como el subconjunto $S_{m,n}$ de P^N formado por los puntos que satisfacen las ecuaciones

$$X_{i,j}X_{k,l} = X_{k,j}X_{i,l}.$$

Notemos que estas ecuaciones expresan que todas las submatrices 2×2 de la matriz de coordenadas de los puntos de $S_{m,n}$ tienen determinante nulo, es decir, que $S_{m,n}$ está formado por los puntos cuya matriz de coordenadas homogéneas tiene rango 1.

La definición que hemos dado depende del sistema de referencia, pero es claro que dos variedades de Segre $m \times n$ son isomorfas. La propia definición muestra que $S_{m,n}$ es un conjunto algebraico (sobre cualquier cuerpo k). Para justificar su nombre hemos de probar que es irreducible (de hecho, es geométricamente irreducible), pero de momento pospondremos la prueba.

Para comprender el interés de las variedades de Segre, definimos la *inyección de Segre* $i_{m,n} : \mathrm{P}^m \times \mathrm{P}^n \longrightarrow S_{m,n}$ mediante

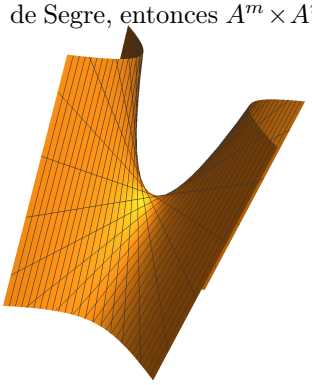
$$i_{m,n}(a_1, \ldots, a_{m+1}, b_1, \ldots, b_{n+1}) = (a_i b_j)_{ij}.$$

Es claro que $i_{m,n}$ no depende de la elección de las coordenadas homogéneas de cada par de puntos, así como que su imagen está en $S_{m,n}$. Además es biyectiva, pues si $P \in S_{m,n}$, su única antiimagen es el par (Q, R) cuyas coordenadas homogéneas son cualquier fila y cualquier columna, respectivamente, de la matriz de coordenadas de P.

Consideremos ahora el espacio afín A^N determinado por $X_{m+1,n+1} \neq 0$. Es claro que $S_{m,n} \cap A^N = i[A^m \times A^n]$, donde A^m es el espacio afín determinado por $X_{m+1} \neq 0$ y A^n el determinado por $X_{n+1} \neq 0$. Así, podemos definir una aplicación $\phi : A^{m+n} \longrightarrow S_{m,n} \cap A^N$ mediante

$$\phi(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) = (a_i b_j), \qquad a_{m+1} = a_{n+1} = 1.$$

Es fácil ver que ϕ es un isomorfismo (es polinómica con inversa polinómica). Esto significa que si identificamos a $\mathrm{P}^m \times \mathrm{P}^n$ con $S_{m,n}$ a través de la inyección de Segre, entonces $A^m \times A^n$ se identifica con una variedad afín isomorfa a A^{m+n}.



Ejemplo La figura muestra la imagen de la inmersión de Segre $\phi : A^2 \longrightarrow A^3$, que viene dada por

$$\phi(x, y) = (x, y, xy),$$

que es la restricción de la inmersión

$$i_{1,1} : \mathrm{P}^1 \times \mathrm{P}^1 \longrightarrow \mathrm{P}^3$$

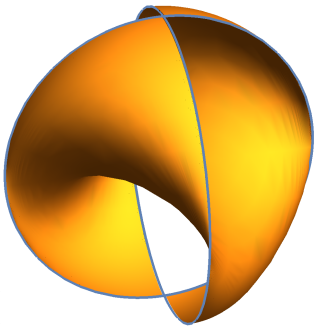
dada por

$$i_{1,1}([x, x'], [y, y']) = (xy', yx', xy, x'y').$$

Así, mientras las rectas $y = a$ en A^2 son paralelas y tienen un mismo punto infinito en común (al considerar $A^2 \subset \mathrm{P}^2$ con la inmersión usual), sus imágenes por ϕ son las rectas (x, a, ax) (es decir, $V(Y - a, Z - aZ)$), que, como se ve en

la figura, tienen direcciones diferentes, lo que se traduce en que cada una tiene un punto infinito diferente en P^3, a saber, el punto $i_{1,1}([1,0],[a,1]) = (1,0,a,0)$. Estos puntos forman una recta afín $\phi[\{\infty\} \times A^1]$, que se completa hasta una recta proyectiva $i_{1,1}[\{\infty\} \times P^1]$ con $i_{1,1}([1,0],[1,0]) = (0,0,1,0)$.

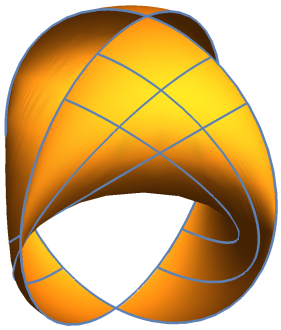
La segunda figura muestra la totalidad de $S_{1,1}$ en una representación tridimensional de P^3 análoga a la representación bidimensional de P^2 descrita en el ejemplo 4 de la página 53. Los puntos de P^3 se corresponden con los de la bola unitaria de $\mathbb{R}^3$, de modo que el hiperplano infinito se corresponde con la esfera, con la salvedad de que cada punto de la esfera representa el mismo punto de P^3 que su antípoda.



Así, en la figura vemos que los puntos infinitos de $S_{1,1}$ forman dos circunferencias (en realidad dos rectas proyectivas) que se cortan en dos puntos que en realidad son el mismo punto

$$i_{1,1}(\infty,\infty) = [0,0,1,0]$$

(que en la representación es $(0,0,1)$). En la tercera figura están representadas las rectas $X = 1$, $X = 2$, que unen sin cortarse entre sí dos puntos antípodas de una de las rectas infinitas (que en realidad son el mismo punto), así como las rectas $Y = 1$, $Y = 2$, que unen dos puntos de la otra recta infinita, sin cortarse entre sí y cortando a las otras dos rectas en un punto cada una. ∎



Un subconjunto $X \subset \mathrm{P}^m \times \mathrm{P}^n$, identificado con un subconjunto de $S_{m,n}$, es algebraico si y sólo si las coordenadas homogéneas (X_i, Y_j) de sus puntos satisfacen un sistema de ecuaciones de tipo $F(X_iY_j) = 0$, donde $F(T_{ij})$ es una forma, digamos de grado d. El polinomio $F(X_iY_j)$ tiene la propiedad de ser *bihomogéneo* de grado d, es decir, la suma de los grados de las variables X_i en cada monomio es igual a la suma de los grados de las variables Y_j en cada monomio y ambas son iguales a d. Es claro entonces que los subconjuntos algebraicos de $\mathrm{P}^m \times \mathrm{P}^n$ son los determinados (en un sistema de referencia de cada factor) por un conjunto de polinomios bihomogéneos de un mismo grado d en ambos grupos de variables.

Ahora bien, los polinomios bihomogéneos de grados (d_1, d_2), es decir, los polinomios que cumplen que la suma de los grados de las variables X_i en cada monomio es igual a d_1 y la suma de los grados de las variables Y_i en cada monomio es igual a d_2, también definen conjuntos algebraicos. En efecto, si $d_1 < d_2$ y $r = d_2 - d_1$, una ecuación $F(X_i, Y_j) = 0$ equivale a las ecuaciones bihomogéneas de grado d_2 dadas por

$$X_1^r F(X_i, Y_j) = 0, \quad \ldots \quad X_{m+1}^r F(X_i, Y_j) = 0.$$

En conclusión:

Al identificar $\mathrm{P}^m \times \mathrm{P}^n$ con la variedad de Segre, sus subconjuntos algebraicos son los determinados por un sistema de ecuaciones bihomogéneas, de grados en X e Y no necesariamente iguales.

Ahora es claro que un conjunto es algebraico en $\mathrm{P}^m \times \mathrm{P}^n$ respecto a una elección de sistemas de referencia en los factores si y sólo si lo es respecto a cualquier otra elección.

En lo sucesivo identificaremos $\mathrm{P}^m \times \mathrm{P}^n = S_{m,n}$. Nos falta probar que $\mathrm{P}^m \times \mathrm{P}^n$ es irreducible. Para ello probamos primero lo siguiente:

Teorema 2.43 *Si $V \subset \mathrm{P}^m$ es una variedad proyectiva y $Q \in \mathrm{P}^n$, entonces $V \times \{Q\}$ es una variedad proyectiva isomorfa a V.*

Demostración: En general, el producto de conjuntos algebraicos (sobre k) es un conjunto algebraico (sobre k), pues está definido por la unión de las ecuaciones que definen a los factores. Veamos que la aplicación $\phi(P) = (P, Q)$ es un isomorfismo. Para probar que es regular basta ver que lo es restringida a un entorno de cada punto. No perdemos generalidad si estudiamos la restricción al espacio A^m definido por $X_{m+1} \neq 0$. También podemos suponer que Q cumple $Y_{m+1} = 1$. Así la expresión en coordenadas afines de la restricción de ϕ es $\phi(X_1, \ldots, X_m) = (X_i Y_j)$, donde $X_{m+1} = 1$ e Y_j son las coordenadas de Q (constantes). Vemos que se trata de una aplicación polinómica, luego regular.

Para probar la regularidad de la inversa razonamos de forma similar, restringiéndonos a $A^N \cap (V \times \{Q\})$. Ahora la expresión coordenada de la restricción de ϕ^{-1} es simplemente una proyección. El hecho de que $V \times \{Q\}$ sea un conjunto algebraico isomorfo a V ya implica que es irreducible. ∎

Ya podemos probar la irreducibilidad de $\mathrm{P}^m \times \mathrm{P}^n$. De hecho probamos algo más general:

Teorema 2.44 *Si $V \subset \mathrm{P}^m$ y $W \subset \mathrm{P}^n$ son variedades proyectivas, entonces $V \times W$ también lo es.*

Demostración: Como ya hemos señalado en la prueba del teorema anterior, $V \times W$ es algebraico (sobre k). Hay que ver que es irreducible. Supongamos que $V \times W = Z_1 \cup Z_2$, donde ambos conjuntos son cerrados. Definimos

$$U_i = \{Q \in W \mid V \times \{Q\} \not\subset Z_i\}.$$

Como $V \times \{Q\}$ es irreducible, ha de ser $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Si probamos que los U_i son abiertos, puesto que W es irreducible, esto sólo será posible si uno de los dos es vacío, digamos $U_1 = \varnothing$, lo que implica que $V \times W \subset Z_1$, como queremos probar. Veamos, pues, que U_1 es abierto (lo mismo vale para U_2).

Si $Q \in U_1$, entonces existe un $P \in V$ tal que $F(P, Q) \neq 0$, donde F es una de las formas que definen a Z_1. Entonces $G(X) = F(P, X)$ es una forma tal que

$$Q \in \{X \in W \mid G(X) \neq 0\} \subset U_1.$$

Esto prueba que U_1 es un entorno de Q, luego es abierto. ∎

Observemos que si las variedades V y W del teorema anterior son absolutas, también lo es su producto, porque la prueba vale sobre cualquier cuerpo.

A partir de aquí ya es fácil obtener los resultados básicos sobre productos. Por ejemplo, el producto de variedades es una variedad, ya que

$$(\overline{V} \times \overline{W}) \setminus (V \times W) = ((\overline{V} \setminus V) \times \overline{W}) \cup (\overline{V} \times (\overline{W} \setminus W))$$

es cerrado por el teorema anterior, luego $V \times W$ es abierto en la variedad proyectiva $\overline{V} \times \overline{W}$.

Por otra parte, el producto de variedades afines es una variedad afín isomorfa al producto definido en la página 6.

Hemos visto que si $V \subset A^m$ y $W \subset A^n$ son conjuntos algebraicos afines, al identificar $V \times W$ con su imagen en $S_{m,n}$ obtenemos un subconjunto de A^N que, a través del isomorfismo con A^{m+n}, se corresponde con el producto cartesiano $V \times W \subset A^{m+n}$. Ahora sabemos que si V y W son variedades, entonces $V \times W$ también lo es.

Veamos algunos hechos más:

Teorema 2.45 *Sean V, W, V', W' y Z variedades. Entonces*

1. *Las proyecciones de $V \times W$ en cada factor son aplicaciones regulares.*
2. *Si $\phi : Z \longrightarrow V$ y $\psi : Z \longrightarrow W$ son aplicaciones regulares, entonces la aplicación $(\phi, \psi) : Z \longrightarrow V \times W$ dada por $(\phi, \psi)(P) = (\phi(P), \psi(P))$ es regular.*
3. *Si $\phi : V \longrightarrow V'$ y $\psi : W \longrightarrow W'$ son aplicaciones regulares, entonces la aplicación $\phi \times \psi : V \times W \longrightarrow V' \times W'$ dada por $(\phi \times \psi)(P, Q) = (\phi(P), \psi(Q))$ es regular.*
4. *La diagonal $\Delta_V = \{(P, P) \mid P \in V\}$ es cerrada en $V \times V$. La aplicación $\delta_V : V \longrightarrow \Delta_V$ dada por $\delta_V(P) = (P, P)$ es un isomorfismo.*

Demostración: La prueba de 1) es sencilla (al restringirse a espacios afines, las expresiones coordenadas de las proyecciones son proyecciones, luego aplicaciones polinómicas).

2) Por 2.36 no perdemos generalidad si suponemos que $V = \mathrm{P}^m$, $W = \mathrm{P}^n$. Para probar que (ϕ, ψ) es regular, basta probar que lo es restringida a cualquier cubrimiento abierto de Z. Puesto que $\mathrm{P}^m \times \mathrm{P}^n$ puede cubrirse con productos de espacios afines, podemos suponer que $V = A^m$ y $W = A^n$. Puesto que todo punto de Z tiene un entorno afín, podemos suponer que Z es una variedad afín. Explícitamente, la situación es ésta:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{(\phi,\psi)} & A^m \times A^n \\ {\scriptstyle\chi}\uparrow & \nearrow_{\tilde{\chi}} & \\ Z' & & \end{array}$$

donde $Z' \subset A^p$ es una variedad afín en sentido estricto y χ es un isomorfismo. Entonces $\tilde{\chi}(P) = (\phi(\chi(P)), \psi(\chi(P)))$ y las dos funciones coordenadas son aplicaciones regulares entre variedades afines, luego son polinómicas, luego $\tilde{\chi}$ también es polinómica, luego regular, luego (ϕ, ψ) también lo es.

3) se sigue de 2) aplicado a las composiciones de las proyecciones seguidas de ϕ y ψ.

4) La diagonal Δ_V es la intersección con $V \times V$ de la diagonal de $\mathrm{P}^n \times \mathrm{P}^n$, que claramente es cerrada. La aplicación δ_V es regular por 2) y su inversa es regular porque es la proyección. ∎

Por ejemplo, ahora podemos afirmar que el producto de variedades afines (generalizadas) es una variedad afín. Lo sabíamos para variedades afines en sentido estricto, pero el apartado 3) del teorema anterior nos da que el producto de dos variedades afines generalizadas es isomorfo a un producto de variedades afines en sentido estricto, luego es una variedad afín.

Veamos otra consecuencia de gran utilidad:

Teorema 2.46 *Si $\phi, \psi : V \longrightarrow W$ son aplicaciones regulares entre variedades, entonces $\{P \in V \mid \phi(P) = \psi(P)\}$ es cerrado en V. En particular, si ϕ y ψ coinciden en un conjunto denso, entonces $\phi = \psi$.*

Demostración: El conjunto en cuestión es $(\phi, \psi)^{-1}[\Delta_W]$. ∎

Como aplicación podemos probar lo siguiente:

Teorema 2.47 *Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación regular entre variedades. Si ϕ es densa (es decir, si $\phi[V]$ es denso en W), entonces $\overline{\phi} : k[W] \longrightarrow k[V]$ es un monomorfismo de anillos. Si W es afín el recíproco es cierto.*

Demostración: Si α, $\beta \in k[W]$ y $\overline{\phi}(\alpha) = \overline{\phi}(\beta)$, es decir, si $\phi \circ \alpha = \phi \circ \beta$, entonces α y β coinciden en $\phi[V]$, luego $\alpha = \beta$ por el teorema anterior.

Supongamos ahora que $\phi[V]$ no es denso en W y que W es afín. Tomemos $P \in W \setminus \overline{\phi[V]}$. Entonces existe un polinomio $F \in I(\overline{\phi[V]})$ tal que $F(P) \neq 0$, luego $f = [F] \in k[W]$ (aquí usamos que W es afín) cumple que $\overline{\phi}(f) = 0$, pero $f \neq 0$. Por lo tanto $\overline{\phi}$ no es inyectiva. ∎

Para terminar con los productos de variedades probaremos un resultado del que deduciremos una propiedad importante de las aplicaciones regulares: la imagen de una variedad proyectiva por una aplicación regular es cerrada. Primero demostramos lo siguiente:

Teorema 2.48 *Sea V una variedad proyectiva y W una variedad arbitraria. Entonces la proyección $p : V \times W \longrightarrow W$ es cerrada, es decir, la imagen de un cerrado en $V \times W$ es cerrada en W.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que V es cerrado en P^m. Entonces $V \times W = (V \times \mathrm{P}^n) \cap (\mathrm{P}^m \times W)$ es cerrado en $\mathrm{P}^m \times W$. Si C es cerrado en $V \times W$, también lo es $\mathrm{P}^m \times W$, luego podemos suponer que $V = \mathrm{P}^m$. Por 2.39 podemos cubrir W por abiertos afines. Si A es uno de ellos, entonces $C \cap (\mathrm{P}^m \times A)$ es cerrado en $\mathrm{P}^m \times A$. Si probamos el teorema para $W = A$, tendremos que $p[C \cap (\mathrm{P}^m \times A)]$ será cerrado en A, y es claro que entonces $p[C]$ será cerrado en W, como queremos demostrar. Por consiguiente, basta probar el teorema para el caso en que W es una variedad afín. Podemos suponer que W es cerrado en un espacio afín A^n. Como $\mathrm{P}^m \times W = (\mathrm{P}^m \times \overline{W}) \cap (\mathrm{P}^m \times A^n)$ es cerrado en $\mathrm{P}^m \times A^n$, podemos suponer que $W = A^n$.

En resumen, basta probar el teorema en el caso $p : \mathrm{P}^m \times A^n \longrightarrow A^n$. Fijemos sistemas de referencia en P^m y P^n de modo que A^n venga dado por la condición $Y_{n+1} \neq 0$. El conjunto C está formado por los puntos de $\mathrm{P}^m \times \mathrm{P}^n$ cuyas coordenadas homogéneas satisfacen un conjunto de ecuaciones de la forma $F_r(X_i, Y_j) = 0$, $r = 1, \ldots, t$, donde las F_r son formas bihomogéneas, y además $Y_{n+1} \neq 0$. Si sustituimos $Y_{n+1} = 1$ en cada forma F_r obtenemos polinomios homogéneos únicamente en las variables X_i tales que los puntos de C son exactamente los de coordenadas homogéneas $(X_1, \ldots, X_{m+1})$ y coordenadas afines $(Y_1, \ldots, Y_n)$ que cumplen el sistema de ecuaciones $F_r(X_i, Y_j) = 0$.

Un punto $P \in A^n$, de coordenadas (Y_j) está en $p[C]$ si y sólo si el sistema de ecuaciones $F_r(X_i, Y_j) = 0$ tiene solución no nula en las X_i. Según el teorema 2.5, esto sucede si y sólo si

$$(X_1, \ldots, X_{m+1})^s \not\subset (F_1(X_i, Y_j), \ldots, F_t(X_i, Y_j)), \tag{2.2}$$

para todo natural s. (Tengamos presente que las coordenadas Y_j son fijas, luego cada $F_r(X_i, Y_j)$ es una forma en las X_i.) Llamemos C_s al conjunto de los puntos $P \in A^n$, de coordenadas (Y_i), tales que esta condición se cumple para s. Según acabamos de ver, $p[C]$ es la intersección de todos los C_s, luego basta probar que cada uno de ellos es cerrado.

Sea $G_k \in k[X_1, \ldots, X_{m+1}]$ una enumeración de los monomios de grado s con coeficiente 1 (son un número finito). La inclusión

$$(X_1, \ldots, X_{m+1})^s \subset (F_1(X_i, Y_j), \ldots, F_t(X_i, Y_j)) \tag{2.3}$$

equivale a que cada G_k se exprese en la forma

$$G_k(x) = \sum_r p_{kr}(X_i) F_r(X_i, Y_j),$$

para ciertos polinomios $p_{kr}(X_i)$. Comparando las componentes homogéneas de grado s, podemos exigir que cada p_{kr} sea una forma de grado $s - d_r$, donde d_r es el grado (en las X_i) de F_r y $p_{kr} = 0$ si $d_r > s$.

Sea $N_k^r(X_i)$ una enumeración de los monomios de grado $s - d_r$ con coeficiente 1. La inclusión (2.3) equivale a que las formas $N_k^r(X_i) F_r(X_i, Y_j)$ generan el espacio vectorial de las formas de grado s. Si llamamos D a la dimensión de este espacio, la inclusión (2.3) equivale a que la matriz formada por los coeficientes de los monomios $G_{k'}$ en las formas $N_k^r(x) F_r(x, y)$ tenga rango D, o

también a que exista un determinante $D \times D$ formado por estos coeficientes que sea distinto de 0. Por tanto, la condición (2.2) equivale a que todos estos determinantes sean nulos, pero tales determinantes dependen polinómicamente de las coordenadas (Y_i), luego, efectivamente, los puntos de C_s son aquellos cuyas coordenadas afines (Y_i) satisfacen un sistema de ecuaciones polinómicas. ∎

Como aplicación tenemos:

Teorema 2.49 *Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación regular entre variedades y supongamos que V es proyectiva. Entonces $\phi[V]$ es cerrado en W.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $G \subset V \times W$ la gráfica de ϕ (conjuntistamente $G = \phi$). Entonces $G = (\phi \times i)^{-1}[\Delta_W]$, donde $i : W \longrightarrow W$ es la identidad. Por lo tanto G es cerrado en $V \times W$ y por el teorema anterior su proyección en W es cerrada, pero ésta es $\phi[V]$. ∎

Igual que hemos definido una variedad afín como una variedad isomorfa a una variedad afín en sentido estricto, igualmente podríamos haber definido una variedad proyectiva como una variedad (cuasiproyectiva) isomorfa a una variedad proyectiva, pero el teorema anterior muestra que las variedades proyectivas en este sentido general serían exactamente las variedades proyectivas en sentido estricto.

Ahora podemos mostrar una diferencia esencial entre las variedades afines y las proyectivas. Hemos visto que una variedad afín V está determinada salvo isomorfismo por su anillo de funciones regulares $k[V]$. La situación es radicalmente distinta para variedades proyectivas:

Teorema 2.50 *Sea V una variedad proyectiva sobre k. Entonces $k[V] = k$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\alpha \in k[V]$, entonces $\alpha : V \longrightarrow A^1$, y en particular $\alpha : V \longrightarrow \mathrm{P}^1$. Por el teorema anterior $\alpha[V]$ es cerrado en P^1. Ahora bien, $\alpha[V] \subset A^1$, y no puede ser $\alpha[V] = A^1$, pues no sería cerrado en P^1.

Por otra parte, es fácil ver que los únicos cerrados en A^1 distintos de A^1 son los conjuntos finitos. Más aún, $\phi[V]$ no puede contener más de un punto, pues si $\phi[V] = \{a_1, \ldots, a_r\}$, entonces los cerrados $\phi^{-1}[a_i]$ contradirían la irreducibilidad de V. Por consiguiente ϕ es constante. ∎

Esto a su vez puede generalizarse:

Teorema 2.51 *Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación regular de una variedad proyectiva en una variedad afín. Entonces ϕ es constante.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que W es abierto en A^m, y a su vez podemos suponer que $\phi : V \longrightarrow A^m$. Basta aplicar el teorema anterior a las composiciones de ϕ con las proyecciones en los factores de $A^m = K^m$. ∎

2.5 Aplicaciones racionales

Ahora estamos en condiciones de definir las aplicaciones más generales que aparecen de forma natural en la teoría básica sobre variedades algebraicas. Se trata de las aplicaciones racionales, que hasta ahora tenemos definidas únicamente en el caso $\alpha : V \longrightarrow A^1$, y que constituyen el cuerpo de funciones racionales $k(V)$ de la variedad V. La definición general debe extender a ésta.

En principio podríamos definir una aplicación racional $\phi : V \longrightarrow W$ entre dos variedades como una aplicación regular $\phi : U \longrightarrow W$, donde U es un abierto en V, pero hemos de hacer una matización: diremos que ϕ es *equivalente* a otra aplicación regular $\phi' : U' \longrightarrow W$ si ϕ y ϕ' coinciden en $U \cap U'$. En virtud del teorema 2.46 tenemos una relación de equivalencia, pues los abiertos no vacíos son densos. La clase de equivalencia de ϕ define una función regular en la unión de los dominios de sus elementos, con la propiedad de que no puede extenderse a una aplicación regular en un abierto mayor.

Definición 2.52 Una *aplicación racional* $\phi : V \longrightarrow W$ entre dos variedades es una aplicación regular definida en un subconjunto abierto de V que no puede extenderse a una aplicación regular en ningún abierto mayor. Los puntos donde ϕ no está definida se llaman *singularidades* de ϕ. También se dice que son los puntos donde ϕ es *singular*.

Hemos visto que toda aplicación regular definida en un abierto de una variedad V se extiende a una única aplicación racional en V. El considerar las extensiones máximas es necesario para que las singularidades estén bien definidas. Observemos que el conjunto de singularidades de una función racional es cerrado por definición.

Veamos ahora que si V es una variedad, entonces $k(V)$ es precisamente el conjunto de las funciones racionales $\alpha : V \longrightarrow A^1$.

Si $\alpha \in k(V)$ y C es el conjunto de sus singularidades (en el sentido que ya teníamos definido, es decir, el conjunto de puntos de V donde α no está definida), entonces C es cerrado en V y la restricción de α a $U = V \setminus C$ es una función regular. Lo único que hemos de justificar es que C es también el conjunto de los singularidades de α en el sentido de la definición anterior, es decir, que $\alpha|_U$ no puede extenderse a una función regular en un entorno de un punto $P \in U$. Si existiera tal entorno W, entonces, $\alpha \in k[W]$, luego $\alpha = [F]/[G]$, donde F y G son formas del mismo grado, $G(P) \neq 0$ y las clases se toman módulo $I(\overline{W}) = I(\overline{V})$, pero entonces α estaría definida en P en el sentido usual para funciones de $k(V)$.

Recíprocamente, si $\alpha : V \longrightarrow A^1$ es racional, entonces existe un abierto U en V tal que $\alpha|_U \in k[U]$, es decir, $\alpha|_U = \beta|_U$, para una cierta $\beta \in k(V)$. Como α y β son racionales en el sentido de la definición anterior y coinciden en un abierto, necesariamente $\alpha = \beta \in k(V)$.

A partir de aquí podemos caracterizar las aplicaciones racionales en varios casos de interés. Por ejemplo:

Teorema 2.53 *Las funciones racionales $\phi : V \longrightarrow A^n$ en una variedad V son las funciones (definidas sobre un abierto de V) de la forma*

$$\phi(P) = (\alpha_1(P), \dots, \alpha_n(P)),$$

donde $\alpha_i \in k(V)$. Un punto $P \in V$ es una singularidad de ϕ si y sólo si es una singularidad de alguna de las funciones coordenadas α_i.

DEMOSTRACIÓN: Sea U el conjunto de los puntos de V donde ϕ está definida. Entonces $\phi|_U : U \longrightarrow A^n$ es una aplicación regular, luego también lo son las proyecciones $\alpha_i = \phi|_U \circ p_i : U \longrightarrow A^1$. Por consiguiente $\alpha_i \in k(U) = k(V)$.

Recíprocamente, si ϕ cumple que $\alpha_i \in k(V)$ y U es la intersección de los dominios de las funciones α_i, entonces $\phi|_U$ es regular por el teorema 2.45, luego ϕ es racional, y es fácil ver que su dominio es exactamente U. ∎

Consideremos ahora una función racional $\phi : V \longrightarrow \mathrm{P}^n$ y sea $P \in V$. Fijados sistemas de coordenadas, pongamos que la coordenada X_{n+1} de $\phi(P)$ es no nula, es decir, que $\phi(P) \in A^n$, donde A^n es el espacio afín determinado por la condición $X_{n+1} \neq 0$. La restricción de ϕ al abierto $U = \phi^{-1}[A^n]$ es una aplicación regular, en particular racional, con imagen en A^n, luego por el teorema anterior, ϕ es de la forma

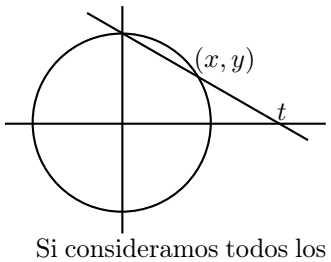
$$\phi(Q) = (\alpha_1(Q), \dots, \alpha_n(Q)), \qquad \alpha_i \in k(V).$$

En un entorno de P, cada α_i admite la expresión $\alpha_1 = [F_i]/[F_{n+1}]$, donde las F_i son formas del mismo grado. Por consiguiente, las coordenadas homogéneas de la imagen de un punto Q son de la forma

$$\phi(Q) = (F_1(Q), \dots, F_{n+1}(Q)),$$

para ciertas formas F_i del mismo grado. No obstante, hemos de tener presente que esta expresión es local, es decir, que tenemos una expresión de este tipo válida en un entorno de cada punto P. Recíprocamente, si una función ϕ puede ser definida localmente por expresiones de este tipo, será racional, y será regular en aquellos puntos en los que exista una expresión de este tipo cuyas coordenadas no se anulen simultáneamente.

Ejemplo Sea $V = V(X^2 + Y^2 - 1)$ la circunferencia unidad. Es conocido que la proyección estereográfica proporciona una biyección entre $V(\mathbb{R}) \setminus \{(0,1)\}$ y la recta afín. Las fórmulas son



$$(x, y) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right),$$

$$t = \frac{x}{1-y} = \frac{1+y}{x}.$$

Si consideramos todos los puntos de V (como variedad compleja) la situación no es tan simple, pues pues los puntos $t = \pm i$ no tienen imagen en V. De este modo, estas aplicaciones definen biyecciones mutuamente inversas entre $V \setminus \{(0,1)\}$ y $A^1 \setminus \{\pm i\}$. Claramente son isomorfismos.

Las singularidades se deben a que las rectas que unen el punto $(0,1)$ con los puntos $(\pm i, 0)$ cortan a V en el infinito. Similarmente, el punto $(0,1)$ de V "debería" corresponderse con el punto infinito de P^1. En otras palabras: las singularidades desaparecen si consideramos variedades proyectivas. Sea, pues, $V = V(X^2 + Y^2 - Z^2)$. Las fórmulas de la proyección estereográfica en coordenadas homogéneas (x, y, z) para V y (t, u) para P^1 son

$$(x, y, z) = (2tu,\ t^2 - u^2,\ t^2 + u^2), \qquad (t, u) = (x,\ z - y) = (z + y,\ x).$$

Así vemos que los puntos $(\pm i, 1)$ se transforman en los puntos infinitos $(\pm i, 1, 0)$. Ahora es fácil comprobar que estas transformaciones mutuamente inversas son de hecho isomorfismos entre V y P^1.

Observemos que hemos de considerar las dos expresiones que determinan a (t, u) en función de (x, y, z), pues ninguna de las dos es válida globalmente. Este ejemplo también muestra cómo un punto puede ser singular para una función racional entre variedades (el punto i, por ejemplo) y dejar de serlo cuando extendemos la imagen (de la circunferencia afín a la proyectiva). ∎

Ejercicio: Describir explícitamente un isomorfismo entre la recta proyectiva y la parábola $YZ = X^2$.

Es fácil generalizar el teorema 2.47. Supongamos que $\phi : V \longrightarrow W$ es una función racional (con imagen) densa entre dos variedades. Sea $U_2 \subset W$ un abierto afín y $U_1 \subset \phi^{-1}[U_2]$ un abierto afín en V, que podemos tomar tal que ϕ sea regular en U_1. Así tenemos que $\phi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2$ es regular y densa. En efecto, si $A \subset U_2$ es un abierto no vacío, entonces $A \cap \phi[V] \neq \varnothing$, luego $\phi^{-1}[A]$ es un abierto no vacío, luego $\phi^{-1}[A] \cap U_1 \neq \varnothing$, luego $A \cap \phi[U_1] \neq \varnothing$. Por 2.47 tenemos que $\overline{\phi} : k[U_2] \longrightarrow k[U_1]$ es un k-monomorfismo, luego se extiende a un k-monomorfismo entre los cuerpos de cocientes, es decir, $\overline{\phi} : k(W) \longrightarrow k(V)$.

Concretamente, si $\alpha \in k(W)$ está definida en un punto $\phi(P) \in U_2$, entonces $\alpha = \beta/\gamma$, donde $\beta, \gamma \in k[U_2]$ y $\gamma(\phi(P)) \neq 0$. Por lo tanto $\overline{\phi}(\alpha) = (\phi \circ \beta)/(\phi \circ \gamma)$ está definida en P y $\overline{\phi}(\alpha)(P) = \alpha(\phi(P))$. Así pues, $\overline{\phi}(\alpha)|_{U_1} = \phi|_{U_1} \circ \alpha$.

De aquí se sigue que $\overline{\phi}$ no depende de la elección de los abiertos U_1 y U_2, pues si los cambiamos por otros U_1' y U_2' entonces las correspondientes aplicaciones $\overline{\phi}(f)$ y $\overline{\phi}'(f)$ coinciden en $U_1 \cap U_1'$, luego son la misma función racional. Puesto que todo punto tiene un entorno afín, si A es el abierto de puntos regulares de $\alpha \in k(W)$, entonces $\overline{\phi}(\alpha)$ está definida en $\phi^{-1}[A]$ y $\overline{\phi}(\alpha) = \phi \circ \alpha$. Con esto hemos probado la mitad del teorema siguiente:

Teorema 2.54 *Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación racional densa entre variedades sobre un cuerpo k. Entonces ϕ induce un único k-monomorfismo de cuerpos $\overline{\phi} : k(W) \longrightarrow k(V)$ determinado por la propiedad siguiente: si U es abierto en W y $\alpha \in k[U]$, entonces $\overline{\phi}(\alpha) \in k[\phi^{-1}[U]]$ y $\overline{\phi}(\alpha) = \phi \circ \alpha$. Recíprocamente, todo k-monomorfismo $h : k(W) \longrightarrow k(V)$ es de la forma $h = \overline{\phi}$, para una cierta aplicación racional densa $\phi : V \longrightarrow W$.*

Demostración: Tomamos variedades afines $V' \subset V$ y $W' \subset W$ (abiertas). Entonces $k(V') = k(V)$ y $k(W') = k(W)$. Si probamos el teorema para V'

y W' tendremos una aplicación racional $\phi : V' \longrightarrow W'$ que induce a h, pero ϕ determina una única aplicación racional $\phi : V \longrightarrow W$. Alternativamente, podemos suponer que V y W son afines.

Sea $k[W] = k[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces $h(x_i) = \alpha_i/\beta_i$, con α_i, $\beta_i \in k[V]$. Sea $\beta = \beta_1 \cdots \beta_n$. Tenemos que $h[k[W]] \subset k[V][1/\beta] = k[V_\beta]$ (ver 2.38), luego tenemos un k-monomorfismo $h : k[W] \longrightarrow k[V_\beta]$. Por el teorema 1.10 tenemos que $h = \overline{\phi}$, para una cierta aplicación regular $\phi : V_\beta \longrightarrow W$. Como h es inyectiva, el teorema 2.47 nos da que $\phi[V_\beta]$ es denso en W. La aplicación ϕ se extiende a una única aplicación racional densa $\phi : V \longrightarrow W$ que claramente induce a h. ∎

Ahora podemos determinar exactamente las aplicaciones entre variedades que conservan los cuerpos de funciones racionales:

Definición 2.55 Una aplicación $\phi : V \longrightarrow W$ entre variedades es *birracional* si existen abiertos $U_1 \subset V$ y $U_2 \subset W$ tales que $\phi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2$ es un isomorfismo.

Claramente, el isomorfismo indicado (con su inverso) induce funciones racionales densas $\phi : V \longrightarrow W$ y $\phi^{-1} : W \longrightarrow V$ que claramente inducen isomorfismos (mutuamente inversos) $\overline{\phi} : k(W) \longrightarrow k(V)$ y $\overline{\phi}^{-1} : k(V) \longrightarrow k(W)$.

Informalmente, podemos decir que una aplicación birracional es una aplicación racional con inversa racional, pero hemos de tener presente que las aplicaciones birracionales no están definidas necesariamente en toda la variedad (cuando lo están son isomorfismos).

Diremos que dos variedades V y W son *birracionalmente equivalentes* si existe una aplicación birracional entre ellas. Claramente se trata de una relación de equivalencia.

Teorema 2.56 *Dos variedades son birracionalmente equivalentes si y sólo si sus cuerpos de funciones racionales son k-isomorfos.*

Demostración: Una implicación se sigue directamente de 2.54. Supongamos que $\phi : k(V) \longrightarrow k(W)$ es un k-isomorfismo entre los cuerpos de funciones racionales de dos variedades. Podemos suponer que son afines. Como en la prueba de 2.54, existe un $\beta \in k[W]$ tal que $\phi[k[V]] \subset k[W_\beta]$. Similarmente, existe $\alpha \in k[V]$ tal que $\phi^{-1}[k[W]] \subset k[V_\alpha]$. Entonces ϕ se restringe a un isomorfismo entre los anillos $k[V_{\alpha,\phi^{-1}(\beta)}]$ y $k[W_{\beta,\phi(\alpha)}]$ y, como las variedades son afines, el teorema 1.10 (véanse las observaciones posteriores) nos da que son isomorfas, luego V y W son birracionalmente equivalentes. ∎

Ejercicio: Refinar la prueba del teorema anterior para demostrar que dos puntos de dos variedades tienen entornos k-isomorfos si y sólo si sus anillos de funciones regulares son k-isomorfos.

Ejemplo Sea V la curva "alfa" $Y^2 = X^2(X+1)$, (véase la página 7). Observemos que la recta $Y = tX$ que pasa por el origen con pendiente t corta a V en $(0,0)$ y en $(t^2-1, t(t^2-1))$.

La función polinómica $\phi : A^1 \longrightarrow V$ dada por $\phi(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ es biyectiva salvo por que pasa dos veces por $(0,0)$, a saber, para $t = \pm 1$. Si llamamos $V_0 = V \setminus \{(0,0)\}$, entonces V_0 es una variedad abierta en V y la restricción $\phi : A^1 \setminus \{\pm 1\} \longrightarrow V_0$ es un isomorfismo. En efecto, su inversa es $\psi(x,y) = y/x$, que es regular, pues el denominador no se anula en V_0 (hay que comprobar además que $y/x \neq \pm 1$).

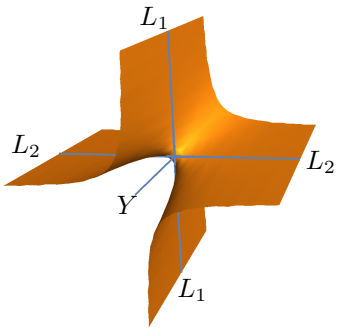
Por consiguiente, $\phi : A^1 \longrightarrow V$ es una aplicación birracional y así V es birracionalmente equivalente a una recta. Ahora no estamos en condiciones de probarlo, pero V no es isomorfa a una recta. ∎

Ejercicio: Probar que ϕ se extiende a una aplicación racional $\phi : \mathrm{P}^1 \longrightarrow \overline{V}$ tal que $\phi(1,0) = (0,1,0)$.

Ejemplo Sea $E = S_{1,1} = V(XZ - YW) \subset \mathrm{P}^3$ la variedad de Segre 1×1, que hemos identificado con $\mathrm{P}^1 \times \mathrm{P}^1$, y sea $e : E \longrightarrow \mathrm{P}^2$ la aplicación dada por $e(x,y,z,w) = (x,y,w)$, que es regular en $E \setminus \{(0,0,1,0)\}$.

Si tomamos como hiperplanos infinitos en P^3 y P^2 los dados por $W = 0$, tenemos que $E \cap H_\infty$ es la unión de las rectas $L_1 = V(X,W)$ y $L_2 = V(Z,W)$. Se cumple que $e[L_1] = \{(0,1,0)\}$ y $e[L_2] = H_\infty$.

Por otra parte, la restricción $e_* : E_* \longrightarrow A^2$ es simplemente la proyección $e_*(x,y,z) = (x,y)$. Cada punto de $A^2 \setminus V(X)$ tiene exactamente una antiimagen en E_*, a saber, $e_*(x,y,y/x) = (x,y)$. De hecho, es su única antiimagen en E.

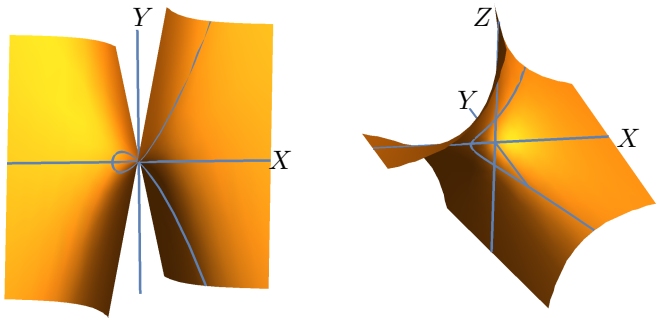


Los únicos puntos de $V(X)$ que tienen antiimagen son $(0,1,0)$ (el punto infinito del eje Y), cuyas antiimágenes son todos los puntos de L_1 menos $(0,0,1,0)$ (el punto infinito del eje Z), y $(0,0,1)$, cuyas antiimágenes son todos los puntos del eje Z menos su punto infinito, es decir, $V(X,Y) \setminus \{(0,0,1,0)\}$.

Ahora es claro que e no puede extenderse a una aplicación regular en $(0,0,1,0)$ pues, por continuidad, la imagen de este punto tendría que ser tanto $(0,1,0)$ como $(0,0,1)$.

En particular, si llamamos $U = E \setminus (V(X,W) \cup V(X,Y))$ y $U' = \mathrm{P}^2 \setminus V(X)$, tenemos que $e|_U : U \longrightarrow U'$ biyectiva (y regular). Su inversa es la restricción de la aplicación $e' : \mathrm{P}^2 \longrightarrow E$ dada por $e'(x,y,w) = (x^2, xy, yw, xw)$, que está definida y es regular salvo en los puntos $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Los puntos del eje Y distintos de estos dos tienen todos imagen $(0,0,1,0)$. En particular, $e' : U' \longrightarrow U$ es boyectiva (y regular) y es la inversa de e, por lo que e es una aplicación birracional.

En definitiva, $\mathrm{P}^1 \times \mathrm{P}^1$ es birracionalmente equivalente a P^2. La aplicación e se conoce como *explosión* del punto $(0,0)$. Está relacionada con el ejemplo precedente, pues la "curva alfa" que vemos a la izquierda en la figura siguiente no es realmente la curva alfa, sino la proyección de la curva en E que podemos ver en la figura de la derecha en la página siguiente.



Dicha curva debe satisfacer las ecuaciones $Y^2 = X^2(X+1)$ y $XZ = Y$, pero no sólo ellas, pues así estamos incluyendo todo el eje Z (es decir, $V(X,Y)$). Ahora bien, si sustituimos la segunda en la primera queda $X^2Z^2 = X^2(X+1)$ y, para puntos con $x \neq 0$ (todos los de la curva α menos $(0,0)$) esto equivale a $Z^2 = X + 1$. La curva afín V dada por las ecuaciones

$$Y^2 = X^2(X+1), \quad ZX = Y, \quad Z^2 = X + 1$$

siguen proyectándose sobre toda la curva α, pues la tercera ecuación conserva dos puntos del eje Z, a saber, $(0,0,\pm 1)$. En principio, la primera ecuación es ahora redundante, pues se deduce de las otras dos, pero la necesitamos para formar la clausura proyectiva V^*, dada por las ecuaciones:

$$Y^2W = X^2(X+W), \quad ZX = YW, \quad Z^2 = XW + W^2.$$

Sin la primera, estaríamos incluyendo la recta infinita $V(Z,W)$, cuando la clausura proyectiva de una curva irreducible tiene que ser irreducible. Con la primera ecuación obtenemos una curva irreducible, pues la parametrización afín $\alpha(t) = (t^2-1, t(t^2-1), t)$ de V se extiende a $\alpha : \mathrm{P}^1 \longrightarrow V^*$ mediante $\alpha(t,u) = (t^2u - u^3, t(t^2 - u^2), tu^2, u^3)$ y es fácil ver que α es un isomorfismo, luego V^* es irreducible. Notemos que su inversa es $\alpha^{-1}(x,y,z,w) = (y,x) = (z,w)$. ∎

Ejercicio: Probar que la curva plana $Y^2W = X^3$ se eleva a una curva sobre E isomorfa a P^1.

2.6 Aplicaciones finitas

Estudiamos ahora una clase de aplicaciones entre variedades, las aplicaciones finitas, que tendrá especial interés en el capítulo siguiente, principalmente porque allí definiremos el concepto de dimensión de una variedad algebraica y veremos que las aplicaciones finitas conservan la dimensión. Vamos a necesitar una consecuencia del lema de Nakayama que exponemos en la sección B.1.

Consideremos en primer lugar una aplicación regular densa $\phi : V \longrightarrow W$ entre variedades afines. Según el teorema 2.47 tenemos que $\bar{\phi} : k[W] \longrightarrow k[V]$

es un monomorfismo de anillos, que nos permite considerar a $k[W]$ como un subanillo de $k[V]$.

Definición 2.57 Diremos que una aplicación regular densa $\phi : V \longrightarrow W$ entre variedades afines es *finita* si $k[V]$ es una extensión entera de $k[W]$ (definición [TAl 2.8]).

Notemos que si ϕ es finita como aplicación entre variedades definidas sobre el cuerpo k, sigue siéndolo si las consideramos definidas sobre cualquier cuerpo mayor k' en el que V siga siendo irreducible, pues toda $f \in k'[V]$ se expresa como $f = \sum \alpha_i f_i$, con $\alpha_i \in k'$ y $f_i \in k[V]$. Los f_i son enteros sobre $k[W]$, luego también sobre $k'[W]$, e igualmente los α_i son enteros sobre k', luego sobre $k'[W]$. Por consiguiente, f es entero sobre $k'[W]$.

El teorema [TAl 2.15] implica que la composición de aplicaciones finitas es finita. Todo isomorfismo es trivialmente finito.

Ejemplo Sea V la hipérbola $XY = 1$ y sea $p : V \longrightarrow A^1$ la proyección $p(x, y) = x$. Ciertamente es una aplicación regular (polinómica) y es densa, pues su imagen es todo A^1 excepto el origen. Sin embargo, no es finita, pues $k[A^1] = k[X]$, $k[V] = k[x, y]$ y $\bar{p} : k[A^1] \longrightarrow k[V]$ viene dada por $\bar{p}(X)(x, y) = x$, es decir, $\bar{p}(X) = x$, con lo que podemos identificar $k[A^1] = k[x]$. Por lo tanto, $k[V] = k[A^1][y]$, pero y no es entero sobre $k[A^1]$, ya que su polinomio mínimo es $xY - 1$. ∎

Hemos dado este ejemplo para mostrar explícitamente cómo puede fallar la condición que define la finitud. Sin embargo, el resultado es obvio porque las aplicaciones finitas no sólo son densas, sino que, de hecho, son suprayectivas:

Teorema 2.58 *Toda aplicación finita entre variedades afines es suprayectiva y cada punto tiene un número finito de antiimágenes.*

Demostración: Podemos suponer que $V \subset A^n$. Además, la conclusión del teorema no depende de k, luego podemos suponer que $k = K$ es algebraicamente cerrado. Fijado un sistema de referencia en V, sea $k[V] = k[x_1, \ldots, x_n]$. Tomemos un punto $P \in W$. Para probar que $\phi^{-1}[P]$ es finito basta ver que cada coordenada x_i toma un número finito de valores sobre este conjunto.

Tenemos que x_i es entero sobre $k[W]$, luego satisface una relación de la forma

$$x_i^k + a_1 x_i^{k-1} + \cdots + a_k = 0,$$

para ciertas funciones $a_i \in k[W]$. Si $Q \in \phi^{-1}[P]$ tiene coordenadas x, entonces, evaluando la igualdad anterior en Q (teniendo en cuenta que, por la identificación, $a_j(Q) = a_j(\phi(Q)) = a_j(P)$) resulta que

$$x_i^k + a_1(P) x_i^{k-1} + \cdots + a_k(P) = 0,$$

con lo que las coordenadas i-ésimas de los puntos de $\phi^{-1}[P]$ son raíces de un mismo polinomio no nulo, luego son un número finito.

Veamos ahora la suprayectividad. Sea $\mathfrak{m}_P$ el ideal de $k[W]$ formado por las funciones que se anulan en P. Concretamente, si P tiene coordenadas $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ y $k[W]=k[y_1,\dots,y_m]$, entonces $\mathfrak{m}_P=(y_1-\alpha_1,\dots,y_m-\alpha_m)$.

La aplicación ϕ es regular, luego es polinómica. Consideremos polinomios $F_1,\dots,F_m$ tales que $\phi(P)=(F_1(P),\dots,F_m(P))$. Entonces $\phi^{-1}[P]$ es el conjunto algebraico determinado por las ecuaciones $F_i(X_1,\dots,X_n)-\alpha_i=0$. Así pues, $\phi^{-1}[P]=\varnothing$ equivale a que

$$(F_1-\alpha_1,\dots,F_m-\alpha_m)=k[X_1,\dots,X_n].$$

En tal caso tomamos clases módulo $I(V)$ y queda que

$$(\bar\phi(y_1)-\alpha_1,\dots,\bar\phi(y_m)-\alpha_m)=k[V].$$

Si identificamos $\bar\phi(y_i)$ con y_i, esto equivale a que $\mathfrak{m}_P\,k[V]=k[V]$ (o sea, el ideal generado por $\mathfrak{m}_p$ en $k[V]$ es $k[V]$). Sin embargo, el teorema B.2 nos dice que esto es imposible. ∎

El teorema siguiente nos permitirá extender la definición de aplicación finita al caso de aplicaciones entre variedades cuasiproyectivas arbitrarias.

Teorema 2.59 *Sea $\phi: V\longrightarrow W$ una aplicación regular entre variedades afines. Si todo punto $P\in W$ tiene un entorno afín U tal que $U'=\phi^{-1}[U]$ es afín y $\phi|_{U'}: U'\longrightarrow U$ es finita, entonces ϕ es finita.*

Demostración: Para cada $P\in W$, podemos tomar $\alpha\in k[W]$ tal que el abierto principal W_α esté contenido en un entorno U de P que cumpla el teorema. Entonces $\phi^{-1}[W_\alpha]=V_{\bar\phi(\alpha)}\subset U'$ es una subvariedad afín de V y es claro que la restricción de ϕ a $\phi^{-1}[W_\alpha]$ es finita, pues, llamando $\alpha'=\alpha|_U$, tenemos que

$$k[W_\alpha]=k[U_{\alpha'}]=k[U][1/\alpha'],\quad k[V_{\bar\phi(\alpha)}]=k[U'_{\bar\phi(\alpha')}]=k[U'][1/\alpha'].$$

Así pues, a las hipótesis del teorema podemos añadir que cada U es principal. Por consiguiente, tenemos a W cubierto por abiertos principales $\{W_\alpha\}_{\alpha\in S}$, para cierto $S\subset k[W]$. Si $\alpha=[F_\alpha]$, el ideal generado por $I(W)$ y los F_α no tiene ningún cero, luego es $k[X_1,\dots,X_n]$. Esto se traduce en que $(S)=k[W]$. Como $k[W]$ es noetheriano, existe un número finito de funciones $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in S$ de modo que $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=k[W]$ y, por lo tanto, los abiertos W_{α_i} cubren W.

Por [TAl 2.14] sabemos que $k[V_{\alpha_i}]=k[V][1/\alpha_i]$ es un $k[W_{\alpha_i}]$-módulo finitamente generado. Digamos que $k[V_{\alpha_i}]=\langle\omega_{i1},\dots,\omega_{in}\rangle_{k[W_{\alpha_i}]}$.

Podemos suponer que $\omega_{ij}\in k[V]$, pues si, en general, $\omega_{ij}/\alpha_i^{m_i}$ formaran un generador, los ω_{ij} también lo serían. Vamos a probar que $k[V]=\langle\omega_{ij}\rangle_{k[W]}$. De este modo, [TAl 2.9] implica entonces que los ω_{ij} son enteros sobre $k[W]$ y el teorema quedará probado.

Todo $\beta\in k[V]$ admite una expresión

$$\beta=\sum_j\frac{a_{ij}}{\alpha_i^{n_i}}\,\omega_{ij},\qquad a_{ij}\in k[W],$$

para cada i. Ningún punto de W es un cero común de todas las funciones $\alpha_i^{n_i}$, de donde se sigue que $(\{\alpha_i\}_i) = k[W]$. Así pues, existen funciones $h_i \in k[W]$ tales que $\sum_i \alpha_i^{n_i} h_i = 1$, luego

$$\beta = \beta\sum_i \alpha_i^{n_i} h_i = \sum_{i,j} a_{ij} h_i \omega_{ij} \in \langle \omega_{ij} \rangle_{k[W]}\,.$$

■

Definición 2.60 Una aplicación regular $\phi : V \longrightarrow W$ entre variedades cuasiproyectivas es *finita* si todo punto $P \in W$ tiene un entorno afín U tal que $U' = \phi^{-1}[U]$ es una subvariedad afín de V y $\phi|_{U'} : U' \longrightarrow U$ es finita.

El teorema 2.59 garantiza que esta definición coincide con la precedente para variedades afines. Además, el argumento usado al principio de la prueba muestra que si ϕ cumple esta definición entonces la cumple para entornos arbitrariamente pequeños de cada punto de W (más concretamente, la cumple para todo abierto principal de todo abierto que la cumpla). Por consiguiente:

Teorema 2.61 *Si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación finita y U es un abierto en W, entonces la restricción $\phi : \phi^{-1}[U] \longrightarrow U$ también es finita.*

Es obvio que la composición de aplicaciones finitas es finita. Igualmente, el teorema 2.58 es claramente válido para aplicaciones entre variedades cuasiproyectivas. Otra propiedad sencilla es la siguiente:

Teorema 2.62 *Las aplicaciones finitas son cerradas (es decir, la imagen de un conjunto cerrado por una aplicación finita es cerrada).*

Demostración: Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación finita y sea $C \subset V$ un conjunto cerrado. Por el teorema 2.29 podemos cubrir W por un número finito de variedades afines U tales que $U' = \phi^{-1}[U]$ es afín y la restricción de $\phi|_{U'}$ es finita. Basta probar que $\phi|_{U'}[C \cap U']$ es cerrado o, equivalentemente, podemos suponer que V y W son variedades afines. Tampoco perdemos generalidad si suponemos que C es irreducible. Es fácil ver entonces que $\overline{\phi[C]}$ es también irreducible.

La restricción $\phi|_C : C \longrightarrow \overline{\phi[C]}$ es finita, pues todo $\alpha \in k[C]$ se extiende a $\beta \in k[V]$, que es raíz de un polinomio mónico con coeficientes en $k[W]$, luego α es raíz del polinomio que resulta de restringir sus coeficientes a $\overline{\phi[C]}$. Como las aplicaciones finitas son suprayectivas, ha de ser $\phi[C] = \overline{\phi[C]}$, luego $\phi[C]$ es cerrado. ■

Ahora necesitamos un ejemplo importante de aplicación finita.

Definición 2.63 Sea E una subvariedad lineal de P^n (sobre k), es decir, el conjunto de los ceros de un sistema de d formas lineales $L_1, \ldots, L_d$ con coeficientes en k. Definimos la *proyección* de centro E como la aplicación racional $\pi : \mathrm{P}^n \longrightarrow \mathrm{P}^{d-1}$ (sobre k) dada por $\pi(x) = (L_1(x), \ldots, L_d(x))$. Es claro que π es regular en el abierto $\mathrm{P}^n \setminus E$.

Más en general, si C es una subvariedad cerrada de P^n disjunta de E, la restricción $\pi : C \longrightarrow \mathrm{P}^{d-1}$ es una aplicación regular. Vamos a ver que, de hecho, $\pi : C \longrightarrow \pi[C]$ es finita.

Notemos que $U_i = \pi^{-1}[A_i^{d-1}] \cap C$ es el abierto en C determinado por la condición $L_i(x) \neq 0$, luego es una variedad afín (es la intersección con C del complementario de un hiperplano de P^n). Además los abiertos U_i cubren C, luego basta probar que las restricciones $\pi : U_i \longrightarrow A_i^{d-1} \cap \pi[C]$ son finitas. Por simplificar la notación tomamos $i = 1$.

Por el teorema 2.38, cada $\alpha \in k[U_1]$ (vista como aplicación racional en C) es de la forma

$$\alpha = \frac{G(x_1, \ldots, x_{n+1})}{L_1^m(x_1, \ldots, x_{n+1})},$$

donde G es una forma de grado m. Sea $\pi_1 : C \longrightarrow \mathrm{P}^d$ dada por

$$\pi_1(x) = (L_1^m(x), \ldots, L_d^m(x), G(x)).$$

(Notemos que estamos trabajando en tres espacios proyectivos: P^n, P^{d-1} y P^d. Usaremos $X_1, \ldots, X_{n+1}$ para coordenadas en P^n, $Y_1, \ldots, Y_{d+1}$ para coordenadas en P^d y $Z_1, \ldots, Z_d$ para coordenadas en P^{d-1}.)

La aplicación π_1 es regular, pues si $x \in C$, alguna de las formas L_i^m no se anula. Por el teorema 2.49 tenemos que $\pi_1[C]$ es una subvariedad cerrada de P^d. Digamos que viene definida por las ecuaciones $F_1 = \cdots = F_s = 0$.

Como $C \cap E = \varnothing$, las formas L_i no tienen ningún cero común en C, luego el punto $(0, \ldots, 0, 1) \in \mathrm{P}^d$ no está en $\pi_1[C]$. Esto significa que las funciones $Y_1, \ldots, Y_d$, $F_1, \ldots, F_s$ no tienen ningún cero común en P^d. Por 2.5 existe un $N > 0$ tal que

$$(Y_1, \ldots, Y_d, Y_{d+1})^N \subset (Y_1, \ldots, Y_d, F_1, \ldots, F_s).$$

En particular Y_{d+1}^N está en el ideal de la derecha, luego

$$Y_{d+1}^N = \sum_{j=1}^{d} Y_j H_j + \sum_{j=1}^{s} F_j G_j,$$

para ciertos polinomios H_j y G_j. Llamando $H_j^{(q)}$ a la componente homogénea de grado q de H_j vemos que la forma

$$T(Y_1, \ldots, Y_{d+1}) = Y_{d+1}^N - \sum_{j=1}^{d} Y_j H_j^{(N-1)} \tag{2.4}$$

se anula sobre $\pi_1[C]$. Visto como polinomio en Y_{d+1}, tiene grado N y su coeficiente director es 1. Podemos expresarlo en la forma

$$T = Y_{d+1}^N + \sum_{j=0}^{N-1} A_{N-j}(Y_1, \ldots, Y_d) Y_{d+1}^j. \tag{2.5}$$

Sustituyendo en (2.4) la definición de π_1, vemos que $T(L_1^m,\dots,L_d^m,G)$ se anula en C. Según (2.5), tenemos que

$$G^N + \sum_{j=0}^{N-1} A_{N-j}(L_1^m,\dots,L_d^m)G^j = 0.$$

Dividiendo entre L_1^{mN} queda

$$\alpha^N + \sum_{j=0}^{N-1} A_{N-j}(1, L_2^m/L_1^m,\dots,L_d^m/L_1^m)\alpha^j = 0.$$

Esto es un polinomio mónico con coeficientes en $k[A_1^{d-1}\cap\pi[C]]$. Explícitamente, los coeficientes son las imágenes por $\bar\pi$ de las funciones regulares

$$A_{N-j}(1, z_2/z_1,\dots,z_d/z_1) = A_{N-j}(z_2,\dots,z_d),$$

donde hemos pasado de las coordenadas homogéneas a las coordenadas afines. ∎

Para generalizar este resultado necesitamos una nueva aplicación:

Definición 2.64 Es fácil ver que el número de $n+1$-tuplas $(i_1,\dots,i_{n+1})$ de números naturales que cumplen $i_1+\cdots+i_{n+1}=m$ es $N+1=\binom{n+m}{n}$. Por ello, podemos subindicar las coordenadas homogéneas de los puntos de P^N en la forma $(v_{i_1,\dots,i_{n+1}})$. Si (u_i) son las coordenadas homogéneas en P^n, definimos la *inmersión de Veronese* $V_m : \mathrm{P}^n \longrightarrow \mathrm{P}^N$ como la aplicación que a cada $(u_1,\dots,u_{n+1})\in\mathrm{P}^n$ le asigna el punto cuya coordenada homogénea $v_{i_1,\dots,i_{n+1}}$ es $u_1^{i_1}\cdots u_{n+1}^{i_{n+1}}$.

Se trata de una aplicación regular, pues entre las coordenadas de la imagen están las u_i^m, que no se anulan simultáneamente. Los puntos de la imagen satisfacen las ecuaciones

$$v_{i_1,\dots,i_{n+1}}v_{j_1,\dots,j_{n+1}} = v_{k_1,\dots,k_{n+1}}v_{l_1,\dots,l_{n+1}}, \tag{2.6}$$

siempre que $i_1+j_1=k_1+l_1$, …, $i_{n+1}+j_{n+1}=k_{n+1}+l_{n+1}$.

Recíprocamente, si un punto de P^N cumple estas ecuaciones está en la imagen de V_m. Para probarlo observamos que de ellas se sigue que algún $v_{0,\dots,m,\dots,0}\neq 0$. En efecto, tomamos una coordenada $v_{i_1,\dots,i_{n+1}}\neq 0$. Supongamos que $i_1\neq 0$, sea $r>0$ tal que $ri_1\geq m$. Así, aplicando (2.6) varias veces podemos expresar $v^r_{i_1,\dots,i_{n+1}}$ como producto de r coordenadas entre las cuales está $v_{m,0,\dots,0}\neq 0$. Así pues, el conjunto algebraico determinado por (2.6) está cubierto por los abiertos U_i formados por los puntos con $v_{0,\dots,m,\dots,0}\neq 0$ (donde la m está en la posición i). Es fácil ver que cada punto de U_1 tiene como antiimagen a

$$V_m^{-1}(v_{i_1,\dots,i_{n+1}}) = (v_{m,0,\dots,0}, v_{m-1,1,0,\dots,0},\dots,v_{m-1,0,\dots,0,1}).$$

Para los demás abiertos U_i tenemos una expresión similar, luego la imagen de V_m es el conjunto algebraico determinado por las ecuaciones (2.6). Se trata de una variedad, pues si se descompusiera en variedades, sus antiimágenes formarían una descomposición de P^n. Además, las expresiones que hemos obtenido para V_m^{-1} muestran que V_m^{-1} también es regular, luego es un isomorfismo.

La variedad $V_m[\mathrm{P}^n]$ se llama *variedad de Veronese,* y hemos probado que es isomorfa a P^n.

El interés de la variedad de Veronese se debe a que si

$$F = \sum a_{i_1,\ldots,i_{n+1}} u_1^{i_1} \cdots u_{n+1}^{i_{n+1}}$$

es una forma de grado m y $H = V(F) \subset \mathrm{P}^n$, entonces $V_m[H]$ es la intersección con $V_m[\mathrm{P}^m]$ del hiperplano de ecuación $\sum a_{i_1,\ldots,i_{n+1}} v_{i_1,\ldots,i_{n+1}} = 0$.

Esto nos permite probar:

Teorema 2.65 *Si $F_1, \ldots, F_{r+1}$ son formas de grado m en P^n que no se anulan simultáneamente en una variedad cerrada $C \subset \mathrm{P}^n$, entonces $\phi : C \longrightarrow \mathrm{P}^r$ dada por*

$$\phi(x) = (F_1(x), \ldots, F_{r+1}(x))$$

es una aplicación finita en su imagen.

Demostración: Consideramos la inmersión de Veronese $V_m : \mathrm{P}^n \longrightarrow \mathrm{P}^N$. Sean $L_1, \ldots, L_{r+1}$ las formas lineales correspondientes con $F_1, \ldots, F_{r+1}$ en P^N y sea $\pi : V_m[C] \longrightarrow \mathrm{P}^r$ la proyección definida en 2.63. Es claro que $\phi = V_m \circ \pi$. Como V_m es un isomorfismo y π es finita, concluimos que ϕ también es finita. ∎

Terminamos con dos resultados que necesitaremos más adelante:

Teorema 2.66 (Teorema de normalización de Noether) *Si V es una variedad afín, existe una aplicación finita $\phi : V \longrightarrow A^n$, para cierto n.*

Demostración: Sea $V \subset A^N$. Podemos suponer que $V \neq A^N$. Sea $\overline{V} \subset \mathrm{P}^N$ la clausura de V. Entonces $\overline{V} \neq \mathrm{P}^N$. Tomemos un punto $P \in \mathrm{P}^N \setminus A^N$ tal que $P \notin \overline{V}$ y consideramos la proyección $\phi : \overline{V} \longrightarrow \mathrm{P}^{N-1}$ (definición 2.63). Sabemos que es finita. Concretamente, si $P = (1, a_1, \ldots, a_N, 0)$, será

$$\phi(X_1, \ldots, X_{N+1}) = (a_2X_1 - X_2, \cdots, a_NX_1 - X_N, X_{N+1}).$$

Es claro que $\phi[V] \subset A^{N-1}$. Si no se da la igualdad entonces, por continuidad y el teorema 2.49, tenemos que $\phi[\overline{V}] = \overline{\phi[V]}$. Podemos repetir el argumento para obtener una aplicación finita $\phi_1 : \overline{\phi[V]} \longrightarrow \mathrm{P}^{N-2}$. Tras un número finito de pasos se ha de dar la igualdad, y la composición de todas las aplicaciones construidas es la aplicación finita buscada. ∎

Teorema 2.67 *Si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación regular densa entre variedades, entonces $\phi[V]$ contiene un abierto no vacío.*

DEMOSTRACIÓN: Si U es un abierto afín en W y U' es un abierto afín en $\phi^{-1}[U]$, es claro que $\phi|_{U'} : U' \longrightarrow U$ sigue siendo una aplicación regular densa, luego podemos suponer que V y W son variedades afines. Según 2.47, podemos identificar a $k[W]$ con un subanillo de $k[V]$ a través de $\bar{\phi}$. Sea r el grado de trascendencia de $k(V)$ sobre $k(W)$. Podemos tomar $u_1, \ldots, u_r \in k[V]$ algebraicamente independientes sobre $k(W)$.

Entonces $k[W][u_1, \ldots, u_r] \cong k[W \times A^r]$. Fijando un isomorfismo, podemos factorizar $\bar{\phi} = \bar{\psi} \circ \bar{\chi}$, donde $\bar{\psi} : k[W] \longrightarrow k[W \times A^r]$ y $\bar{\chi} : k[W \times A^r] \longrightarrow k[V]$. Estos monomorfismos inducen a su vez aplicaciones regulares $\chi : V \longrightarrow W \times A^r$ y $\psi : W \times A^r \longrightarrow W$ de modo que $\phi = \chi \circ \psi$. Por 2.47 ambas son densas. De hecho es fácil ver que ψ es simplemente la proyección.

Sea $k[V] = k[v_1, \ldots, v_m]$. Por [TAl 2.16] existen $a_1, \ldots, a_m \in k[W \times A^r]$ tales que $a_i v_i$ es entero sobre $k[W \times A^r]$. Sea $f = a_1 \cdots a_m \in k[W \times A^r]$.

Consideramos el abierto $(W \times A^r)_f$ definido en 2.38. Como las funciones a_i son inversibles en $k[(W \times A^r)_f] = k[W \times A^r][1/f]$, concluimos que las funciones v_i son enteras sobre este anillo. Por lo tanto, la restricción

$$\chi : V_{\bar{\phi}(f)} \longrightarrow (W \times A^r)_f$$

es finita, luego es suprayectiva. En particular, $(W \times A^r)_f \subset \chi[V]$, de donde a su vez $\psi[(W \times A^r)_f] \subset \phi[V]$. Basta probar que $\psi[(W \times A^r)_f]$ contiene un abierto en W. Sea $k[W] = k[x_1, \ldots, x_s]$ y $k[A^r] = k[u_1, \ldots, u_r]$. Entonces f es un polinomio en $x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_r$. Digamos que

$$f = \sum_{i_1,\ldots,i_r} F_{i_1,\ldots,i_r}(x_1, \ldots, x_s) u_1^{i_1} \cdots u_r^{i_r}.$$

Como $f \neq 0$, algún $F_0 = F_{i_1,\ldots,i_r}$ no es idénticamente nulo en W. Sea $f_0 = [F] \in k[W]$. Se cumple que $W_{f_0} \subset \psi[(W \times A^r)_f]$, pues si $x \in W_{f_0}$ podemos tomar $u \in A^r$ tal que $f(x, u) \neq 0$, luego $(x, u) \in (W \times A^r)_f$ y así $x = \psi(x, u) \in \psi[(W \times A^r)_f]$. ∎

Este resultado es útil para reducir problemas concernientes a aplicaciones entre variedades arbitrarias al caso de aplicaciones entre variedades afines. Concretamente:

Teorema 2.68 *Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación densa entre variedades. Entonces existe un abierto afín $U \subset W$ tal que $U' = \phi^{-1}[U]$ es afín.*

DEMOSTRACIÓN: Sea U un abierto afín en W. El abierto $\phi^{-1}[U]$ no tiene por qué ser afín, pero contiene un abierto afín U', cuya imagen $\phi[U']$ será densa en U. Por el teorema anterior aplicado a $\phi|_{U'} : U' \longrightarrow U$ obtenemos que $\phi[U']$ contiene un abierto, que podemos tomar de la forma U_α, para cierta $\alpha \in k[U]$. Entonces $\phi^{-1}[U_\alpha] = U'_{\bar{\phi}(\alpha)}$ es afín. ∎

Capítulo III

Dimensión

En este capítulo asociaremos un invariante a cada variedad algebraica que se corresponde con la noción geométrica de dimensión. Luego estudiaremos la dimensión desde un punto de vista local, a través de las variedades tangentes y, por último, estudiaremos con más detalle las variedades de dimensión 1, es decir, las curvas algebraicas.

La idea intuitiva de lo que es, o debe ser, la dimensión de una variedad es muy clara, pero no es evidente cómo capturarla en una definición precisa. En la geometría afín se define la dimensión de una variedad lineal afín en términos del número de parámetros necesarios para determinar la posición de un punto: No hace falta ningún parámetro para localizar un punto en un punto, hace falta un parámetro para localizar un punto en una recta, hacen falta dos parámetros para localizar un punto en un plano, etc.

Esta idea puede adaptarse con algunas concesiones para el caso de variedades algebraicas cualesquiera. Pensemos por ejemplo en la esfera afín V determinada por la ecuación $X^2+Y^2+Z^2=1$. Está claro que "debe" tener dimensión 2, pero ¿cómo hay que entender esto exactamente? La geometría diferencial, o incluso la mera topología, nos dicen que $V(\mathbb{R})$ tiene dimensión 2 porque cada uno de sus puntos tiene un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, pero esta idea no es expresable algebraicamente ni generalizable a variedades sobre cuerpos arbitrarios.

Una observación más oportuna es que podemos dar a X y a Y valores arbitrarios, y siempre encontraremos un punto de V (tal vez imaginario) con esos valores prefijados. En cambio, una vez hemos fijado valores para X e Y, ya no podemos elegir arbitrariamente un valor para Z, sino que Z está obligado a tomar a lo sumo dos valores posibles. Podemos expresar esto diciendo que tenemos libertad plena para fijar dos coordenadas de un punto de V, pero que, una vez fijadas éstas, las posibilidades para tercera coordenada están fuertemente condicionadas por las dos elecciones previas.

Esto puede traducirse "más o menos fielmente" al lenguaje algebraico en los términos siguientes: Las funciones coordenadas $x, y \in k(V)$ son algebraicamente independientes sobre k, mientras que $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ es algebraico sobre $k(x,y)$, de modo que $k(V)$ es una extensión finita (de grado 2) de $k(x,y)$.

El grado 2 no es importante (daría igual que el grado fuera 7), lo que importa es que el grado de trascendencia de $k(V)$ sobre k es 2. Vamos a ver que eso está expresando que V es una superficie, que una base de trascendencia en $k(V)$ se corresponde con un conjunto de coordenadas cuyos valores podemos elegir libremente y que a su vez limitan drásticamente los valores que pueden tomar las coordenadas restantes.

De hecho, vamos a definir la dimensión de una variedad algebraica precisamente como el grado de trascendencia de la extensión $k(V)/k$. Sin embargo, aunque ejemplos como el anterior sugieren que esto no es descabellado, no podemos asegurar *a priori* que en todos los casos nos dé el valor intuitivamente esperable para la dimensión de una variedad. Afortunadamente, podremos demostrar que esta definición "técnica" algebraica coincide con otra definición alternativa intuitivamente irreprochable.

Concretamente, es intuitivamente razonable que las variedades (absolutas) de dimensión 0 sean exactamente los puntos, y a su vez, es intuitivamente razonable que las variedades (absolutas) de dimensión 1, es decir, lo que llamaremos "curvas", sean las variedades cuyas únicas subvariedades estrictas (no vacías) sean puntos, y es razonable que las variedades (absolutas) de dimensión 2 sean precisamente aquellas cuyas subvariedades estrictas (no vacías) sean necesariamente puntos o curvas, y así sucesivamente.

3.1 La dimensión de un conjunto algebraico

De acuerdo con la discusión precedente, vamos a estudiar la definición siguiente de dimensión de un conjunto algebraico:

Definición 3.1 Llamaremos *dimensión* de una variedad (cuasiproyectiva) V no vacía (sobre k) al grado de trascendencia de la extensión $k(V)/k$. La representaremos por $\dim V$. Para $V = \varnothing$ tenemos que $k(V) = 0$, y en este caso convenimos en que $\dim \varnothing = -1$.

Definimos la *dimensión* de un conjunto algebraico como el máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles. Un conjunto algebraico tiene *dimensión pura* si todas sus componentes irreducibles tienen la misma dimensión.

Si $W \subset V$ son conjuntos algebraicos, se llama *codimensión* de W en V a la diferencia $\dim V - \dim W$. Cuando se habla de la codimensión de un conjunto algebraico sin especificar respecto a qué otro, se entiende que es respecto al espacio A^n o P^n que lo contiene.

Notemos que si V es un abierto en una variedad W, por definición V y W tienen el mismo cuerpo de funciones racionales, luego $\dim V = \dim W$.

Por el teorema 2.56, dos variedades birracionalmente equivalentes (en particular, isomorfas) tienen la misma dimensión.

Vamos a probar en primer lugar que la dimensión de un conjunto algebraico no depende del cuerpo k sobre el que se calcula. Empezamos observando el efecto de una extensión algebraica:

Teorema 3.2 *Si V es una variedad (sobre k) y k'/k es una extensión algebraica, entonces las componentes irreducibles de V sobre k' tienen todas la misma dimensión que V. En particular, la dimensión de V sobre k es la misma que sobre k'.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\overline{V} \subset \mathrm{P}^n$ la clausura proyectiva de V (que es la misma respecto de la topología de Zariski relativa a k o a k'). Si C es una componente irreducible de V respecto de k', entonces $\overline{C}$ lo es de $\overline{V}$, y $\dim_k V = \dim_k \overline{V}$, $\dim_{k'} C = \dim_{k'}(\overline{C})$, luego basta probar que $\dim_k \overline{V} = \dim_{k'} \overline{C}$. Equivalentemente, podemos suponer que $V \subset \mathrm{P}^n$ es una variedad proyectiva.

Tomamos un hiperplano infinito que no contenga a V y, razonando igualmente, vemos que podemos cambiar V por $V \cap A^n$, con lo que no perdemos generalidad si suponemos que $V \subset A^n$ es una variedad afín.

Por el teorema 1.39 (véase la observación posterior), el homomorfismo natural $k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow k'[C]$ tiene por núcleo $I_k(V)$, luego podemos considerar $k[V] \subset k'[C]$, y a su vez $k(V) \subset k'(C)$. De hecho, $k'(C) = k(V)k'$, pues todo elemento de $k'[C]$ es combinación lineal de elementos de $k[V]$ con coeficientes en k'. Por lo tanto, teniendo en cuenta que las extensiones k'/k y $k'(C)/k(V)$ son algebraicas,

$$\dim_{k'} C = \mathrm{gt}(k'(C)/k') = \mathrm{gt}(k'(C)/k) = \mathrm{gt}(k(V)/k) = \dim_k V.$$

∎

Más en general, ahora es claro que la dimensión de cualquier conjunto algebraico C no se altera por una extensión algebraica del cuerpo de definición, pues cada componente irreducible de C se escindirá (tal vez) el componentes irreducibles de la misma dimensión, luego el máximo de las dimensiones de las componentes irreducibles será el mismo.

Teorema 3.3 *Si $k \subset k' \subset K$, la dimensión de un conjunto algebraico definido sobre k es la misma sobre k o sobre k'.*

DEMOSTRACIÓN: Sea V un conjunto algebraico. Basta probar que la dimensión de V sobre k es la misma que sobre K, pues, por el mismo motivo, la dimensión de V sobre k' también será la dimensión de V sobre K.

Por el teorema anterior, la dimensión de V sobre k es la misma que sobre $\bar{k}$, luego no perdemos generalidad si suponemos que k es algebraicamente cerrado. A su vez, pasando a una componente irreducible arbitraria de V, podemos suponer que V es irreducible sobre k (luego también sobre K). Pasando a la clausura $\overline{V} \subset \mathrm{P}^n$ y luego a $\overline{V} \cap A^n$, podemos suponer que $V \subset A^n$ es una variedad afín.

Tomamos un cuerpo algebraicamente cerrado Ω que tenga grado de trascendencia infinito sobre K, y sustituimos V por su clausura en $A^n(\Omega)$. Así, según el teorema 1.28, existe un punto genérico $\xi \in V$ tal que $k(\xi)$ y K son linealmente disjuntos. Entonces

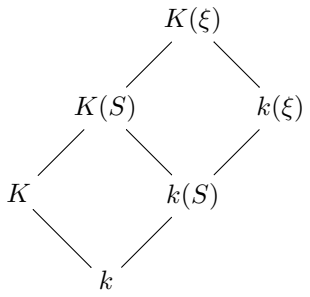
$$I_k(V) = \{F \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid F(\xi) = 0\}$$

y, por el teorema 1.31,

$$(I_k(V)) = \{F \in K[X_1, \dots, X_n] \mid F(\xi) = 0\},$$

que es un ideal primo, luego es $I_K(V)$. Esto significa que ξ también es un punto genérico de V como variedad definida sobre K.

Por [Al 13.39], tenemos que $k(\xi)$ y K son libres sobre K, lo que significa que si $S \subset k(\xi)$ es una base de trascendencia sobre k, también es algebraicamente independiente sobre K. Por lo tanto, tenemos la situación siguiente:



Como $\xi_1, \dots, \xi_n$ son algebraicos sobre $k(X)$ (luego sobre $K(S)$), tenemos que $K(\xi)/K(S)$ también es una extensión algebraica, y así $\operatorname{gt}(K(\xi)/K) = \operatorname{gt}(k(\xi)/k)$. Ahora bien, según la observación tras el teorema 1.27, existe un K-isomorfismo $K(\xi) \cong K(V)$ y un k-isomorfismo $k(\xi) \cong k(V)$, luego $\dim_K V = \dim_k V$. ∎

Vamos a calcular la dimensión de algunas variedades sencillas:

Espacios afines y proyectivos Es claro que $\dim A^n = \dim \mathrm{P}^n = n$, pues su cuerpo de funciones racionales es $k(X_1, \dots, X_n)$.

Puntos Los conjuntos algebraicos de dimensión 0 son los conjuntos finitos.

En efecto, si P es un punto en cualquier espacio P^n, es claro que se trata de una variedad afín para la que $K[P] = K(P) = K$ (las funciones regulares han de ser constantes), luego $\dim P = 0$.

Más en general, si $C \subset \mathrm{P}^n$ es un conjunto finito, es un conjunto algebraico cuyas componentes (geométricamente) irreducibles son puntos, luego su dimensión es también 0.

Recíprocamente, si V es una variedad absoluta de dimensión 0, también tiene dimensión 0 sobre K. Pasando a su clausura podemos suponer que es cerrada en P^n y cortándola con un espacio afín podemos suponer que es una variedad afín (ninguna de estas operaciones altera el cuerpo de funciones racionales). Como $K(V)$ es algebraico sobre K y K es algebraicamente cerrado, tiene que ser $K(V) = K$ y también $K[V] = K$. Así pues, las funciones coordenadas son constantes y V es un punto.

Si C es cualquier conjunto algebraico de dimensión 0, entonces sus componentes geométricamente irreducibles son variedades absolutas de dimensión 0, luego son puntos, luego C es un conjunto finito. ∎

Variedades lineales Hemos probado que si V es una variedad lineal afín o proyectiva y su dimensión (en el sentido de la geometría afín o proyectiva) es d, entonces es isomorfa a A^d o a P^d, respectivamente, luego su dimensión en el sentido que hemos introducido aquí es también d. ∎

Productos Si V y W son variedades, entonces

$$\dim V \times W = \dim V + \dim W.$$

En efecto, como $V \times W$ es abierto en $\overline{V} \times \overline{W}$, no perdemos generalidad si suponemos que las variedades son proyectivas. Por el mismo motivo, podemos cortarlas con espacios afines y suponer que son afines. Digamos que $V \subset A^M$, $W \subset A^N$, $\dim V = m$ y $\dim W = n$. Sean $x_1, \ldots, x_M$ las coordenadas en V e $y_1, \ldots, y_N$ las coordenadas en W. Podemos suponer que $x_1, \ldots, x_m$ son algebraicamente independientes, al igual que $y_1, \ldots, y_n$.

Tenemos que $k(V \times W) = k(x_1, \ldots, x_M, y_1, \ldots, y_N)$ y es claro que todos los generadores dependen algebraicamente de $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$. Basta probar que estas coordenadas son algebraicamente independientes. Supongamos que $F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0$. Entonces, para cada punto $(a_1, \ldots, a_M) \in V$, el polinomio $F(a_1, \ldots, a_m, Y_1, \ldots, Y_n)$ anula a $y_1, \ldots, y_n$ en $k(W)$, luego ha de ser el polinomio nulo. Esto significa que cada uno de los coeficientes $a(X_1, \ldots, X_m)$ de F se anula sobre todos los puntos de V, es decir, anula a $x_1, \ldots, x_m$ en $k(V)$, luego $a(X_1, \ldots, X_m) = 0$ y, en conclusión, $F = 0$. ∎

Conos Si V es una variedad proyectiva, $\mathrm{Cn}(V)$ es una variedad afín y

$$\dim \mathrm{Cn}(V) = \dim V + 1.$$

Ciertamente el cono $\mathrm{Cn}(V)$ es una variedad, pues el ideal $I(\mathrm{Cn}(V)) = I(V)$ es un ideal primo. Digamos que $V \subset \mathrm{P}^n$. Podemos suponer que V no está contenida en el hiperplano $X_{n+1} = 0$, de modo que $V' = V \cap A^n$ es una variedad afín de la misma dimensión (es abierta en V). Igualmente,

$$\mathrm{Cn}(V)' = \{X \in \mathrm{Cn}(V) \mid X_{n+1} \neq 0\}$$

es abierto en $\mathrm{Cn}(V)$, luego tiene la misma dimensión. Basta observar que la aplicación $\phi : \mathrm{Cn}(V)' \longrightarrow V' \times A^1$ dada por

$$\phi(X) = (X_1/X_{n+1}, \ldots, X_n/X_{n+1}, X_{n+1})$$

es un isomorfismo. Claramente es biyectiva y regular, y su inversa es

$$(X, Y) \mapsto (YX_1, \ldots, YX_n, Y),$$

que también es regular. ∎

Veamos ahora algunos resultados básicos.

Teorema 3.4 *Si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación finita entre variedades, entonces* $\dim V = \dim W$.

DEMOSTRACIÓN: Podemos restringir ϕ a una aplicación finita entre abiertos en V y W que sean variedades afines. Por ser abiertos tendrán la misma dimensión que las variedades que los contienen, luego en definitiva podemos suponer que V y W son variedades afines. Entonces $k[V]$ es una extensión entera de $k[W]$, luego $k(V)$ es una extensión algebraica de $k(W)$, luego ambas tienen el mismo grado de trascendencia sobre k. ∎

Teorema 3.5 *Sean $V \subset W$ dos variedades. Entonces $\dim V \leq \dim W$. Si V es cerrada y $\dim V = \dim W$ entonces $V = W$.*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que $W \subset \mathrm{A}^n$. Si $\dim W = m$ y $x_1, \ldots, x_{m+1}$ son $m+1$ funciones coordenadas cualesquiera, tenemos que satisfacen una relación polinómica, y sus restricciones a V cumplirán la misma relación, luego serán algebraicamente dependientes en $k(V)$. Por consiguiente $\dim V \leq m$.

Supongamos ahora que V es cerrada y que $\dim V = \dim W = m$. Tenemos que $I(W) \subset I(V)$, y basta probar la otra inclusión. Sea, pues $F \in I(V)$ un polinomio y supongamos que no es nulo en W. Sea $f = [F] \in k[W]$. Sea $x_1, \ldots, x_m$ una base de trascendencia de $k(V)$ formada por funciones coordenadas. Es claro que estas funciones han de ser algebraicamente independientes en $k(W)$ y, por la hipótesis sobre las dimensiones, han de ser una base de trascendencia de $k(W)$. Por consiguiente f es raíz de un polinomio irreducible

$$a_r(x_1, \ldots, x_m)f^r + \cdots + a_1(x_1, \ldots, x_m)f + a_0(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

de modo que en particular $a_0 \neq 0$. Ahora bien, esta ecuación se cumple también en V, donde además $f = 0$, luego ha de ser $a_0(x_1, \ldots, x_n) = 0$ en V. Pero las funciones x_i son algebraicamente independientes en $k(V)$, luego ha de ser $a_0 = 0$, contradicción. Así pues, $F \in I(W)$. ∎

Teorema 3.6 *Un subconjunto algebraico C de A^n o P^n es definible por una sola ecuación si y sólo si tiene dimensión pura $n-1$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que C está definido por una única ecuación (no nula) $F = 0$. No perdemos generalidad si suponemos que $C \subset A^n$. Sea $F = F_1^{r_1} \cdots F_m^{r_m}$ la descomposición de F en factores irreducibles. Es claro que

$$C = V(F) = V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_m)$$

y basta probar el teorema para cada $V(F_i)$, es decir, podemos suponer que F es irreducible. Entonces (F) es un ideal primo, luego C es una variedad, pues $I(C) = I(V(F)) = \mathrm{rad}(F) = (F)$. Supongamos que la variable X_n aparece en el polinomio $F(X_1, \ldots, X_n)$ y veamos que $x_1, \ldots, x_{n-1}$ son algebraicamente independientes en $k(C)$. En efecto, si se cumpliera una relación $G(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$, entonces $G(X_1, \ldots, X_{n-1}) \in (F)$, lo cual es imposible. Por consiguiente $\dim C \geq n-1$ y por el teorema anterior, puesto que $C \neq A^n$, ha de ser $\dim C = n-1$.

Para probar el recíproco podemos suponer que C es irreducible, así como que es una variedad afín $C \subset A^n$. Como $\dim C = n-1$, en particular $C \neq A^n$, luego $I(C) \neq 0$. Sea $F \in I(C)$ no nulo. Como $I(C)$ es primo, podemos suponer que F es irreducible. Entonces $C \subset V(F)$, pero por la parte ya probada sabemos que $\dim C = n-1 = \dim V(F)$, y por el teorema anterior concluimos que $C = V(F)$. ∎

Definición 3.7 Las variedades de dimensión 1 se llaman *curvas* (algebraicas), las variedades de dimensión 2 se llaman *superficies* (algebraicas). Las subvariedades de A^n o P^n de dimensión $n-1$ se llaman *hipersuperficies.*

Anteriormente habíamos definido las hipersuperficies afines o proyectivas como las variedades afines o proyectivas definibles por una única ecuación. El teorema anterior prueba que la nueva definición coincide con la anterior. También habíamos definido las curvas planas como las hipersuperficies de A^2 o P^2, con lo que ahora vemos que son un caso particular de curvas algebraicas.

El hecho de que las hipersuperficies sean las superficies con la definición más simple posible no impide que sean muy representativas, tal y como muestra el teorema siguiente:

Teorema 3.8 *Toda V variedad de dimensión n tal que la extensión $k(V)/k$ sea regular es birracionalmente equivalente a una hipersuperficie de A^{n+1}.*

Demostración: Por hipótesis la extensión $k(V)/k$ es separable (definición [Al 13.42]), luego podemos tomar una base de trascendencia $x_1, \ldots, x_n$ de $k(V)$ de manera que la extensión $k(V)/k(x_1, \ldots, x_n)$ sea separable. Por el teorema del elemento primitivo, existe $x_{n+1} \in k(V)$ tal que $k(V) = k(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Sea $F(x_1, \ldots, x_n, X_{n+1})$ el polinomio mínimo de x_{n+1} sobre $k(x_1, \ldots, x_n)$.

El homomorfismo $k[X_1, \ldots, X_{n+1}] \longrightarrow k(V)$ dado por $X_i \mapsto x_i$ tiene por núcleo (F), luego $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]/(F) \cong k[x_1, \ldots, x_{n+1}]$. En particular es un dominio íntegro y (F) es primo. Por consiguiente $W = I(F)$ es una subvariedad de A^{n+1} tal que $k[W] \cong k[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, luego $k(W) \cong k(V)$ y, por 2.56, concluimos que V es birracionalmente equivalente a W. Esto implica a su vez que $\dim W = n$, luego W es una hipersuperficie de A^{n+1}. ∎

En particular toda curva es birracionalmente equivalente a una curva plana.

Ya sabemos que cuando a los puntos de P^N les imponemos una restricción polinómica, pasamos a un conjunto de dimensión $N-1$. Ahora generalizaremos esto demostrando que cada ecuación (no redundante) que añadimos a un conjunto algebraico disminuye una unidad la dimensión.

Teorema 3.9 *Sea $V \subset \mathrm{P}^N$ una variedad proyectiva de dimensión n y consideremos una forma $F \in k[X_1, \ldots, X_{N+1}]$ que no sea idénticamente nula en V. Sea*

$$V_F = \{P \in V \mid F(P) = 0\}.$$

Entonces $\dim V_F = n-1$.

DEMOSTRACIÓN: Observemos en general que si C es un conjunto algebraico proyectivo, no necesariamente irreducible, existe una forma G de cualquier grado m prefijado que no es idénticamente nula en ninguna componente irreducible de C. Basta tomar un punto de cada componente de C, tomar una forma lineal L que no se anule en ninguno de ellos y considerar $G = L^m$. (Para encontrar L basta tomar un punto que no sea solución de un número finito de ecuaciones lineales, o sea, fuera del conjunto algebraico definido por el producto de todas ellas.)

Llamemos $V^0 = V$, $F_0 = F$ y $V^1 = V_F$. Sea ahora F_1 una forma del mismo grado que F que no se anule en ninguna componente irreducible de V^1 y sea $V^2 = V^1_{F_1}$, etc. Por el teorema 3.5 tenemos que

$$\dim V^0 > \dim V^1 > \cdots$$

Por consiguiente $V^{n+1} = \varnothing$. Esto significa que las formas $F_0, \ldots, F_n$ no tienen ceros comunes en V. Sea $\phi : V \longrightarrow \mathrm{P}^n$ la aplicación dada por

$$\phi(P) = (F_0(P), \ldots, F_n(P)).$$

Según 2.65, la aplicación ϕ es finita en su imagen, luego

$$n = \dim V = \dim \phi[V] \leq \dim \mathrm{P}^n = n,$$

luego ϕ es suprayectiva. Ahora bien, si fuera $\dim V_F < n-1$, en realidad $V^n = \varnothing$, luego las formas $F_0, \ldots, F_{n-1}$ no tendrían ceros comunes en V. A su vez, esto se traduciría en que el punto $(0, \ldots, 0, 1)$ no estaría en la imagen de ϕ, contradicción. ∎

De aquí se sigue inmediatamente que una variedad posee subvariedades de cualquier dimensión menor que la suya. Observemos que lo que hemos probado es que al menos una componente irreducible de V_F tiene dimensión $n-1$, aunque en principio podría haber otras componentes de dimensión menor. Vamos a ver que no es así:

Teorema 3.10 *Bajo las hipótesis del teorema anterior, V_F tiene dimensión pura $n-1$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos la aplicación finita $\phi : V \longrightarrow \mathrm{P}^n$ construida en la prueba del teorema anterior y sean A^n_i los subespacios afines de P^n determinados por $X_i \neq 0$. Sea $U_i = \phi^{-1}[A^n_i]$. Así

$$U_i = \{P \in V \mid F_i(P) \neq 0\}.$$

Si $V \subset \mathrm{P}^k$, la inmersión de Veronese $V_m : \mathrm{P}^k \longrightarrow \mathrm{P}^N$ transforma U_i es una variedad isomorfa contenida en el complementario de un hiperplano de P^N, es decir, en una variedad afín. Por lo tanto U_i es afín.

Toda componente irreducible W de V_F corta a algún U_i, y entonces $W \cap U_i$ es abierto en W, luego tiene la misma dimensión. Así pues, basta probar que cada componente irreducible de $V_F \cap U_i$ tiene dimensión $n-1$ (de hecho, basta ver que es $\geq n-1$). Por abreviar omitiremos el subíndice $U = U_i$.

Sea $f = [F]/[F_i] \in k[U]$. De este modo,

$$C = V_F \cap U = \{P \in U \mid f(P) = 0\}.$$

Sean $f_1, \ldots, f_n \in k[U]$ las funciones $[F_j]/[F_i]$ para $j \neq i$. Notemos que $f = f_1$. Por 2.61, la aplicación ϕ se restringe a una aplicación finita $\phi : U \longrightarrow A^n$ cuyas funciones coordenadas son las f_i. Así pues, $\bar{\phi} : k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow k[U]$ cumple $\phi(X_i) = f_i$.

Ahora podemos sustituir U por una variedad isomorfa $U \subset A^m$. Digamos que $f_i = [F_i]$, para ciertos polinomios $F_i \in k[Y_1, \ldots, Y_m]$ (que no tienen nada que ver con las formas F_i anteriores).

Sea W una componente irreducible de C. Basta probar que las funciones $f_i|_W$, para $i = 2, \ldots n$, son algebraicamente independientes en $k[W]$. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $G(X_2, \ldots, X_n) \in k[X_1, \ldots, X_n]$ no nulo tal que $G(f_2|_W, \ldots, f_n|_W) = 0$. Sea $G' = G(F_2, \ldots, F_n) \in I(W)$.

Para cada componente irreducible W' de C distinta de W, podemos tomar un polinomio de $I(W')\backslash I(W)$, y el producto de tales polinomios es un polinomio H que es idénticamente nulo en todas las componentes de C excepto en W. Así

$$G'H \in I(C) = I(V(I(U) \cup \{F_1\})) = \mathrm{Rad}(I(U) \cup \{F_1\}),$$

luego $(G'H)^l \in (I(U) \cup \{F_1\})$. Tomando clases módulo $I(U)$ concluimos que $(g'h)^l \in (f_1)$, es decir, que $f_1 \mid (g'h)^l$, para cierto $l > 0$.

Vamos a probar que $f_1 \mid h^r$, para cierto $r > 0$, lo cual implica que H se anula en C, en contradicción con la forma en que lo hemos construido.

Observemos que $k[f_1, \ldots, f_n] \subset k[U]$ es isomorfo a $k[X_1, \ldots, X_n]$ (a través de $\bar{\phi}$), luego en particular es un dominio de factorización única. Como g' en un polinomio en $f_2, \ldots, f_n$, es claro que f_1 y g' son primos entre sí. No podemos concluir directamente que $f_1|h$ porque $h \notin k[f_1, \ldots, f_n]$, pero sabemos que es un entero algebraico sobre este anillo. Es claro que basta demostrar este hecho puramente algebraico:

> *Sea $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ y B una extensión entera de A. Sean x, $y \in A$ primos entre sí y sea $z \in B$ tal que $x \mid yz$ en B. Entonces existe un $r > 0$ tal que $x \mid z^r$.*

En efecto, digamos que $yz = xw$, con $w \in B$. Sea

$$p(T) = T^r + b_1 T^{r-1} + \cdots + b_r$$

el polinomio mínimo de w sobre $k(X_1, \ldots, X_n)$. Como A es un dominio de factorización única, es íntegramente cerrado (teorema [Al 3.35]), luego por el teorema [TAl 2.11] tenemos que $p(T) \in A[T]$. El polinomio mínimo de $z = xw/y$ será $q(T) = (x/y)^r p(yT/x)$, es decir,

$$q(T) = T^r + \frac{xb_1}{y} T^{r-1} + \cdots + \frac{x^r b_r}{y^r} \in A[T].$$

Así pues, $x^i b_i/y^i \in A$, luego $y^i \mid x^i b_i$ en A y, como x e y son primos entre sí, de hecho $y^i \mid b_i$. Por consiguiente,

$$z^r = -x\left(\frac{b_1}{y}z^{r-1} + \frac{xb_2}{y^2}z^{r-2} + \cdots + \frac{x^{r-1}b_r}{y^r}\right),$$

luego $x \mid z^r$. ∎

Este teorema se generaliza fácilmente para variedades cuasiproyectivas:

Teorema 3.11 *Sea $V \subset \mathrm{P}^N$ una variedad cuasiproyectiva de dimensión n y $F \in k[X_1, \ldots, X_{N+1}]$ una forma que no es idénticamente nula en V. Si $V_F \neq \varnothing$, entonces tiene dimensión pura $n-1$.*

Demostración: Sea $\overline{V}_F = W_1 \cup \cdots \cup W_r$ la descomposición de $\overline{V}_F$ en componentes irreducibles. Por el teorema anterior tienen dimensión $n-1$. Es claro que $V_F = \overline{V}_F \cap V$, luego

$$V_F = (W_1 \cap V) \cup \cdots \cup (W_r \cap V).$$

Cada $W_i \cap V$ es vacío o bien abierto en W_i (porque V es abierto en $\overline{V}$). Por consiguiente, las $W_i \cap V$ no vacías son las componentes irreducibles de V y tienen dimensión $n-1$. ∎

Notemos que si $V \subset A^N$ es una variedad afín entonces las formas en $N+1$ variables se corresponden con las aplicaciones de $k[A^N]$, las cuales se corresponden a su vez con las aplicaciones de $k[V]$. Por lo tanto, un caso particular del teorema anterior se enuncia como sigue:

Teorema 3.12 *Sea V una variedad afín de dimensión n y sea $f \in k[V]$, $f \neq 0$. Si el conjunto $\{P \in V \mid f(P) = 0\}$ es no vacío, tiene dimensión pura $n-1$.*

Ahora podemos dar la caracterización topológica de la dimensión de un conjunto algebraico que habíamos esbozado en la introducción a este capítulo:

Teorema 3.13 *Si C es un conjunto algebraico no vacío, entonces* $\dim C$ *es el máximo natural d tal que existe una sucesión*

$$C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq \cdots \subsetneq C_d \subset C$$

de cerrados irreducibles no vacíos.

Demostración: Si $\dim C = d$, entonces C tiene una componente irreducible C_d de dimensión d, y por los teoremas precedentes podemos construir una sucesión en las condiciones del enunciado, en la que cada C_i tenga dimensión i. Recíprocamente, si existe tal sucesión, el teorema 3.5 asegura que $\dim C_{i+1} > \dim C_i$, luego $d \leq \dim C_d \leq \dim C$, por lo que $d = \dim C$ es ciertamente el mayor natural para el que existe tal sucesión. ∎

Nota Si X es un espacio topológico no vacío, podemos definir su *dimensión de Krull* como el máximo natural d (o tal vez ∞) tal que existe una sucesión

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d \subset X$$

de cerrados irreducibles no vacíos. El teorema anterior prueba que todo conjunto algebraico tiene dimensión de Krull finita y que ésta coincide con la dimensión que hemos definido algebraicamente. ∎

Terminamos la sección probando un teorema importante sobre dimensiones. Necesitamos un par de hechos previos. El teorema siguiente se prueba por inducción sobre m a partir de 3.11:

Teorema 3.14 *Sea $V \subset \mathrm{P}^N$ una variedad cuasiproyectiva de dimensión n y sea C el conjunto de los puntos de V que anulan simultáneamente m formas en $N+1$ variables. Si $C \neq \varnothing$, entonces todas sus componentes irreducibles tienen dimensión $\geq n-m$.*

Las mismas consideraciones previas a 3.12 nos dan ahora:

Teorema 3.15 *Sea V una variedad afín de dimensión n y sea C el conjunto de los puntos de V donde se anulan m funciones de $k[V]$. Entonces, si $C \neq \varnothing$, todas sus componentes irreducibles tienen dimensión $\geq n-m$.*

El teorema siguiente es un primer ejemplo de un teorema global de la geometría algebraica:

Teorema 3.16 *Sean V, $W \subset \mathrm{P}^N$ dos variedades cuasiproyectivas y sea X una componente irreducible no vacía (supuesto que exista) de $V \cap W$. Entonces*

$$\operatorname{codim} X \leq \operatorname{codim} V + \operatorname{codim} W.$$

Si V y W son proyectivas y $\operatorname{codim} V + \operatorname{codim} W \leq N$, entonces $V \cap W \neq \varnothing$ y, en particular,

$$\operatorname{codim}(V \cap W) \leq \operatorname{codim} V + \operatorname{codim} W.$$

Demostración: Para la primera parte, tomando clausuras, podemos suponer que las variedades son proyectivas y, cortándolas con un espacio afín A^N que corte a X, podemos suponer que son afines: V, $W \subset A^N$. Sea $\Delta \subset A^N \times A^N$ la diagonal. La aplicación $\phi : V \cap W \longrightarrow A^N \times A^N$ dada por $\phi(P) = (P, P)$ tiene imagen $(V \times W) \cap \Delta$ y claramente es un isomorfismo. Como Δ está definido por las N funciones $x_i - y_i$, el teorema anterior nos da que

$$\dim X = \dim \phi[X] \geq \dim(V \times W) - N = \dim V + \dim W - N.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{codim} X \leq 2N - \dim V - \dim W = \operatorname{codim} V + \operatorname{codim} W.$$

Para la segunda parte consideramos los conos $\mathrm{Cn}(V)$ y $\mathrm{Cn}(W)$, que son variedades en A^{N+1} de dimensión una unidad mayor (luego de la misma codimensión). Además $\mathrm{Cn}(V \cap W) = \mathrm{Cn}(V) \cap \mathrm{Cn}(W)$. Como la intersección contiene al menos al origen, podemos aplicar la parte ya probada, en virtud de la cual

$$\operatorname{codim} \mathrm{Cn}(V \cap W) \leq \operatorname{codim} \mathrm{Cn}\, V + \operatorname{codim} \mathrm{Cn}\, W = \operatorname{codim} V + \operatorname{codim} W \leq N,$$

luego $\dim \mathrm{Cn}(V \cap W) \geq 1$ y $\dim(V \cap W) \geq 0$, luego $V \cap W \neq \varnothing$. ∎

Ejercicio: Ahora es claro que dos curvas en P^2 se cortan al menos en un punto. Probar que esto generaliza al teorema fundamental del álgebra mostrando que una curva $Y = F(X)$ no puede cortar al eje X ($Y = 0$) en el punto infinito $(1, 0, 0)$.

3.2 Variedades tangentes y diferenciales

Vamos a asociar una variedad tangente a cada punto de una variedad, en correspondencia con la noción análoga en geometría diferencial.

En [Al 7.25] definimos la derivada formal de un polinomio en una indeterminada. Más en general, si $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, podemos definir la *derivada parcial formal* $\partial F/\partial X_i$ como la derivada formal de F considerado como polinomio en $k[S][X_i]$, donde $S = \{X_1, \ldots, X_n\} \setminus \{X_i\}$. De [Al 7.26] se sigue inmediatamente que

$$\frac{\partial(F+G)}{\partial X_i} = \frac{\partial F}{\partial X_i} + \frac{\partial G}{\partial X_i}, \qquad \frac{\partial(FG)}{\partial X_i} = \frac{\partial F}{\partial X_i} G + F \frac{\partial G}{\partial X_i}.$$

Una simple inducción prueba que

$$\frac{\partial F^r}{\partial X_i} = r F^{r-1} \frac{\partial F}{\partial X_i},$$

y a su vez, si $F = (F_1, \ldots, F_m) \in k[X_1, \ldots, X_n]^m$, $G \in k[X_1, \ldots, X_n]$ y llamamos $F \circ G = G(F_1, \ldots, F_m) \in k[X_1, \ldots, X_n]$, es fácil ver que

$$\frac{\partial(F \circ G)}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial G}{\partial X_j} \circ F \right) \frac{\partial F_j}{\partial X_i}$$

(Por la linealidad de la derivada, basta probarlo cuando $G = X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}$, y en este caso se razona por inducción sobre n).

Sea $F(X) \in k[X_1, \ldots, X_n]$ y $a \in k^n$. Si llamamos $F^*(X) = F(a + X)$, tenemos, equivalentemente, que $F(X) = F^*(X - a)$. Descomponiendo F^* en suma de formas, podemos expresar

$$F(X) = F(a) + F_1(X - a) + F_2(X - a) + \cdots$$

donde F_i es una forma de grado i. Derivando esta descomposición obtenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} = \frac{\partial F_1}{\partial X_i} + \frac{\partial F_2}{\partial X_i}(X - a) + \cdots$$

luego

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_i} = \left.\frac{\partial F}{\partial X_i}\right|_a$$

y, por consiguiente,

$$F_1(X-a) = \left.\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|_a (X_1-a_1) + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial X_n}\right|_a (X_n-a_n).$$

Definición 3.17 La *diferencial* de un polinomio $F(X) \in k[X_1,\dots,X_n]$ en un punto $a \in k^n$ es el polinomio

$$d_aF(X) = \left.\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|_a X_1 + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial X_n}\right|_a X_n.$$

Hemos probado que

$$F(X) = F(a) + d_aF(X-a) + F_2(X-a) + F_3(X-a) + \cdots$$

donde cada F_i es una forma de grado i.

Se comprueba inmediatamente que

$$d_a(F+G) = d_aF + d_aG, \qquad d_a(FG) = F(a)\,d_aG + G(a)\,d_aF. \tag{3.1}$$

Un poco más en general, si $\phi : A^n \longrightarrow A^m$ es una aplicación polinómica (definida sobre k) y $P \in A^n(k)$, fijados sistemas de referencia, admitirá una expresión coordenada $\phi(x) = (F_1(x),\dots,F_m(x))$, para ciertos polinomios $F_1,\dots,F_m \in k[X_1,\dots,X_n]$. Aquí hay que entender que si un punto $R \in A^n$ tiene coordenadas x, entonces $\phi(R)$ tiene coordenadas $(F_1(x),\dots,F_m(x))$.

Si P tiene coordenadas $a \in k^n$, podemos definir la diferencial

$$d_P\phi : K^n \longrightarrow K^m$$

como la aplicación lineal que, respecto a las bases de K^n y K^m asociadas a los sistemas de referencia, tiene la expresión coordenada

$$d_P\phi(x) = (d_aF_1(x),\dots,d_aF_m(x)).$$

Equivalentemente, la matriz de ϕ en dichas bases es la *matriz jacobiana*

$$J_P\phi = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial F_1}{\partial X_1}\right|_a & \cdots & \left.\frac{\partial F_m}{\partial X_1}\right|_a \\ \vdots & & \vdots \\ \left.\frac{\partial F_1}{\partial X_n}\right|_a & \cdots & \left.\frac{\partial F_m}{\partial X_n}\right|_a \end{pmatrix}.$$

Se cumple que $d_P\phi$ no depende de la elección de los sistemas de referencia. En efecto, supongamos que tenemos dos sistemas de referencia en A^n relacionados por el cambio de coordenadas $x = c + x'A$, y dos sistemas de coordenadas

en A^m relacionados por $y' = d + yB$. Entonces, la expresión coordenada de ϕ respecto de los nuevos sistemas de referencia es

$$\phi(x') = d + (F_j(c + x'A))B,$$

de modo que

$$F'_l = d_l + \sum_{j=1}^{m} F_j(c + XA)b_{jl},$$

donde $X = (X_1, \ldots, X_n)$, luego

$$\frac{\partial F'_l}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_j(c + XA)}{\partial X_i} b_{jl} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} \left.\frac{\partial F_j}{\partial X_t}\right|_{(c+XA)} a_{it}b_{jl}.$$

Si P tiene coordenadas a y a', de modo que $a = c + a'A$, entonces

$$\left.\frac{\partial F'_l}{\partial X_i}\right|_{a'} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} \left.\frac{\partial F_j}{\partial X_t}\right|_{a} a_{it}b_{jl}.$$

Esto significa que

$$\left(\left.\frac{\partial F'_l}{\partial X_i}\right|_{a'}\right) = A\left(\left.\frac{\partial F_l}{\partial X_i}\right|_{a}\right) B$$

de donde se sigue que las dos matrices jacobianas corresponden a la misma aplicación lineal en los sistemas de referencia correspondientes.

Observemos ahora que si tenemos aplicaciones polinómicas $\phi : A^n \longrightarrow A^m$ y $\psi : A^m \longrightarrow A^p$ con expresiones coordenadas $\phi(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$ y $\psi(x') = (G_1(x'), \ldots, G_p(x'))$ y $P \in A^n(k)$ tiene coordenadas $a \in k^n$, llamando $b \in k^m$ a las coordenadas de $\phi(P)$, la relación

$$\frac{\partial(F \circ G_l)}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial G_l}{\partial X_j} \circ F\right) \frac{\partial F_j}{\partial X_i}$$

nos da que

$$\left.\frac{\partial(F \circ G_l)}{\partial X_i}\right|_a = \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial G_l}{\partial X_j}\right|_b \left.\frac{\partial F_j}{\partial X_i}\right|_a,$$

de donde se sigue la relación $J_P(\phi \circ \psi) = J_P\phi \circ J_{\phi(P)}\psi$ entre las matrices jacobianas, y a su vez la relación $d_P(\phi\circ\psi) = d_P\phi\circ d_{\phi(P)}\psi$ entre las diferenciales. En suma, se cumple la regla de la cadena.

Variedades tangentes de conjuntos algebraicos afines Empezamos definiendo la variedad tangente en un punto a un conjunto algebraico afín:

Definición 3.18 Si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico afín y $P \in C(k)$. Fijado un sistema de referencia en A^n, sea $a \in k^n$ el vector de coordenadas de P. Llamaremos *variedad tangente* a C en P a la variedad lineal T_PC determinada por las ecuaciones $d_aF(X - a) = 0$, donde F recorre $I(C)$.

Las relaciones (3.1) muestran que si $I(C) = (F_1, \ldots, F_m)$, entonces

$$T_P C = V(d_a F_1(X - a), \ldots, d_a F_m(X - a)).$$

Notemos que un punto $Q \in A^n$ tiene coordenadas x si y sólo si el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene coordenadas $x - a$, luego $T_P C = P + \overrightarrow{T_P C}$, donde $\overrightarrow{T_P C}$ es el subespacio vectorial de K^n formado por todos los vectores en los que se anulan todas las diferenciales $d_a F$, con $F \in I(C)$. O también, es el subespacio vectorial formado por todos los vectores donde se anulan las diferenciales $d_P\phi$, para toda aplicación polinómica $\phi : A^n \longrightarrow A^1$ que tome en V un valor constante $\alpha \in k$.

En efecto, fijado un sistema de referencia en A^1, todo $F \in I(C)$ determina una aplicación polinómica $\phi : A^n \longrightarrow A^1$ de expresión coordenada $\phi(x) = F(x)$, y la expresión coordenada de $d_P\phi$ es $d_P\phi(x) = d_a F(x)$, luego que $d_a F$ se anule en un vector de K^n equivale a que lo haga $d_P\phi$.

Por otra parte, al considerar aplicaciones ϕ que puedan tomar un valor constante (en k) no nulo no estamos añadiendo más condiciones, pues toda ϕ tendrá una expresión coordenada de la forma $\phi(x) = F(x)$, para un cierto polinomio $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $F - \alpha \in I(C)$, y entonces $d_P\phi(x) = d_a(F - \alpha)(x)$, por lo que pedir que $d_P\phi(x)$ se anule en un punto equivale a pedir que lo haga $d_a(F - \alpha)$.

El interés de esta última expresión para el espacio vectorial $\overrightarrow{T_P C}$ es que prueba que éste no depende de la elección del sistema de referencia y, por consiguiente, $T_P C$ tampoco.

En principio, sólo hemos definido la variedad tangente para los puntos racionales de C, pero siempre podemos considerar a C como conjunto algebraico sobre K, y así $T_P C$ está definido realmente para todos los puntos de C. Ahora bien, entonces tenemos dos definiciones de $T_P C$ para los puntos racionales, y tenemos que probar que coinciden. Nos limitaremos a observar que esto es trivialmente cierto si $I_K(C)$ es el ideal generado por $I_k(C)$, pues ya hemos observado que $T_P C$ (calculado sobre K) está definido por las diferenciales asociadas a los generadores de $I_k(C)$, luego coincide con la variedad tangente calculada sobre k.

En particular, si V es una variedad afín absoluta tal que la extensión $k(V)/k$ es regular y $P \in V(k)$, entonces $T_P V$ es la misma variedad calculada sobre k o sobre K. Más aún, si K' es un cuerpo algebraicamente cerrado que extienda a K y consideramos la clausura V' de V en $A^n(K')$, entonces, aplicando la observación precedente a $k = K$, concluimos que $T_P V'$ es la variedad lineal definida por las mismas ecuaciones que $T_P V$, es decir, la clausura de $T_P V$ en $A^n(K')$.

Si $\phi : C \longrightarrow A^m$ es una aplicación polinómica (sobre k) y admite dos expresiones coordenadas (respecto a los mismos sistemas de referencia)

$$\phi(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x)) = (G_1(x), \ldots, G_m(x)),$$

entonces $G_i - F_i \in I(C)$, luego $d_aF_i - d_aG_i$ se anula en $\overrightarrow{T}_PC$, luego podemos definir

$$d_P\phi : \overrightarrow{T}_PC \longrightarrow K^m$$

como la aplicación lineal que, respecto de los sistemas de referencia prefijados, tiene por expresión coordenada $d_P\phi(x) = (d_aF_1(x), \ldots, d_aF_m(x))$.

Acabamos de probar que $d_P\phi$ no depende de la elección de la expresión coordenada de ϕ, y tampoco depende de la elección del sistema de referencia, porque podemos definir $d_P\phi = d_P\tilde{\phi}|_{\vec{T}_PC}$, donde $\tilde{\phi} : A^n \longrightarrow A^m$ es cualquier aplicación polinómica que extienda a ϕ.

Más aún, si $\phi : C \longrightarrow C'$ es una aplicación polinómica (siempre sobre k), digamos con expresión coordenada $\phi(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$, entonces para cada $G \in I(C')$, tenemos que $G(F_1, \ldots, F_m) \in I(C)$, luego $d_a(G(F_1, \ldots, F_m))$ se anula en $\overrightarrow{T}_PC$, pero esta diferencial es $d_bG(d_aF_1, \ldots, d_aF_m)$, donde $b \in k^m$ es el vector de coordenadas de $\phi(P)$, y esto significa que si $v \in \overrightarrow{T}_PC$, entonces d_bG se anula sobre las coordenadas de $d_P\phi(v)$ o, equivalentemente, que se cumple $d_P\phi : \overrightarrow{T}_PC \longrightarrow \overrightarrow{T}_{\phi(P)}C'$. Con esto hemos justificado la definición siguiente:

Definición 3.19 Si $\phi : C \longrightarrow C'$ es una aplicación polinómica entre dos conjuntos algebraicos afines y $P \in C(k)$, definimos su *diferencial* en P, como la aplicación lineal $d_P\phi : \overrightarrow{T}_PC \longrightarrow \overrightarrow{T}_{\phi(P)}C'$ cuya expresión coordenada es

$$d_P\phi(x) = (d_aF_1(x), \ldots, d_aF_m(x)),$$

donde $\phi(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$ es una expresión coordenada de ϕ y $a \in k^n$ es el vector de coordenadas de P.

Según lo que hemos visto, es inmediato que si $\phi : C \longrightarrow C'$ y $\psi : C' \longrightarrow C''$ son aplicaciones polinómicas, entonces $d_P(\phi \circ \psi) = d_P\phi \circ d_{\phi(P)}\psi$. También es fácil comprobar que la diferencial de la identidad es la identidad, de donde a su vez se sigue[1] que si $\phi : C \longrightarrow C'$ es un isomorfismo de variedades, entonces $d_P\phi$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Ejemplos *Si $V = \{P\} \subset A^n$, entonces $T_PV = \{P\}$.*

En efecto, si P tiene coordenadas $a \in K^n$, entonces

$$I_K(V) = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n),$$

luego las ecuaciones de T_PV se reducen a $X_i - a_i = 0$, con lo que $T_PV = \{P\}$.

Si $V = A^n$, entonces $T_PV = A^n$.

En efecto, $I_K(V) = (1)$ y la ecuación de T_PV es $0 = 0$.

Si V es la circunferencia $X^2 + Y^2 = 1$ (y la característica del cuerpo k es distinta de 2), entonces T_PV es una recta en cada punto $P \in V$.

[1] Lo que hemos probado es que la asignación $(C, P) \mapsto \overrightarrow{T}_PC$ es funtorial.

En efecto, la ecuación de T_PV en un punto P de coordenadas (a,b) es claramente $2a(X-a)+2b(Y-b)=0$. Esta ecuación no puede ser idénticamente nula, ya que $(0,0)\notin V$.

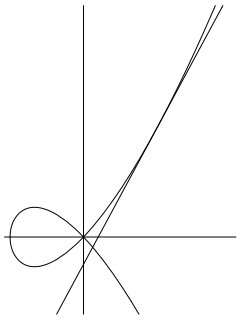
Si V y W son variedades afines, $T_{(P,Q)}(V\times W)=T_PV\times T_QW$.

En efecto, $I_K(V\times W)$ está generado por los polinomios de $I_K(V)$ en las indeterminadas $X_1,\dots,X_n$ y los polinomios de $I_K(W)$ en las indeterminadas $Y_1,\dots,Y_m$, luego un punto (R,S) está en $T_{(P,Q)}(V\times W)$ si y sólo si R cumple las ecuaciones de T_PV y S cumple las ecuaciones de T_QW.

Consideremos ahora $V=V(Y^2-X^2(X+1))$. La ecuación para T_PV en un punto P de coordenadas (a,b) es

$$-a(3a+2)(X-a)+2b(Y-b)=0.$$

Esto es una recta salvo si $a(3a-2)=b=0$. Teniendo en cuenta que $P\in V$, el único punto que cumple $b=0$ es $(0,0)$. Así pues, la variedad tangente a V es una recta en todos los puntos excepto en $(0,0)$, donde $T_{(0,0)}V=A^2$. La figura muestra la tangente en el punto $(1,\sqrt{2})$. ∎



Estos ejemplos sugieren que la dimensión de la variedad tangente es "por lo general" la dimensión de V, si bien esto puede fallar en los puntos "problemáticos", como es el caso del punto donde la curva "alfa" se corta a sí misma. En la sección siguiente veremos que realmente es así, pero, de momento, terminamos este apartado expresando explícitamente la fórmula que determina la dimensión de una variedad tangente T_PC:

Teorema 3.20 *Si $C\subset A^n$ es un conjunto algebraico con $I(C)=(F_1,\dots,F_m)$, entonces, para cada punto $P\in C(k)$ de coordenadas $a\in k^n$, se cumple que* $\dim T_PC=n-\operatorname{rang}A$*, donde*

$$A=\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial F_1}{\partial X_1}\right|_a & \cdots & \left.\frac{\partial F_m}{\partial X_1}\right|_a \\ \vdots & & \vdots \\ \left.\frac{\partial F_1}{\partial X_n}\right|_a & \cdots & \left.\frac{\partial F_m}{\partial X_n}\right|_a \end{pmatrix}.$$

Demostración: En efecto, sabemos que la dimensión de una variedad lineal T_PC coincide con su dimensión en el sentido de la geometría afín, que es la dimensión del espacio vectorial $\overrightarrow{T_PC}$, que está formado por los vectores $v\in K^n$ que cumplen las ecuaciones $d_aF_i(v)=0$ o, explícitamente, los vectores cuyas coordenadas satisfacen el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \left.\tfrac{\partial F_1}{\partial X_1}\right|_a X_1+\cdots+\left.\tfrac{\partial F_1}{\partial X_n}\right|_a X_n &= 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \left.\tfrac{\partial F_m}{\partial X_1}\right|_a X_1+\cdots+\left.\tfrac{\partial F_m}{\partial X_n}\right|_a X_n &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por lo tanto, se trata del núcleo de la aplicación lineal de matriz A, cuya imagen tiene dimensión $\operatorname{rang}A$, luego, en efecto, $\dim T_PC=n-\operatorname{rang}A$. ∎

Espacios tangentes de Zariski A la hora de relacionar los conjuntos algebraicos con sus variedades tangentes es útil saber que los espacios $\overrightarrow{T}_P C$ son naturalmente isomorfos a otros espacios vectoriales abstractos que vamos a introducir a continuación.

Observemos en primer lugar que, aunque una variedad V definida sobre k puede tener pocos puntos racionales, e incluso ninguno, esto no sucede si la variedad V es lineal. En efecto, si V está definida por un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en k, entonces $V(k) \subset A^n(k)$ es una variedad afín (en el sentido de la geometría afín, no de la geometría algebraica si k no es algebraicamente cerrado) de la misma dimensión que V, pues dicha dimensión es n menos el número de ecuaciones linealmente independientes, y unas ecuaciones son linealmente independientes sobre k si y sólo si lo son sobre K.

En particular, si C es cualquier conjunto algebraico afín definido sobre k y llamamos $\overrightarrow{T}_P(C)(k) = \overrightarrow{T}_P(C) \cap k^n$, tenemos que se trata de un k-espacio vectorial de la misma dimensión que $\overrightarrow{T}_P(C)$ tiene sobre K y

$$T_P(C)(k) = P + \overrightarrow{T}_P(C)(k).$$

Por otra parte, si $P \in C(k)$, toda $f \in k[C]$ es una aplicación polinómica $f : C \longrightarrow A^1$, luego tenemos definida la diferencial $d_P f : \overrightarrow{T}_P C \longrightarrow K$. Explícitamente, si $f = [F]$, entonces $d_P f(x) = d_a F(x)$, donde $a \in k^n$ es el vector de coordenadas de P. Más explícitamente, la expresión coordenada de $d_P f$ respecto de un sistema de referencia prefijado es

$$d_P f(x) = \left.\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|_a x_1 + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial X_n}\right|_a x_n.$$

Ahora bien, aplicando esto mismo a las funciones coordenadas $x_i = [X_i]$, tenemos que $d_P x_i$ asigna a cada vector $v \in \overrightarrow{T}_P C$ su coordenada i-ésima respecto al sistema de referencia prefijado, luego

$$d_P f(v) = \left.\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|_a d_P x_1(v) + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial X_n}\right|_a d_P x_n(v),$$

luego tenemos la ecuación funcional:

$$d_P f = \left.\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|_a d_P x_1 + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial X_n}\right|_a d_P x_n.$$

Como las derivadas están en k, vemos que $d_P f$ se restringe a una aplicación lineal $d_P f : \overrightarrow{T}_P C(k) \longrightarrow k$, es decir, a un elemento del espacio dual $\overrightarrow{T}_P C(k)^*$. En definitiva, tenemos una aplicación $d_P : k[C] \longrightarrow \overrightarrow{T}_P C(k)^*$, que claramente cumple

$$d_P(f+g) = d_P f + d_P g, \qquad d_P(fg) = f(P) d_P g + g(P) d_P f.$$

Recordemos ahora que en 1.23 hemos generalizado la definición de $\mathcal{O}_P(C)$ al caso en que el conjunto algebraico afín C no es necesariamente irreducible. La aplicación d_P se extiende a una aplicación lineal

$$d_P : \mathcal{O}_P(C) \longrightarrow \overrightarrow{T_P}C(k)^*$$

mediante

$$d_P(f/g) = \frac{g(P)\, d_P f - f(P)\, d_P g}{g(P)^2} \in T_P C(k)^*.$$

No es difícil probar que esta extensión está bien definida y sigue cumpliendo las relaciones precedentes para la suma y el producto. De todos modos no necesitamos este hecho, ya que vamos a restringir d_P al ideal maximal $\mathfrak{m}_P$, donde la definición se reduce a

$$d_P(f/g) = \frac{d_P f}{g(P)},$$

y en este caso las comprobaciones son mucho más sencillas. Ahora probamos:

Teorema 3.21 *Si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico afín y $P \in C(k)$, la diferencial d_P induce un isomorfismo $d_P : \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow \overrightarrow{T_P}C(k)^*$ de k-espacios vectoriales.*

Demostración: Por simplicidad podemos fijar un sistema de referencia en A^n respecto al que P tenga coordenadas nulas (aquí usamos que $P \in C(k)$). Toda $\phi \in \overrightarrow{T_P}C(k)^*$ se extiende a una forma lineal $L \in (k^n)^*$, que no es sino un polinomio $L(X) \in k[X_1, \ldots, X_n]$ de grado 1 y sin término independiente. Si llamamos $f = [L] \in k[V]$, es claro que $d_P f = \phi$. Además $f(P) = f(0) = 0$, luego $f \in \mathfrak{m}_P$.

Con esto tenemos que d_P es suprayectiva. Sólo falta probar que su núcleo es $\mathfrak{m}_P^2$. Este ideal está generado por los productos $\alpha\beta$, con $\alpha,\ \beta \in \mathfrak{m}_P$. Claramente $d_P(\alpha\beta) = \alpha(P)d_P\beta + \beta(P)d_P\alpha = 0$, luego tenemos una inclusión. Supongamos ahora que $\alpha = g/h \in \mathfrak{m}_P$ cumple $d_P\alpha = 0$. Si $g = [G]$, entonces $d_0 G \in I(T_P C)$, luego

$$d_0 G = \alpha_1 d_P F_1 + \cdots + \alpha_m d_P F_m,$$

para ciertos $F_1, \ldots, F_m \in I(C)$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in k$ (en principio los α_i podrían ser polinomios arbitrarios, pero como $d_0 G$ tiene grado 1, pueden reducirse a constantes).

Sea $G' = G - \alpha_1 F_1 - \cdots - \alpha_m F_m$. Claramente, G' no tiene términos de grado 0 o 1, luego $G' \in (X_1, \ldots, X_n)^2$. Por otra parte, $G'|_C = G|_C = g$, luego $\alpha = [G']/h \in (x_1, \ldots, x_n)^2 = \mathfrak{m}_P^2$. ∎

Puesto que $\overrightarrow{T_P}C(k)$ puede identificarse canónicamente con su bidual, concluimos que la codiferencial

$$d_P^* : \overrightarrow{T_P}C(k) \longrightarrow (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^*$$

(es decir, la aplicación dual de la diferencial) determina un isomorfismo de k-espacios vectoriales entre $\overrightarrow{T_P}C(k)$ y el espacio dual de $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$.

Definición 3.22 Si C es un conjunto algebraico afín (sobre k) y $P \in C(k)$, definimos el *espacio tangente de Zariski* de C en P como el k-espacio vectorial $T_PC(k) = (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^*$, donde $\mathfrak{m}_P = \{\alpha \in \mathcal{O}_P(C) \mid \alpha(P) = 0\}$.

A partir de aquí nos restringimos al caso de variedades, y observamos que la definición precedente vale también cuando C es una variedad cuasiproyectiva, pues en ese caso también tenemos definido $\mathcal{O}_P(C)$ y coincide con el anillo correspondiente a cualquier variedad afín $\overline{C} \setminus H_\infty$, para cualquier hiperplano infinito que no contenga a P.

Si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación regular (sobre k) entre variedades cuasiproyectivas, $P \in V(k)$ y $Q = \phi(P)$, tenemos que ϕ induce un homomorfismo de anillos $\bar{\phi} : \mathcal{O}_Q(W) \longrightarrow \mathcal{O}_P(V)$ dado por $\bar{\phi}(\alpha) = \phi\circ\alpha$, que claramente se restringe a una aplicación lineal $\bar{\phi} : \mathfrak{m}_Q \longrightarrow \mathfrak{m}_P$, que a su vez se restringe a una aplicación lineal $\bar{\phi} : \mathfrak{m}_Q \longrightarrow \mathfrak{m}_P$, que a su vez induce otra $\bar{\phi} : \mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$.

Llamaremos *diferencial* de ϕ en P a la aplicación $d_P\phi : T_PV(k) \longrightarrow T_QW(k)$ dual de $\bar{\phi}$.

Es inmediato comprobar que si $\psi : W \longrightarrow X$ es otra aplicación regular, entonces $d_P(\phi\circ\psi) = d_P\phi \circ d_{\phi(P)}\psi$, así como que la diferencial de la identidad es la identidad. En particular, las diferenciales de los isomorfismos son isomorfismos.

Más en general, si $P \in U \subset V$, entonces, por definición, $T_PU(k) = T_PV(k)$ y si $i : U \longrightarrow V$ es la inclusión, es fácil ver que d_Pi es la identidad.

Esto implica que para que dos puntos de dos variedades tengan espacios tangentes isomorfos basta con que tengan entornos isomorfos (respecto a un isomorfismo que transforme uno de los puntos en el otro).

Hemos probado que si V es una variedad afín, el espacio tangente de Zariski es isomorfo al espacio tangente geométrico. Más aún, si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación regular (es decir, polinómica) entre variedades afines, es fácil ver que el diagrama siguiente es conmutativo:[2]

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{T_P}V(k) & \xrightarrow{d_P\phi} & \overrightarrow{T_Q}W(k) \\ {\scriptstyle d_P^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_Q^*} \\ T_PV(k) & \xrightarrow[d_P\phi]{} & T_QW(k) \end{array}$$

Veamos algunos resultados elementales sobre espacios tangentes de Zariski y diferenciales:

Teorema 3.23 *Si $c_Q : V \longrightarrow W$ es la función constante $c_Q(R) = Q$ y $P \in V$, entonces $d_Pc_Q = 0$.*

[2]En lenguaje categórico, esto significa que d^* es un isomorfismo natural entre los dos funtores que asocian a cada par (V, P) su espacio tangente geométrico y abstracto, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN: Para cada $f \in (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^*$ y cada clase $[\alpha] \in \mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2$ tenemos que

$$d_P c_Q([\alpha]) = \bar{c}_Q^*(f)([\alpha]) = (\bar{c}_Q \circ f)([\alpha]) = f([c_Q \circ \alpha]) = 0,$$

pues $c_Q \circ \alpha \in \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ es la función nula. ∎

Teorema 3.24 *Sean V y W dos variedades, sea $(P,Q) \in V \times W$, sean*

$$p_1 : V \times W \longrightarrow V, \qquad p_2 : V \times W \longrightarrow W$$

las proyecciones y

$$i_Q^1 : V \longrightarrow V \times W, \qquad i_P^2 : W \longrightarrow V \times W$$

las aplicaciones dadas por $i_Q^1(R) = (R,Q)$, $i_P^2(R) = (P,R)$. Entonces,

$$d_P i_Q^1 : T_P V \longrightarrow T_{(P,Q)}(V \times W), \qquad d_Q i_P^2 : T_Q V \longrightarrow T_{(P,Q)}(V \times W)$$

son inyectivas y, si identificamos $T_P V$ y $T_Q W$ con sus imágenes, se cumple que $T_{(P,Q)}(V \times W) = T_P V \oplus T_Q W$ y las diferenciales $d_{(P,Q)}p_i$ son las proyecciones.

DEMOSTRACIÓN: Se cumple que $i_Q^1 \circ p_1$ es la identidad, luego $d_P i_Q^1 \circ d_{(P,Q)}p_1$ también es la identidad, lo que prueba que $d_P i_Q^1$ es inyectiva. Por otro lado, $i_Q^1 \circ p_2$ es constante, luego $d_P i_Q^1 \circ d_{(P,Q)}p_2 = 0$.

Si $v \in T_P V \cap T_Q W$, entonces $v = d_P i_Q^1(v')$, con $v' \in T_P V$, pero entonces $v' = d_{(P,Q)}p_1(v) = 0$, luego $v = 0$. Así pues, la suma de los dos espacios tangentes es directa.

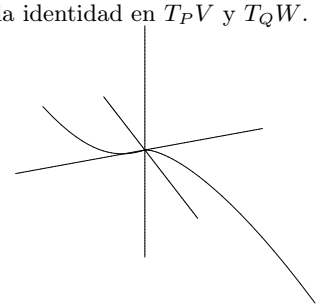
Hemos visto que, en el caso en que V y W son variedades afines tenemos la relación $T_{(P,Q)}(V \times W) = T_P V \times T_Q W$. De aquí se sigue que, en general, $\dim T_{(P,Q)}(V \times W) = \dim T_P V + \dim T_Q W$. (Basta tomar entornos afines de P y Q en V y W y tener en cuenta que las dimensiones se conservan por isomorfismos.)

Por consiguiente la suma directa de los espacios tangentes coincide con $T_{(P,Q)}(V \times W)$. El hecho de que las $d_{(P,Q)}p_i$ son las proyecciones es ahora inmediato. ∎

Ejercicio: En la situación del ejemplo anterior, pero suponiendo que V y W son variedades afines, demostrar que las diferenciales $d_{(P,Q)}p_i$ son las proyecciones de $T_{(P,Q)}(V \times W) = T_P V \times T_Q W$ y que $d_P i_Q^1$ y $d_Q i_P^2$ son la identidad en $T_P V$ y $T_Q W$.

Ejemplo Sea $\phi : A^1 \longrightarrow A^n$ la aplicación regular dada por

$$\phi(t) = (t^n, t^{n+1}, \ldots, t^{2n-1}).$$



Es fácil ver que su imagen V_n es un conjunto algebraico, definido por las ecuaciones

$$X_{i+1}^{n+i-1} = X_i^{n+1}, \quad X_1 X_{i+1} = X_2 X_i,$$

para $i = 1, \ldots, n-1$. Además V_n es irreducible, pues una descomposición en dos cerrados propios daría lugar a una descomposición de A^1. Claramente $V_n \subset A^n$ es una curva, pues $t = x_2/x_1$ es una base de trascendencia de $k(V_n)$. La figura muestra la curva V_3.

Sea $P = (0, \ldots, 0) \in V_n$. Vamos a probar que $T_P V_n = A^n$, lo cual implica que V_n no es isomorfa a ninguna curva contenida en A^m, para $m < n$. Hemos de ver que si $F \in I(V)$, entonces $d_P F = 0$.

Sea $d_P F = \sum_i a_i X_i$, de modo que

$$F = \sum_i a_i X_i + G(X_1, \ldots, X_n),$$

donde $G \in (X_1, \ldots, X_n)^2$. Todo $t \in k$ es raíz del polinomio

$$\sum_i a_i T^{n-i+1} + G(T^n, \ldots, T^{2n-1}) \in k[T],$$

luego se trata del polinomio nulo. Ahora bien, esto sólo es posible si ambos sumandos son nulos, ya que el primero tiene grado $\leq 2n-1$ y el segundo $\geq 2n$. ∎

Derivaciones Veamos ahora que los vectores tangentes pueden identificarse con las derivaciones de $\mathcal{O}_P$, en analogía con la definición de los espacios tangentes abstractos en geometría diferencial.

Si V es una variedad afín, $P \in V(k)$ y $f \in \mathfrak{m}_P$, tenemos que $d_P f \in \overrightarrow{T}_P V^*$ y, a través del isomorfismo del teorema 3.21, vemos que $d_P f$ se identifica con $[f] \in \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$.

Así, si V es una variedad cuasiproyectiva, $P \in V(k)$ y $f \in \mathfrak{m}_P$, definimos $d_P f = [f]$. Más en general, para toda función $f \in \mathcal{O}_P(V)$ podemos definir $d_P f = [f - f(P)]$. Se comprueba inmediatamente que

$$d_P(f+g) = d_P f + d_P g, \qquad d_P(fg) = g(P) d_P f + f(P) d_P g.$$

Obviamente, las diferenciales de las constantes son nulas, y esto permite probar a su vez que

$$d_P(1/f) = -\frac{d_P f}{f(P)^2}, \qquad d_P(f/g) = \frac{g(P) d_P f - f(P) d_P g}{g(P)^2}.$$

Ejercicio: Sea V una variedad cuasiproyectiva, $P \in V(k)$ y $f \in \mathcal{O}_P(V)$. Entonces tenemos definida $d_P^1 f \in \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$, pero, considerando a $f : V \longrightarrow A^1$ como función racional, también tenemos definida $d_P^2 f : (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^* \longrightarrow (\mathfrak{m}_{f(P)}/\mathfrak{m}_{f(P)}^2)^*$. Probar que $(\mathfrak{m}_{f(P)}/\mathfrak{m}_{f(P)}^2)^*$ se identifica con k a través de $\phi \mapsto \phi([x - f(p)])$, con lo que $d_P^2 f$ se identifica con un elemento de $(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^{**}$, el cual, a través de la identificación canónica entre un espacio y su bidual, se identifica con $d_P^1 f$.

Si $v \in T_P V$ y $f \in \mathcal{O}_P(V)$, podemos definir $v(f) = v(d_P f) = v[f - f(P)]$. De este modo podemos ver a v como aplicación $v : \mathcal{O}_P(V) \longrightarrow k$. Vectores tangentes

distintos determinan aplicaciones distintas, pues si $[\alpha] \in \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ tenemos que $v([\alpha]) = v(\alpha)$. Además es inmediato que v cumple

$$v(af + bg) = av(f) + bv(g), \qquad v(fg) = g(P)v(f) + f(P)v(g),$$

para a,$b \in k$, f, $g \in \mathcal{O}_P(V)$.

Así pues, los vectores tangentes se pueden representar como *derivaciones* de $\mathcal{O}_P(V)$. Toda derivación —es decir, toda aplicación v que cumpla estas propiedades— está inducida por un único vector tangente, pues la propiedad del producto implica que v se anula en $\mathfrak{m}_P^2$, luego induce una aplicación lineal en $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$.

Ejercicio: Probar que si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación racional en $P \in V$ y $v \in T_P V$, $f \in \mathcal{O}_{\phi(P)}(W)$, entonces $d_P\phi(v)(f) = v(\phi \circ f)$.

Variedades tangentes proyectivas Finalmente, vamos a definir una realización geométrica de los espacios tangentes de las variedades proyectivas análoga la que hemos definido para variedades afines.

Consideremos una variedad proyectiva $V \subset \mathrm{P}^n$, sea $P = (a_1, \ldots, a_n, 1)$ un punto del espacio afín $A^n(k)$ determinado por $x_{n+1} \neq 0$ y sea $V_* = V \cap A^n$. Tomemos una forma $F \in I(V)$, de modo que

$$f(X_1, \ldots, X_n) = F(X_1, \ldots, X_n, 1) \in I(V_*).$$

Entonces, un punto $(x_1, \ldots, x_n, 1) \in A^n$ está en $T_P V_*$ si cumple (para toda F)

$$\left.\frac{\partial f}{\partial X_1}\right|_{(a_1,\ldots,a_n)} (x_1 - a_1) + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial X_n}\right|_{(a_1,\ldots,a_n)} (x_n - a_n) = 0.$$

Equivalentemente, la condición es

$$\left.\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|_{(a_1,\ldots,a_n,1)} (x_1 - a_1 x_{n+1}) + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial X_n}\right|_{(a_1,\ldots,a_n,1)} (x_n - a_n x_{n+1}) = 0.$$

Es fácil ver que si F es una forma de grado r, se cumple la relación

$$\frac{\partial F}{\partial X_1} X_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial X_{n+1}} X_{n+1} = rF.$$

(El caso general se deduce por linealidad del caso en que F es un monomio.) Como $F(a_1, \ldots, a_n, 1) = 0$, en particular

$$\left.\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|_{(a_1,\ldots,a_n,1)} a_1 + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial X_n}\right|_{(a_1,\ldots,a_n,1)} a_n = - \left.\frac{\partial F}{\partial X_{n+1}}\right|_{(a_1,\ldots,a_n,1)}.$$

Multiplicando ambos miembros por X_{n+1} y sumando esta identidad a la condición de tangencia, obtenemos que ésta equivale a

$$\left.\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|_{(a_1,\ldots,a_n,1)} x_1 + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial X_{n+1}}\right|_{(a_1,\ldots,a_n,1)} x_{n+1} = 0.$$

Esta condición es homogénea tanto en x como en P, luego podemos expresarla en la forma

$$\left.\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|_P x_1 + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial X_{n+1}}\right|_P x_{n+1} = 0. \tag{3.3}$$

Es fácil ver que esta condición no depende del sistema de referencia, de modo que podemos dar la definición siguiente:

Definición 3.25 Si $V \subset \mathrm{P}^n$ es una variedad proyectiva y $P \in V(k)$, definimos la *variedad (proyectiva) tangente* a V en P como la variedad lineal T_PV determinada por las ecuaciones (3.3), donde F varía en las formas de (un generador de) $I(V)$.

El razonamiento precedente muestra que T_PV es la clausura proyectiva de la variedad tangente en P a la variedad afín V_* que resulta de cortar V con el complementario de cualquier hiperplano en el que no esté P. En particular $\dim T_PV = \dim T_PV_*$.

Definimos la *variedad tangente* en un punto de una variedad cuasiproyectiva como la variedad tangente en dicho punto de su clausura proyectiva.

Si V es una variedad absoluta y la extensión $k(V)/k$ es regular, se cumple que la variedad T_PV es la misma tanto si la construimos considerando a V como variedad sobre k o sobre K, y si extendemos el cuerpo K hasta otro cuerpo algebraicamente cerrado, la variedad tangente en la extensión es la clausura de la variedad tangente en $\mathrm{P}^n(K)$. (Esto se deduce fácilmente del caso afín ya demostrado.)

3.3 Puntos regulares

Ya estamos en condiciones de probar que la dimensión de las variedades tangentes coincide "casi siempre" con la dimensión de la variedad que las determina. En esta sección, cuando hablemos de variedades absolutas, se entenderá que cumplen la condición adicional de que la extensión $k(V)/k$ es regular, lo cual asegura que el ideal $I_K(V)$ está generado por $I_k(V)$, y en particular que si $P \in V(k)$, la variedad tangente T_PV es la misma definida sobre k o sobre K.

Definición 3.26 Diremos que un punto P de una variedad absoluta V es *regular* si cumple que $\dim T_PV = \dim V$. En caso contrario diremos que es *singular*. Una variedad es *regular* si todos sus puntos son regulares.

El teorema siguiente prueba que "casi todo" punto de una variedad es regular:

Teorema 3.27 *Si V es una variedad absoluta, entonces* $\dim T_PV \geq \dim V$ *para todo $P \in V$. El conjunto de puntos donde se da la igualdad (es decir, el conjunto de los puntos regulares de V) es un abierto no vacío.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos primero el caso en que $V \subset A^{n+1}$ es una hipersuperficie, definida por la ecuación $F(X_1, \ldots, X_{n+1}) = 0$, es decir, de modo que $I(V) = (F)$. Entonces la variedad tangente en un punto P de coordenadas $a \in K^n$ está determinada por la ecuación

$$\left.\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|_a (X_1 - a_1) + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial X_{n+1}}\right|_a (X_{n+1} - a_{n+1}) = 0.$$

Así pues, $T_P V$ tendrá dimensión n excepto en los puntos que cumplan

$$\frac{\partial F}{\partial X_1}(P) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial X_{n+1}}(P) = 0.$$

Esto significa que el conjunto de puntos singulares de V es cerrado. Sólo hay que probar que no es todo V, es decir, que no puede ocurrir que las derivadas parciales de F sean idénticamente nulas en V. Esto significaría que todas ellas serían divisibles entre F. Si el cuerpo k tiene característica 0, esto implica que F es constante, lo cual es absurdo, y si k tiene característica prima p, entonces $F = G(X_1^p, \ldots, X_{n+1}^p)$, para cierto polinomio G, pero los coeficientes de G son potencias p-ésimas en K, y entonces $F = H^p$, lo que contradice que $I(V) = (F)$. Con esto hemos probado que las hipersuperficies cumplen el teorema.

Tomemos ahora una variedad cuasiproyectiva arbitraria V de dimensión n y sea $W \subset A^{n+1}$ una hipersuperficie birracionalmente equivalente (teorema 3.8). Esto significa que existen abiertos $V_1 \subset V$ y $W_1 \subset W$ junto con un isomorfismo $\phi : V_1 \longrightarrow W_1$. Por otra parte, existe un abierto $W_2 \subset W$ (que podemos tomar de modo que $W_2 \subset W_1$) formado por puntos regulares, es decir, tales que sus variedades tangentes tienen dimensión n. Los puntos de $V_2 = \phi^{-1}[W_2]$ cumplen lo mismo. Así pues, hemos probado que toda variedad tiene un abierto no vacío de puntos regulares. Vamos a ver que, de hecho, el conjunto de todos los puntos regulares es abierto.

Pasando a $\overline{V}$, podemos suponer que $V \subset \mathrm{P}^N$ es una variedad proyectiva. Sea $P \in V$ un punto cuya variedad tangente tenga dimensión mínima $\dim T_P V = d$. Podemos suponer que P cumple $X_{N+1} \neq 0$, con lo que $P \in V_* \subset A^N$.

Sea $I(V_*) = (F_1, \ldots, F_m)$ y sea $A(X)$ la matriz formada por las derivadas parciales de los polinomios F_i en el punto X. Por 3.20 tenemos que

$$\operatorname{codim} T_X V = \operatorname{rang} A(X),$$

luego $\operatorname{rang} A(P) = N - d$ es máximo. Existe una submatriz $d \times d$ en $A(X)$ cuyo determinante no se anula en P. Este determinante es un polinomio G que define una función $g = [G] \in k[V_*]$. En todos los puntos donde $g(x) \neq 0$, se tiene $\operatorname{rang} A(x) \geq N - d$, pero también se tiene la desigualdad contraria por la maximalidad. Por lo tanto, $U = \{Q \in V_* \mid g(Q) \neq 0\}$ es un abierto no vacío cuyos puntos cumplen $\dim T_Q V_* = d$. Por otra parte, V_* contiene un abierto de puntos regulares, la intersección de éste con U es no vacía y, por consiguiente, ha de ser $n = d$.

Hemos probado que $\dim V$ es la mínima dimensión posible para una variedad tangente a V. Ahora sabemos que el punto P que hemos tomado antes es

cualquier punto regular de V, y hemos probado que existe un abierto U formado por puntos regulares tal que $P \subset U \subset V_* \subset V$, luego el conjunto de puntos regulares es abierto. ∎

El ejemplo 2 de la página 2.2 prueba que toda cónica (irreducible) sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica distinta de 2 es proyectivamente equivalente a $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, luego es regular.

Ejercicio: Sea V la cúbica $Y^2 = X^3$ (véase la página 7). Probar que el único punto singular de V es $(0,0)$. Probar que la aplicación $\phi : A^1 \longrightarrow V$ dada por $\phi(t) = (t^2, t^3)$ es biyectiva y regular, pero no un isomorfismo. Más concretamente, su inversa es regular en el abierto $U = V \setminus \{(0,0)\}$, donde viene dada por $\phi^{-1}(x,y) = y/x$.

Ejemplo *Una cúbica con un punto singular es proyectivamente equivalente (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado) a $Y^2 = X^3$ o bien a $X^3 + Y^3 = XY$. (Suponiendo que la característica del cuerpo no sea 3.)*

En efecto, podemos tomar un sistema de referencia afín en el que el punto singular sea $(0,0)$. Es claro entonces que la ecuación de V es de la forma $F_3(X,Y) + F_2(X,Y) = 0$, donde F_i es una forma de grado i. La forma F_2 no puede ser nula (o la curva sería reducible) y se descompone en producto de dos formas lineales. Distingamos si la descomposición es de tipo $F_2(X,Y) = c(aX + bY)^2$ o bien $F_2(X,Y) = (aX + bY)(cX + dY)$, donde (a,b) y (c,d) son linealmente independientes.

En el primer caso, dividiendo entre c la ecuación y tras un cambio de variable $X' = X$, $Y' = aX + bY$ obtenemos una ecuación de la forma

$$Y^2 - aX^3 - bX^2Y - cXY^2 - dY^3 = 0.$$

Si fuera $a = 0$ la ecuación sería divisible entre Y, luego no sería irreducible. Así pues, $a \neq 0$ y el cambio $X' = \sqrt[3]{a}X$, $Y' = Y$ nos da una ecuación similar con $a = 1$. Haciendo $X = X' - (b/3)Y'$, $Y = Y'$ queda $b = 0$. La clausura proyectiva de la ecuación resultante es

$$Y^2Z - X^3 - cXY^2 - dY^3 = 0.$$

El cambio $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z' + cX' + dY'$ nos da $c = d = 0$. Llegamos así a la curva $Y^2Z = X^3$ o, lo que es lo mismo, a $Y^2 = X^3$.

Consideramos ahora el caso en que F_2 tiene dos factores distintos. El cambio $X' = aX + bY$, $Y' = cX + dY$ nos da una ecuación

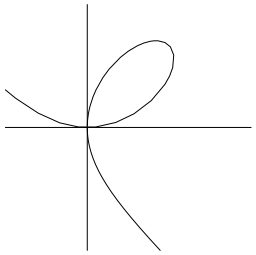
$$aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3 - XY = 0.$$

Si fuera $a = 0$ o $d = 0$ la ecuación sería reducible, luego podemos hacer el cambio $X' = \sqrt[3]{a}X$, $Y' = \sqrt[3]{d}Y$ y obtenemos

$$X^3 + bX^2Y + cXY^2 + Y^3 - eXY = 0.$$

Homogeneizando, haciendo $Z = Z' + bX + cY$ y volviendo a deshomogeneizar queda

$$X^3 + Y^3 - eXY = 0.$$



Por último hacemos $X = eX'$, $Y = eY'$ y dividimos entre e^3, con lo que queda $X^3 + Y^3 = XY$. La figura muestra esta curva. Vemos que es la curva "alfa" en otra posición. De hecho, el argumento anterior muestra que ambas son proyectivamente equivalentes. En la página 137 veremos que las cúbicas $Y^2 = X^3$ y $X^3+Y^3 = XY$ no son isomorfas, de modo que hay exactamente dos cúbicas singulares. Ahora es fácil hacer afirmaciones generales sobre cúbicas singulares. Por ejemplo, una cúbica singular tiene una única singularidad. ∎

El ejemplo siguiente generaliza al ejemplo de la página 76 y al ejercicio anterior.

Ejemplo *Toda cúbica singular es birracionalmente equivalente (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado) a* P^1.

Sea V una cúbica singular. Como en el ejemplo anterior, podemos suponer que su ecuación es de la forma $F_3(X,Y)+F_2(X,Y) = 0$, donde F_i es una forma de grado i. La forma F_2 no puede ser nula, pues entonces V sería reducible.

Para cada $t \in k$, calculamos la intersección de V con la recta $Y = tX$. Está formada por los puntos (X, tX) que cumplen $F_3(X,tX) + F_2(X,tX) = 0$. Esto equivale a

$$X^3 f_3(t) + X^2 f_2(t) = 0,$$

donde f_3 y f_2 son polinomios no nulos de grados 3 y 2 respectivamente. Descartando la solución $X = 0$ (que corresponde al punto $(0,0)$) y los valores de t que anulan a f_3, tenemos que sólo hay otro punto de corte, dado por

$$\phi(t) = \left(-\frac{f_2(t)}{f_3(t)}, -\frac{t f_2(t)}{f_3(t)}\right).$$

Tenemos así $\phi : \mathrm{P}^1 \longrightarrow V$ racional. Más aún, es birracional, pues su inversa (definida sobre los puntos finitos de V donde no se anula x) es $\psi(x,y) = y/x$. ∎

Sistemas de parámetros locales Vamos a estudiar con más detalle los puntos regulares de una variedad. En primer lugar definiremos y estudiaremos el análogo a un sistema de coordenadas (una carta) en geometría diferencial.

Definición 3.28 Sea V una variedad cuasiproyectiva absoluta de dimensión d y $P \in V(k)$ un punto regular. Diremos que $y_1, \ldots, y_d \in \mathcal{O}_P(V)$ forman un *sistema de parámetros locales* en P si pertenecen al ideal $\mathfrak{m}_P$ y sus clases en $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ (esto es, las diferenciales $d_P y_i$) forman una base de este espacio.

Observemos que el anillo $\mathcal{O}_P(V) \subset k(V)$ definido sobre k es un subanillo del anillo $\mathcal{O}_P(V) \subset K(V)$ y se cumple que $y_1, \ldots, y_d$ son un sistema de parámetros locales en P sobre k si y sólo si lo son sobre K.

En efecto, podemos cambiar V por un entorno afín U de P de modo que $y_1, \dots, y_d \in k[U]$. Equivalentemente, podemos suponer que V es afín y que $y_1, \dots, y_d \in k[V] \subset K[V]$. En virtud del isomorfismo dado por 3.21, que las diferenciales $d_P y_i \in \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ sean una base equivale a que lo sean las diferenciales $d_P y_i \in \overrightarrow{T}_P V^*$ o en $\overrightarrow{T}_P V(k)^*$. Ahora bien su definición es la misma, por lo que, las diferenciales en $\overrightarrow{T}_P V(k)^*$ no son sino las restricciones $d_P y_i|_{\vec{T}_P(k)}$.

Ahora basta tener en cuenta que una k-base $v_1, \dots, v_d$ de $\overrightarrow{T}_P V(k)$ es también una K-base de $\overrightarrow{T}_P V$, y que las diferenciales son linealmente independientes (sobre k o sobre K) si y sólo si la matriz $(d_P y_i(v_j))$ tiene determinante no nulo, lo cual no depende del cuerpo.

Vamos a estudiar más detalladamente el caso en que $V \subset A^n$ es una variedad afín de dimensión d. Fijamos un sistema de referencia afín en A^n, que determina las funciones coordenadas $X_i : A^n \longrightarrow K$, que a su vez se restringen a las funciones coordenadas $x_i \in k[V]$, de modo que $x_i : V \longrightarrow K$. Si $P \in V$, no hay que confundir a estas funciones con las diferenciales $d_P X_i : \overrightarrow{T}_P A^n \longrightarrow K$, que asignan a cada vector sus coordenadas en la base fijada por el sistema de referencia y que se restringen a las diferenciales $d_P x_i : \overrightarrow{T}_P V \longrightarrow K$. (Las primeras actúan sobre puntos, las segundas sobre vectores.)

Las diferenciales $d_P X_i$ son la base dual de la base de $\overrightarrow{T}_P A^n = K^n$ determinada por el sistema de referencia fijado, luego son una base de $(\overrightarrow{T}_P A^n)^*$. En general, una inclusión entre espacios vectoriales $W \subset V$, que es un monomorfismo, induce la restricción $V^* \longrightarrow W^*$ entre los espacios duales, que es un epimorfismo, luego concluimos que las diferenciales $d_P x_i$ son un sistema generador de $\overrightarrow{T}_P V^*$.

Como $x_i - x_i(P) \in \mathfrak{m}_P$ y $d_P(x_i - x_i(P)) = d_P x_i$, concluimos que $x_i - x_i(P)$ son un sistema generador de $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$, luego contienen un sistema de parámetros locales en P.

Pongamos ahora que $I(V) = (F_1, \dots, F_m)$, con $F_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ y llamemos $a \in K^n$ al vector de coordenadas de P. Según el teorema 3.20, la regularidad de P equivale a que la matriz A de las derivadas de los polinomios $F_1, \dots, F_m$ evaluadas en a cumpla $\operatorname{rang} A = n - d$, luego A debe tener un menor de orden $n - d$ no nulo. Reordenando los polinomios y las variables, podemos suponer que

$$\begin{vmatrix} \left.\frac{\partial F_1}{\partial X_{d+1}}\right|_a & \cdots & \left.\frac{\partial F_1}{\partial X_n}\right|_a \\ \vdots & & \vdots \\ \left.\frac{\partial F_{n-d}}{\partial X_{d+1}}\right|_a & \cdots & \left.\frac{\partial F_{n-d}}{\partial X_n}\right|_a \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.4}$$

Las derivadas parciales que aparecen en el determinante definen funciones en $k[V]$, y el determinante es a su vez una función $g \in k[V]$ (que no depende de P), de modo que (3.4) es equivalente a $g(P) \neq 0$. Consideramos el abierto principal $V_g = \{Q \in V \mid g(Q) \neq 0\}$, que es un entorno de P.

Para todo punto $Q \in V_g$, y todo $v \in \overrightarrow{T_Q}V$, las coordenadas $d_Q x_i(v)$ satisfacen el sistema de ecuaciones (3.2), donde ahora a es el vector de coordenadas de Q. Como además se cumple (3.4), en (3.2) podemos pasar a la derecha los primeros d sumandos de cada ecuación y aplicar la regla de Cramer, que nos permite expresar

$$d_Q x_i = \sum_{j=1}^{d} c_{ij}(Q) d_Q x_j, \qquad i = d+1, \ldots, n,$$

para ciertas funciones racionales $c_{ij} \in k[V_g]$ que no dependen de Q.

Estas relaciones muestran que $d_Q x_1, \ldots, d_Q x_d$ son una base de $\overrightarrow{T_Q}V$ (porque son un generador y por 3.27 la dimensión no puede ser menor que d). En particular, todos los puntos de V_g son regulares y las funciones $x_i - x_i(Q)$ forman un sistema de parámetros locales en cada punto de V_g. Vamos a probar algo más general:

Teorema 3.29 *Sea V una variedad absoluta, sea $P \in V(k)$ un punto regular y consideremos funciones $y_1, \ldots, y_d \in \mathcal{O}_P(V)$ tales que $y_i - y_i(P)$ formen un sistema de parámetros locales en P. Entonces P tiene un entorno U, formado por puntos regulares, de modo que $y_i \in k[U]$ y para todo $Q \in U$ las funciones $y_i - y_i(Q)$ forman un sistema de parámetros locales en Q.*

Demostración: Podemos sustituir V por un abierto afín U de manera que $y_1, \ldots, y_d \in k[U]$ o, equivalentemente, podemos suponer que V es afín y que $y_1, \ldots, y_d \in k[V]$. Así estamos en las condiciones de la discusión precedente. Pongamos que $y_i = [G_i]$, con $G_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Entonces

$$d_Q y_i = \left.\frac{\partial G_i}{\partial X_1}\right|_{a'} d_Q x_1 + \cdots + \left.\frac{\partial G_i}{\partial X_n}\right|_{a'} d_Q x_n,$$

donde a' es el vector de coordenadas de Q. Las derivadas parciales definen funciones $g_{ij} \in k[V]$, de modo que

$$\begin{aligned} d_Q y_i &= \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(Q) d_Q x_j = \sum_{j=1}^{d} g_{ij}(Q) d_Q x_j + \sum_{t=d+1}^{n} g_{it}(Q) \sum_{j=1}^{d} c_{tj}(Q) d_Q x_j \\ &= \sum_{j=1}^{d} h_{ij}(Q) d_Q x_j, \end{aligned}$$

para ciertas funciones $h_{ij} \in k[V_g]$ que no dependen de Q. Las diferenciales $d_Q y_i$ serán una base de $\overrightarrow{T_Q}V^*$ si y sólo si $\det(h_{ij}(Q)) \neq 0$, pero este determinante es una función $h \in k[V_g]$.

Estamos suponiendo que $d_P y_i$ son una base de $\overrightarrow{T_P}V^*$, luego $h(P) \neq 0$ y V_{gh} es un entorno de P tal que, para todo $Q \in V_{gh}$, se cumple que las diferenciales $d_Q y_i$ son una base de $\overrightarrow{T_Q}V$, luego las funciones $y_i - y_i(Q)$ son un sistema de parámetros locales[3] en Q. ∎

[3]Notemos que si $Q \notin V(k)$, entonces tenemos que $y_i - y_i(Q) \in K[V]$, pero no están necesariamente en $k[V]$. No obstante, el abierto U del enunciado lo es para la topología de Zariski relativa a k.

Ejercicio: Sean V y W dos variedades, $x_1, \ldots, x_n$ un sistema de parámetros locales en un punto regular $P \in V$ y sea $y_1, \ldots, y_m$ un sistema de parámetros locales en un punto regular $Q \in W$. Consideremos la variedad producto $V \times W$, llamemos x_i a $p_1 \circ x_i$ e y_i a $p_2 \circ y_i$. Entonces $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ forman un sistema de parámetros locales de $V \times W$ en (P, Q).

Regularidad en conjuntos algebraicos afines Por razones técnicas necesitamos extender la noción de punto regular al caso de puntos de conjuntos algebraicos afines no necesariamente irreducibles.

Definición 3.30 Si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico afín y $P \in C$, definimos $\dim_P C$ como el máximo de las dimensiones de las componentes irreducibles de C que pasan por P. Diremos que P es *regular* en C si $\dim_P C = \dim T_P C$.

Al igual que sucede con las variedades, la desigualdad $\dim_P C \leq \dim T_P C$ se da siempre. En efecto, si $C_1, \ldots, C_r$ son las componentes irreducibles de C que pasan por P, tenemos que $\overrightarrow{T_P C_i} \subset \overrightarrow{T_P C}$, luego $\dim C_i \leq \overrightarrow{T_P C_i} \leq \dim T_P C$, y basta tomar el máximo en i.

La definición de sistema de parámetros locales en un punto regular $P \in C(k)$ vale en este contexto, es decir, unas funciones $x_1, \ldots, x_d \in k[C]$ son un sistema de parámetros locales en P si y sólo si generan el espacio vectorial $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$, lo cual equivale a que las diferenciales $d_P x_1, \ldots, d_P x_d$ sean una base del espacio dual $\overrightarrow{T_P C}^*$ o, equivalentemente, si el sistema $d_P x_1 = \cdots = d_P x_d = 0$ tiene únicamente la solución trivial en $\overrightarrow{T_P C}$.

En efecto, si los $d_P x_i$ son una base, entonces, para cada $v \in \overrightarrow{T_p C}$, se cumple que $d_P x_i(v)$ es la coordenada i-ésima de v en la base dual, y si todas sus coordenadas son nulas, es que $v = 0$. Recíprocamente, si los $d_P x_i$ no forman una base, pongamos que $d_P x_1, \ldots, d_P x_t$ son linealmente independientes, con $t < d$, y que las demás diferenciales son combinaciones lineales de éstas. Completemos hasta una base con $f_{t+1}, \ldots, f_d$ y consideremos el vector $v_{t+1} \neq 0$ de la base dual. Éste cumple que $d_P x_i(v_{t+1}) = 0$ para $i = 1, \ldots, t$, luego de hecho para todo i.

Sea V una componente irreducible de C tal que $\dim V = \dim_P C = d$. Entonces $\overrightarrow{T_P V} \subset \overrightarrow{T_P C}$ y

$$\dim T_P C = d = \dim V \leq \dim T_P V \leq \dim T_P C,$$

luego todas las desigualdades son igualdades, $T_P V = T_P C$ y P es un punto regular de V.

Elijamos, para cada i, una componente geométricamente irreducible V_i que contenga a P de la variedad $\{Q \in V \mid x_i(Q) = 0\}$ (puede probarse que sólo hay una, pero no necesitaremos este hecho). Según 3.12 tenemos que $\dim V_i = d - 1$ (notemos que x_i no puede ser nula en V o si no $d_P x_i = 0$).

Es claro que $\overrightarrow{T_P V_i} \subset \overrightarrow{T_P V}$, así como que $d_P x_i|_{\overrightarrow{T_P V_i}} = d_P(x_i|_{V_i}) = 0$. Así pues, si llamamos $L_i = \{Q \in \overrightarrow{T_P V} \mid d_P x_i(Q) = 0\}$, tenemos que $\overrightarrow{T_P V_i} \subset L_i$.

Como $d_P x_i \neq 0$, es claro que $\dim L_i = n-1$. Por otra parte, también tenemos que $\dim \overrightarrow{T_P} V_i \geq \dim V_i = d-1$, luego $\dim \overrightarrow{T_P} V_i = d-1$, lo que significa que P es un punto regular de cada V_i. Además, $\bigcap_i \overrightarrow{T_P} V_i \subset \bigcap_i L_i = \{P\}$, pues P es el único cero común de las funciones $d_P x_i$, luego $\bigcap_i \overrightarrow{T_P} V_i = \{P\}$.

Sea ahora V_0 una componente geométricamente irreducible de $V_1 \cap \cdots \cap V_d$ que contenga a P. Así, $T_P V_0 \subset \bigcap_i T_P V_i = \{P\}$, luego $\dim V_0 \leq \dim T_P V_0 = 0$. Por consiguiente,

$$\dim(V_1 \cap \cdots \cap V_d) = 0.$$

Según el teorema 3.12, en la sucesión

$$V_1, \quad V_1 \cap V_2, \quad V_1 \cap V_2 \cap V_3, \quad \ldots$$

la dimensión disminuye a lo sumo una unidad en cada paso. Como al cabo de d pasos alcanzamos la dimensión 0, concluimos que la dimensión disminuye exactamente en una unidad en cada paso. En particular, x_d no se anula en $V_1 \cap \cdots \cap V_{d-1}$.

Enunciamos los dos teoremas siguientes para variedades cuasiproyectivas absolutas, pero notamos que las pruebas valen también para conjuntos algebraicos afines no necesariamente irreducibles:

Teorema 3.31 *Si V es una variedad absoluta, $P \in V(k)$ es un punto regular y $x_1, \ldots, x_d$ es un sistema de parámetros locales en P, entonces ninguna x_i es idénticamente nula sobre el conjunto de puntos de V donde se anulan las restantes.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos sustituir la variedad V por un abierto afín U tal que $x_1, \ldots, x_d \in k[U]$ y el resultado se reduce a lo que acabamos de probar. ∎

En principio, un sistema de parámetros locales genera el cociente $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Vamos a probar que, de hecho, genera el ideal $\mathfrak{m}_P$. Se trata de una consecuencia más del lema de Nakayama:

Teorema 3.32 *Sea V una variedad y $P \in V$ un punto regular. Entonces todo sistema de parámetros locales en P es un generador del ideal $\mathfrak{m}_P$.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el teorema B.3 tomando $\mathfrak{a} = M = \mathfrak{m}_P$. Los elementos de $1 + \mathfrak{m}_P$ son inversibles, porque son funciones que no se anulan en P y, por el teorema 1.24, sabemos que $\mathfrak{m}_P$ es un ideal (o un $\mathcal{O}_P(V)$-módulo) finitamente generado. ∎

Series de Taylor Si V es una variedad de dimensión d, toda función racional en V puede expresarse como función algebraica de un sistema generador de $k(V)$, pero los sistemas generadores de $k(V)$ tienen, por lo general, más de d elementos. Ahora probaremos que toda función racional puede expresarse en

un entorno de cada punto regular como función de un sistema de parámetros locales, pero la expresión ya no será algebraica sino analítica, como serie de potencias. En esta sección necesitaremos los resultados sobre series formales de potencias probados en la sección B.2.

Consideremos un conjunto algebraico afín $C \subset A^n$, sea $P \in C(k)$ un punto regular, fijemos un sistema de parámetros locales $x_1, \dots, x_d$ en P y tomemos una función $\alpha \in \mathcal{O}_P(C)$. Sea $\alpha(P) = a_0$. Entonces $\alpha - a_0 \in \mathfrak{m}_P$, luego su clase módulo $\mathfrak{m}_P^2$ es combinación lineal de los parámetros $x_1, \dots, x_n$, es decir, existen $a_1, \dots, a_d \in k$ y $\alpha_1 \in \mathfrak{m}_P^2$ tales que

$$\alpha = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_dx_d + \alpha_1.$$

Como $\alpha_1 \in \mathfrak{m}_P^2$, tenemos que $\alpha_1 = \sum_i \beta_i\gamma_i$, con β_i, $\gamma_i \in \mathfrak{m}_P$. Por lo tanto,

$$\beta_i = \sum_j b_{ij}x_j + \beta_i', \quad \gamma_i = \sum_j c_{ij}x_j + \gamma_i', \qquad \beta_i', \gamma_i' \in \mathfrak{m}_P^2, \qquad b_{ij}, c_{ij} \in k.$$

Por lo tanto

$$\alpha_1 = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j + \alpha_2, \qquad \alpha_2 \in \mathfrak{m}_P^3, \qquad a_{ij} \in k,$$

con lo que

$$\alpha = a_0 + \sum_i a_ix_i + \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j + \alpha_2.$$

De este modo vamos obteniendo una serie de potencias que satisface la definición siguiente:

Definición 3.33 Sea V una variedad cuasiproyectiva, sea $P \in V(k)$ un punto regular, sea $x_1, \dots, x_d$ un sistema de parámetros locales en P y $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$. Diremos que una serie $\sum_m F_m \in k[[X_1, \dots, X_d]]$ es una *serie de Taylor* de α alrededor de P respecto al sistema de parámetros dado si para cada $r \geq 0$ se cumple que

$$\alpha - \sum_{m=0}^{r} F_m(x_1, \dots, x_d) \in \mathfrak{m}_P^{r+1}.$$

Es claro que la existencia de una serie de Taylor para cada función $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$ alrededor de cada punto $P \in V(k)$ se reduce al caso afín, pero en este caso hemos probado dicha existencia sin suponer que V sea irreducible. Más aún:

Teorema 3.34 *Si V es una variedad y $P \in V(k)$ es un punto regular, entonces toda función $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$ admite un único desarrollo en serie de Taylor respecto a un sistema de parámetros locales dado.*

Demostración: Claramente, no perdemos generalidad si suponemos que la variedad es afín y, en tal caso, vamos a ver que el resultado es cierto para cualquier conjunto algebraico afín C, no necesariamente irreducible.

Basta probar que la función nula sólo admite como desarrollo en serie de Taylor a la serie nula. Fijado un sistema de parámetros $x_1, \ldots, x_d$, supongamos que $\sum_m F_m$ es una serie de Taylor de la función nula. Entonces

$$\sum_{m=0}^{r} F_m(x_1, \ldots, x_d) \in \mathfrak{m}_P^{r+1}. \tag{3.5}$$

Basta probar que si F_m es una forma de grado m y $F_m(x_1, \ldots, x_d) \in \mathfrak{m}_P^{m+1}$ entonces $F_m = 0$. En efecto, entonces (3.5) para $r = 0$ nos da que $F_0 = 0$, a su vez, (3.5) para $r = 1$ nos da $F_1 = 0$, etc.

Supongamos que, por el contrario $F_m(X_1, \ldots, X_d) \neq 0$. Entonces existe $(a_1, \ldots, a_d) \in k^d$ tal que $F_m(a_1, \ldots, a_d) \neq 0$. Tomemos una matriz regular A tal que $(0, \ldots, 0, 1)A = (a_1, \ldots, a_d)$. Sea $F'_m(X') = F_m(X'A)$. Sean $x'_1, \ldots, x'_d \in \mathcal{O}_P(C)$ dados por $(x'_1, \ldots, x'_d) = (x_1, \ldots, x_d)A^{-1}$. Es claro que $x'_1, \ldots, x'_d$ forman también un sistema de parámetros locales en P y además $F'_m(x'_1, \ldots, x'_d) = F_m(x_1, \ldots, x_d) \in \mathfrak{m}_P^{m+1}$.

Por consiguiente podemos reemplazar los x_i por los x'_i y F_m por F'_m, con lo que además tenemos que $F_m(0, \ldots, 0, 1) \neq 0$, es decir, el coeficiente de X_d^m es no nulo. Digamos que

$$F_m = aX_d^m + G_1(X_1, \ldots, X_{n-1})X_d^{m-1} + \cdots + G_m(X_1, \ldots, X_{n-1}),$$

donde $a \neq 0$ y cada G_i es una forma de grado i. Como los parámetros locales generan el ideal $\mathfrak{m}_P$ (teorema 3.32), una simple inducción muestra que todo elemento de $\mathfrak{m}_P^{m+1}$ puede expresarse como una forma de grado m en $x_1, \ldots, x_d$ con coeficientes en $\mathfrak{m}_P$. La hipótesis es entonces que

$$\begin{aligned} &ax_d^m + G_1(x_1, \ldots, x_{d-1})x_d^{m-1} + \cdots + G_m(x_1, \ldots, x_{d-1}), \\ &= \alpha x_d^m + H_1(x_1, \ldots, x_{d-1})x_d^{m-1} + \cdots + H_m(x_1, \ldots, x_{d-1}), \end{aligned}$$

donde $\alpha \in \mathfrak{m}_P$ y las H_i son formas de grado i con coeficientes en $\mathfrak{m}_P$. De aquí deducimos que $(a - \alpha)x_d^m \in (x_1, \ldots, x_{d-1})$. Como $a \neq 0$, se cumple que $a - \alpha \notin \mathfrak{m}_P$, luego $(a - \alpha)^{-1} \in \mathcal{O}_P(C)$ y llegamos a que $x_d^m \in (x_1, \ldots, x_{d-1})$. Esto contradice al teorema 3.31. ∎

La unicidad implica en particular que si $P \in V(k)$, su serie de Taylor respecto a V como variedad (absoluta) definida sobre k es la misma que respecto a V considerada como variedad definida sobre cualquier extensión de k.

El hecho de que una función está determinada por su serie de Taylor es otra consecuencia del lema de Nakayama:

Teorema 3.35 *Si V es una variedad, $P \in V(k)$ es un punto regular y $x_1, \ldots, x_d$ es un sistema de parámetros locales en P, entonces la aplicación*

$$\tau : \mathcal{O}_P(V) \longrightarrow k[[X_1, \ldots, X_d]]$$

que asigna a cada función su serie de Taylor es un monomorfismo de anillos.

DEMOSTRACIÓN: Una vez más no perdemos generalidad si suponemos que V es afín, y en tal caso vamos a probar el resultado para un conjunto algebraico afín C arbitrario, no necesariamente irreducible. Es claro que τ conserva la suma. Si

$$\tau(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m, \qquad \tau(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m,$$

entonces

$$\alpha = \sum_{m=0}^{r} F_m(x_1,\dots,x_d) + \alpha', \quad \beta = \sum_{m=0}^{r} G_m(x_1,\dots,x_d) + \beta', \quad \alpha',\beta' \in \mathfrak{m}_P^{r+1},$$

$$\alpha\beta = \sum_{m=0}^{r} \sum_{i+j=m} F_iG_j + \sum_{m=r+1}^{2r} \sum_{i+j=m} F_iG_j + \beta' \sum_{m=0}^{r} F_m + \alpha' \sum_{m=0}^{r} G_m,$$

luego

$$\alpha\beta - \sum_{m=0}^{r} \sum_{i+j=m} F_iG_j \in \mathfrak{m}_P^{r+1}.$$

Esto prueba que $\tau(\alpha\beta) = \tau(\alpha)\tau(\beta)$, luego τ es un homomorfismo. Es claro que su núcleo es el ideal $M = \bigcap_{r>0} \mathfrak{m}_P^r$. Según el teorema B.5 tenemos que $M = 0$. ∎

Si $\tau(\alpha) = \sum_{i_1,\dots,i_d}^{\infty} a_{i_1,\dots,i_d} X_1^{i_1} \cdots X_d^{i_n}$, escribiremos

$$\alpha = \sum_{i_1,\dots,i_d}^{\infty} a_{i_1,\dots,i_d} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}.$$

Hemos de observar que, en principio, si una serie de este tipo es finita, tiene dos interpretaciones, pero es fácil ver que ambas coinciden.

Como primera aplicación de la existencia de desarrollos en series de Taylor probamos lo siguiente:

Teorema 3.36 *Si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico afín, un punto $P \in C(k)$ es regular si y sólo si pertenece a una única componente irreducible de C y es regular en ella.*

DEMOSTRACIÓN: Si P es regular, el teorema anterior (que hemos probado para conjuntos algebraicos afines arbitrarios) prueba que $\mathcal{O}_P(C)$ es un dominio íntegro, pues es isomorfo a un subanillo de $k[[X_1,\dots,X_d]]$. Por otro lado, si $C(P)$ es la unión de las componentes irreducibles de C que pasan por P, tras la definición 1.23 hemos visto que $\mathcal{O}_P(C(P))$ es isomorfo a $\mathcal{O}_P(C)$, luego también es un dominio íntegro, y también sabemos que $k[C(P)] \subset \mathcal{O}_P(C(P))$, luego $k[C(P)]$ también es un dominio íntegro, y esto exige que $C(P)$ sea irreducible, pues si tuviéramos una descomposición $C(P) = C_1 \cup C_2$ en dos cerrados estrictos, podríamos tomar $F_1 \in I(C_1)\setminus I(C_2)$, $F_2 \in I(C_2)\setminus I(C_1)$, y entonces $[F_1][F_2] = 0$ en $k[C(P)]$, pero $[F_1] \neq 0 \neq [F_2]$.

Así pues, P pertenece a una única componente irreducible V de C, luego

$$\dim V = \dim_P C = \dim T_P C = \dim T_P V,$$

donde hemos usado la definición de dimensión local, la regularidad de P y el hecho de que $\mathcal{O}_P(C)$ es isomorfo a $\mathcal{O}_P(V)$, y estos anillos determinan los espacios tangentes correspondientes. Esto prueba que P es regular en V. La otra implicación es inmediata. ∎

El teorema anterior muestra que el concepto de punto regular de un conjunto algebraico afín se reduce trivialmente al de punto regular de una variedad afín. Sin embargo, el hecho de que esto sea así no es trivial, y si hemos trabajado con conjuntos algebraicos afines arbitrarios ha sido con el propósito de demostrar el teorema siguiente sobre variedades:

Teorema 3.37 *Si $V \subset A^n$ es una variedad afín absoluta de dimensión d y $P \in V(k)$ es un punto regular, en un entorno $U \subset A^n$ de P, la variedad V está definida por $n-d$ ecuaciones, es decir, existen $F_1, \dots, F_{n-d} \in k[X_1, \dots, X_n]$ tales que*

$$V \cap U = \{Q \in U \mid F_1(Q) = \cdots = F_{n-d}(Q) = 0\}.$$

Demostración: Pongamos que $\dim V = \dim T_P V = d$ y tomemos un sistema generador $I(V) = (F_1, \dots, F_m)$. En estas circunstancias, en los argumentos previos al teorema 3.29, hemos visto que, reordenando las variables si es preciso, se cumple (3.4). Sea $C = V(F_1, \dots, F_{n-d})$, de modo que $V \subset C \subset A^n$. Por (3.4) tenemos que $\overrightarrow{T_P C} \subset K^n$ está definido por $n-d$ ecuaciones lineales linealmente independientes, luego $\dim T_P C = d$. Por otra parte, el teorema 3.15 nos da que $\dim_P C \geq d$, luego $\dim T_P C \leq \dim_P C$, y la desigualdad contraria se da siempre, así que $\dim_P C = \dim T_P C = d$, lo que significa que P es un punto regular de C. Por el teorema anterior C tiene una única componente irreducible (de dimensión d) que pasa por P y, necesariamente, dicha componente es V.

Sea C' la unión de las restantes componentes irreducibles de C, que es cerrado en A^n. Sea $U = A^n \setminus C$, de modo que $P \in V \cap U$ y claramente $V \cap U$ está definido por $n-d$ ecuaciones como indica el enunciado. ∎

El hecho de que los anillos $\mathcal{O}_P(V)$ correspondientes a puntos regulares puedan sumergirse en anillos de series formales de potencias tiene una consecuencia muy fuerte: son dominios de factorización única. Para probarlo necesitamos un resultado previo:

Teorema 3.38 *Sea A un anillo noetheriano contenido en un anillo noetheriano $\hat{A}$ con factorización única. Supongamos que A tiene un único ideal maximal $\mathfrak{m}$ y $\hat{A}$ tiene un único ideal maximal $\hat{\mathfrak{m}}$ de modo que:*

1. *$\mathfrak{m}\hat{A} = \hat{\mathfrak{m}}$,*
2. *$(\mathfrak{m}^n \hat{A}) \cap A = \mathfrak{m}^n$ para todo $n > 0$,*
3. *para cada $\alpha \in \hat{A}$ y cada $n > 0$ existe $a_n \in A$ tal que $\alpha - a_n \in \mathfrak{m}^n \hat{A}$.*

Entonces A es también un dominio de factorización única.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que para todo ideal $\mathfrak{a} \subset A$ se cumple $(\mathfrak{a}\hat{A})\cap A = \mathfrak{a}$.

Como A es noetheriano tenemos que $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Sea $x \in (\mathfrak{a}\hat{A}) \cap A$. Entones $x = \sum a_i\alpha_i$, con $\alpha_i \in \hat{A}$. Por c) existen elementos $a_i^{(n)} \in A$ tales que $\alpha_i = a_i^{(n)} + \xi_i^{(n)}$, con $\xi_i^{(n)} \in \mathfrak{m}^n\hat{A}$. Sustituyendo en la expresión de x llegamos a que $x = a+\xi$, donde $a \in \mathfrak{a}$ y $\xi \in \mathfrak{m}^n\hat{A}$. Por lo tanto $\xi = x-a \in A\cap\mathfrak{m}^n\hat{A} = \mathfrak{m}^n$. Concluimos que $x \in \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n$ para todo $n > 0$, luego $x \in \mathfrak{a}$ por B.5.

Puesto que A es noetheriano, basta demostrar que todos sus elementos irreducibles son primos. En primer lugar demostramos que si a, $b \in A$, entonces $a \mid b$ en A si y sólo si $a \mid b$ en $\hat{A}$. En efecto, si $a \mid b$ en $\hat{A}$ hemos probado que $b \in A \cap (a)\hat{A} = (a)$, luego $a \mid b$ en A.

Supongamos ahora que a es irreducible en A y que $a \mid bc$, pero $a \nmid b$. Basta probar que $a \mid c$ (en $\hat{A}$). A su vez, para esto basta probar que a y b son primos entre sí en $\hat{A}$. En caso contrario, $a = \gamma\alpha$, $b = \gamma\beta$, con α, β, $\gamma \in \hat{A}$, de modo que γ no es unitario y α, β son primos entre sí. Entonces $a\beta - b\alpha = 0$.

Por hipótesis existen x_n, $y_n \in A$, u_n, $v_n \in \mathfrak{m}^n\hat{A}$ tales que $\alpha = x_n + u_n$, $\beta = y_n+v_n$. Entonces $ay_n-bx_n \in ((a,b)\mathfrak{m}^n\hat{A})\cap A = (a,b)\mathfrak{m}^n$. Por consiguiente, $ay_n - bx_n = at_n + bs_n$, con s_n, $t_n \in \mathfrak{m}^n$. Reordenando, $a(y_n - t_n) = b(x_n + s_n)$, luego $\alpha(y_n - t_n) = \beta(x_n + s_n)$.

Como α y β son primos entre sí, tenemos que $x_n+s_n = \alpha\lambda$, con $\lambda \in \hat{A}$. Por el teorema B.5 sabemos que la intersección de los ideales $\hat{\mathfrak{m}}^n$ es nula, luego existe un mínimo n suficientemente grande tal que $\alpha \notin \hat{\mathfrak{m}}^{n-1}$. Entonces $x_n + s_n \notin \mathfrak{m}^{n-1}$, luego $\lambda \notin \hat{\mathfrak{m}}$ (pues $\alpha \in \hat{\mathfrak{m}}^{n-2}$). Esto significa que λ es una unidad, luego $x_n + s_n \mid \alpha$ y, de aquí, $x_n + s_n \mid a$. Digamos que $a = (x_n + s_n)h$, con $h \in A$.

De la igualdad $a(y_n - t_n) = b(x_n + s_n)$ obtenemos que $b = (y_n + t_n)h$. Estamos suponiendo que a es irreducible en A y que no divide a b, luego h ha de ser una unidad en A. Concluimos que $(a) = (x_n + s_n) = (\alpha)$, luego γ es una unidad, y tenemos una contradicción. ∎

Teorema 3.39 *Si V es una variedad y $P \in V(k)$ es un punto regular, entonces $\mathcal{O}_P(V)$ es un dominio de factorización única.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema 3.35 nos permite considerar a $\mathcal{O}_P(V)$ como subanillo del anillo de series formales de potencias $\hat{\mathcal{O}}_P(V) = k[[X_1, \ldots, X_n]]$. Sólo hemos de comprobar que se cumplen las hipótesis del teorema anterior. Ciertamente $\mathcal{O}_P(V)$ y $\hat{\mathcal{O}}_P(V)$ son ambos noetherianos y tienen un único ideal maximal $\mathfrak{m}_P$ y $\hat{\mathfrak{m}}_P$, respectivamente. Además $\hat{\mathcal{O}}_P(V)$ es un dominio de factorización única.

De la definición 3.33 se sigue que los elementos de $\mathfrak{m}_P$ tienen series de Taylor en $\hat{\mathfrak{m}}_P$. Esto prueba la inclusión $\mathfrak{m}_P\hat{\mathcal{O}}_P(V) \subset \hat{\mathfrak{m}}_P$. Además $\hat{\mathfrak{m}}_P = (X_1, \ldots, X_n)$ y las indeterminadas X_i son las series de Taylor de los parámetros x_i, luego están en $\mathfrak{m}_P$ y tenemos la igualdad. Más en general, de aquí se sigue que $\hat{\mathfrak{m}}_P^n = \mathfrak{m}_P^n\hat{\mathcal{O}}_P(V)$.

Un elemento $\alpha \in (\mathfrak{m}_P^n\hat{\mathcal{O}}_P(V)) \cap \mathcal{O}_P(V)$ es una función cuya serie de Taylor no tiene términos de grado menor que n, luego por la definición de la serie de Taylor se cumple que $\alpha \in \mathfrak{m}_P^r$.

Finalmente, a cada serie de $\hat{\mathcal{O}}_P(V)$ le podemos restar la serie finita formada por sus términos hasta grado $n-1$ (que es la serie de Taylor de una función de $\mathcal{O}_P(V)$) y así obtenemos una serie de $\hat{\mathfrak{m}}_P^n$. ∎

De la prueba de los dos últimos teoremas podemos extraer una conclusión de interés en sí misma:

Teorema 3.40 *Sea V una variedad, sea $P \in V(k)$ un punto regular y consideremos la aplicación $\tau : \mathcal{O}_P(V) \longrightarrow k[[X_1, \ldots, X_n]]$ que a cada función le asigna su serie de Taylor respecto a un sistema de parámetros prefijado. Entonces, para cada $r \geq 0$ se cumple que*

$$\mathfrak{m}_P^r = \{\alpha \in \mathcal{O}_P(V) \mid v(\tau(\alpha)) \geq r\}.$$

Demostración: En la prueba del teorema anterior hemos obtenido que $\hat{\mathfrak{m}}_P^r = \mathfrak{m}_P^r \hat{\mathcal{O}}_P(V)$, mientras que en la prueba de 3.38 hemos demostrado que $(\mathfrak{a}\hat{A}) \cap A = \mathfrak{a}$. Combinando ambos hechos concluimos que

$$\hat{\mathfrak{m}}_P^r \cap \mathcal{O}_P(V) = \mathfrak{m}_P^r.$$

Esto equivale a la relación del enunciado. ∎

Como aplicación demostramos lo siguiente:

Teorema 3.41 *Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación regular entre variedades, sea $P \in V(k)$ y $Q = \phi(P) \in W(k)$. Sean $t_1, \ldots, t_m$ y $x_1, \ldots, x_n$ sistemas de parámetros locales en P y Q respectivamente. Para cada $\alpha \in \mathcal{O}_Q(W)$, se cumple*

$$\tau(\overline{\phi}(\alpha)) = \tau(\alpha)(\tau(\overline{\phi}(x_1)), \ldots, \tau(\overline{\phi}(x_n))).$$

Demostración: Observemos en primer lugar que $\overline{\phi}(x_i) \in \mathfrak{m}_P(V)$, luego $v(\tau(\overline{\phi}(x_i))) \geq 1$. De aquí se sigue fácilmente que $\tau(\alpha)(\tau(\overline{\phi}(x_1)), \ldots, \tau(\overline{\phi}(x_n)))$ (entendido como el límite de las sumas parciales de $\tau(\alpha)$ evaluadas en las series $\tau(\overline{\phi}(x_i))$) es convergente. En este sentido hay que entender el miembro derecho de la igualdad del enunciado.

Consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Q(W) & \xrightarrow{\overline{\phi}} & \mathcal{O}_P(V) \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ k[[X_1, \ldots, X_n]] & \xrightarrow[\psi]{} & k[[T_1, \ldots, T_m]] \end{array}$$

donde $\psi(F) = F(\tau(\overline{\phi}(x_1)), \ldots, \tau(\overline{\phi}(x_n)))$. Para probar el teorema basta demostrar que es conmutativo.

Como τ y $\overline{\phi}$ son k-homomorfismos de anillos, si $F(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tenemos que

$$\begin{aligned} \tau(\overline{\phi}(F(x_1, \ldots, x_n))) &= F(\tau(\overline{\phi}(x_1)), \ldots, \tau(\overline{\phi}(x_n))) \\ &= \psi(F(X_1, \ldots, X_n)) = \psi(\tau(F(t_1, \ldots, t_n))). \end{aligned}$$

Así pues, el diagrama conmuta sobre $k[x_1,\dots,x_n]$. Si identificamos $\mathcal{O}_Q(W)$ y $\mathcal{O}_P(V)$ con sus imágenes en los anillos de series de potencias tenemos que el anillo $k[x_1,\dots,x_n]$ se corresponde con $k[X_1,\dots,X_n]$, que es denso en $k[[X_1,\dots,X_n]]$. Hemos demostrado que la aplicación correspondiente con $\overline{\phi}$ a través de la identificación coincide con $\psi|_{\mathcal{O}_Q(W)}$ sobre $k[X_1,\dots,X_n]$. Si demostramos que ambas son continuas, entonces serán iguales.

Teniendo en cuenta que ambas conservan las sumas, basta probar que son continuas en 0, para lo cual a su vez basta ver que

$$v(\overline{\phi}(\alpha)) \geq v(\alpha), \qquad v(\psi(F)) \geq v(F).$$

La segunda desigualdad es obvia (teniendo en cuenta que $v(\tau(\overline{\phi}(x_i))) \geq 1$). La primera, escrita sin identificaciones, es $v(\tau(\overline{\phi}(\alpha))) \geq v(\tau(\alpha))$. Por el teorema anterior esto equivale a

$$\alpha \in \mathfrak{m}_Q^r \to \overline{\phi}(\alpha) \in \mathfrak{m}_P^r,$$

lo cual también es obvio. ∎

Definición 3.42 Sea V una variedad, $P \in V(k)$ un punto regular y $x_1,\dots,x_n$ un sistema de parámetros locales en P. Entonces $d_Px_1,\dots,d_Px_n$ es una base del espacio cotangente $T_PV^* = \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Representaremos por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_P, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_P \in T_PV$$

a su base dual.

Si $f \in \mathcal{O}_P(V)$ y su serie de Taylor es

$$\tau(f) = f(P) + a_1X_1 + \cdots + a_nX_n + \cdots,$$

entonces $f - f(P) - a_1x_1 - \cdots - a_nx_n \in \mathfrak{m}_P^2$, luego

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_P = \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_P([f-f(P)]) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_P [a_1x_1 + \cdots + a_nx_n]$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_P (a_1d_Px_1 + \cdots + a_nd_Px_n) = a_i.$$

Así pues, la derivada parcial respecto a x_i asigna a cada función f el coeficiente de X_i en su serie de Taylor o, equivalentemente, el término independiente de la derivada formal respecto de X_i de dicha serie.

3.4 Inmersión de variedades

Como muestra de la forma en que la noción de dimensión puede usarse en razonamientos geométricos vamos a probar un resultado sobre inmersión de variedades regulares en espacios proyectivos. Necesitaremos varios hechos previos, todos ellos de interés en sí mismos.

Teorema 3.43 *Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación regular y suprayectiva entre variedades V y W de dimensiones m y n respectivamente. Entonces $n \leq m$ y además:*

1. *Para cada $P \in W$, las componentes irreducibles de la fibra $\phi^{-1}[P]$ tienen dimensión $\geq m - n$.*
2. *Existe un abierto $U \subset W$ no vacío tal que para todo $P \in U$ se cumple $\dim \phi^{-1}[P] = m - n$.*

DEMOSTRACIÓN: Como ϕ permite identificar a $k(W)$ con un subcuerpo de $k(V)$, es claro que $n \leq m$.

Para probar 1) empezamos aplicándole a $\overline{W}$ el razonamiento empleado al principio de la prueba de 3.9, con lo que obtenemos un conjunto algebraico finito $\overline{W}^n = \overline{W} \cap Z$, donde Z es el conjunto de ceros en $\overline{W}$ de un conjunto de n formas. Más aún, la construcción de estas formas permite exigir que no se anulen en P, con lo que $P \in W \cap Z$. Tomamos un entorno afín U de P tal que $W \cap Z \cap U = \{P\}$. Podemos sustituir W por U en W y V por $\phi^{-1}[U]$ sin alterar la fibra $\phi^{-1}[P]$. De este modo podemos suponer que $W \subset A^N$ es afín y que P es el conjunto de ceros en W de n funciones $f_1, \ldots, f_n \in k[W]$.

Entonces $\phi^{-1}[P]$ es el conjunto de puntos de V donde se anulan simultáneamente las funciones $\bar{\phi}(f_i) \in k[V]$, luego el teorema 3.15 implica que cada componente de $\phi^{-1}[P]$ tiene dimensión $\geq m - n$.

Para probar 2) empezamos aplicando el teorema 2.68, que nos da un abierto afín U en W tal que $U' = \phi^{-1}[U]$ es afín. Equivalentemente, podemos suponer que V y W son variedades afines. A través de $\bar{\phi}$ podemos identificar a $k[W]$ con un subanillo de $k[V]$. Así mismo, $k(W) \subset k(V)$.

Sea $k[W] = k[w_1, \ldots, w_N]$, $k[V] = k[v_1, \ldots, v_M]$. El grado de trascendencia de $k(V)$ sobre $k(W)$ es $m - n$. Podemos suponer que $v_1, \ldots, v_{m-n}$ son algebraicamente independientes sobre $k(W)$. Los otros generadores cumplirán relaciones

$$F_i(v_i, v_1, \ldots, v_{m-n}, w_1, \ldots, w_M) = 0, \qquad i = m - n + 1, \ldots, N.$$

Consideramos a F_i como polinomio en $v_i, v_1, \ldots, v_{m-n}$ con coeficientes en $k[w_1, \ldots, w_M]$. Ha de haber al menos un coeficiente que no sea idénticamente nulo en W. Sea C_i el subconjunto algebraico de W donde se anula dicho coeficiente. Llamamos D a la unión de los C_i, que es un subconjunto algebraico propio de W. Su complementario U es un abierto no vacío.

Sea $P \in U$ y X una componente irreducible de $\phi^{-1}[P]$. Sea $\bar{v}_i$ la restricción de v_i a X. Así $k[X] = k[\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_M]$. Se cumple

$$F_i(\bar{v}_i, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{m-n}, w_1(P), \ldots, w_M(P)) = 0, \qquad i = m - n + 1, \ldots, N,$$

y los polinomios $F_i(X_i, X_1, \ldots, X_{m-n}, w_1(P), \ldots, w_M(P))$ no son idénticamente nulos, pues cada uno de ellos tiene al menos un monomio no nulo. Esto prueba que los $\bar{v}_i$ son algebraicamente dependientes de $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{m-n}$, luego se cumple $\dim X \leq m - n$. Por el apartado anterior tenemos la igualdad, de modo que para todo $P \in U$ se cumple que $\dim \phi^{-1}[P] = m - n$. ∎

De aquí se sigue un criterio útil para probar que un conjunto algebraico es irreducible:

Teorema 3.44 *Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación regular entre variedades proyectivas, sea $C \subset V$ cerrado tal que $W_0 = \phi[C]$ es irreducible y para cada $P \in W_0$, las fibras $\phi|_C^{-1}[P]$ son irreducibles y de la misma dimensión. Entonces C es irreducible.*

Demostración: Sea $C = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ la descomposición de C en componentes irreducibles. Por el teorema 2.49, cada $\phi[C_i]$ es cerrado y, como W_0 es irreducible, existe un i tal que $W_0 = \phi[C_i]$. Llamemos n a la dimensión de las fibras de $\phi|_C$. Para cada i tal que $\phi[C_i] = W_0$, el teorema anterior nos da un abierto $U_i \subset W_0$ de modo que las fibras $\phi|_{C_i}^{-1}[P]$ con $P \in U_i$ tienen todas la misma dimensión n_i. Si $\phi[C_i] \neq W_0$ definimos $U_i = W_0 \setminus \phi[C_i]$. Tomemos $P \in U_1 \cap \cdots \cap U_r$. Como $\phi|_C^{-1}[P]$ es irreducible, ha de ser $\phi|_C^{-1}[P] \subset C_i$ para cierto i, digamos $i = 1$. En particular $P \in U_1 \cap \phi[C_1]$, luego $\phi[C_1] = W_0$.

Claramente $\phi|_C^{-1}[P] = \phi|_{C_1}^{-1}[P]$, luego $n = n_1$. Si $P \in W_0$ es arbitrario, tenemos que $\phi|_{C_1}^{-1}[P] \subset \phi|_C^{-1}[P]$. La primera fibra es no vacía y por el teorema anterior tiene dimensión $\geq n_1$, luego ha de ser $\phi|_C^{-1}[P] = \phi|_{C_1}^{-1}[P]$. Esto implica que $C = C_1$ es irreducible. ∎

Como aplicación de este teorema introducimos la variedad tangente de una variedad proyectiva regular:

Definición 3.45 Si $V \subset \mathrm{P}^n$ es una variedad proyectiva regular, se define la *variedad tangente* de V como el conjunto

$$TV = \{(P, Q) \in V \times \mathrm{P}^n \mid Q \in T_P V\}.$$

Es claro que TV es un conjunto algebraico (sobre k), definido por las ecuaciones (3.3). La proyección $\pi : V \times \mathrm{P}^n \longrightarrow V$ es regular y las fibras de $\pi|_{TV}$ son las variedades tangentes de V en cada punto. Ciertamente son irreducibles y, por hipótesis, todas tienen la misma dimensión $\dim V$. Por el teorema anterior concluimos que TV es una variedad proyectiva. El teorema 3.43 nos da además que

$$\dim TV = 2 \dim V.$$

Seguidamente damos una condición para que una aplicación regular sea un isomorfismo:

Teorema 3.46 *Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación finita biyectiva entre variedades. Entonces ϕ es un isomorfismo si y sólo si para todo $P \in V$ la diferencial $d_P\phi : T_P V \longrightarrow T_{\phi(P)} W$ es inyectiva.*

Demostración: $\psi : W \longrightarrow V$ la aplicación inversa. Hemos de probar que es regular. Fijamos $Q \in W$. Sea $P = \psi(Q)$. Por definición de finitud, Q tiene un entorno afín U tal que $U' = \phi^{-1}[U]$ es afín y $\phi|_{U'} : U' \longrightarrow U$ es finita. Basta probar que $\psi|_U$ es regular en Q. Equivalentemente, podemos suponer que V y W son afines.

Recordemos que $d_P\phi$ es la aplicación dual de $\bar{\phi} : \mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Por hipótesis $d_P\phi$ es inyectiva, luego $\bar{\phi}$ es suprayectiva. Así, si $\mathfrak{m}_Q = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, entonces $\bar{\phi}(\alpha_1) + \mathfrak{m}_P^2, \ldots, \bar{\phi}(\alpha_k) + \mathfrak{m}_P^2$ generan $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Por el teorema B.3 resulta que $\mathfrak{m}_P = (\bar{\phi}(\alpha_1), \ldots, \bar{\phi}(\alpha_k))$. En otras palabras:

$$\mathfrak{m}_P = \bar{\phi}[\mathfrak{m}_Q]\mathcal{O}_P(V).$$

Veamos que $\mathcal{O}_P(V)$ es un $\mathcal{O}_Q(W)$-módulo finitamente generado. Por la finitud de ϕ y el teorema [TAl 2.14] tenemos que $k[V]$ es un $k[W]$-módulo finitamente generado, luego basta probar que todo elemento de $\mathcal{O}_P(V)$ puede expresarse en la forma $\alpha/\bar{\phi}(\beta)$, donde $\alpha \in k[V]$ y $\beta \notin \mathfrak{m}_Q$.

En principio, un elemento de $\mathcal{O}_P(V)$ es de la forma γ/δ, con γ, $\delta \in k[V]$, $\delta \notin \mathfrak{m}_P$. Basta encontrar $\beta \in k[W]$, $\beta \notin \mathfrak{m}_Q$ tal que $\bar{\phi}(\beta) = \delta\epsilon$, con $\epsilon \in k[V]$. De este modo, $\gamma/\delta = (\gamma\epsilon)/\bar{\phi}(\beta)$.

Sea $V_0 = \{R \in V \mid \delta(R) = 0\}$. Claramente V_0 es cerrado en V y por el teorema 2.62 tenemos que $\phi[V_0]$ es cerrado en W. Como ϕ es biyectiva $Q \notin \phi[V_0]$. Por lo tanto, existe una función $\eta \in k[W]$ que se anula en $\phi[V_0]$ pero $\eta(Q) \neq 0$. Entonces $\bar{\phi}(\eta)$ se anula en V_0 y $\bar{\phi}(\eta)(P) \neq 0$.

Digamos que $\bar{\phi}(\eta) = [F]$, $\delta = [G]$, de modo que

$$F \in I(V_0) = I(V(I(V), G)) = \mathrm{rad}(I(V), G),$$

luego $F^N \in (I(V), G)$ para cierto $N > 0$. Tomando clases $\bar{\phi}(\eta^N) \in (\delta)$. Así pues, llamando $\beta = \eta^N$ tenemos que $\bar{\phi}(\beta) = \delta\epsilon$ como queríamos.

Ahora podemos aplicar B.3 a $\mathcal{O}_P(V)$ como $\mathcal{O}_Q(W)$-módulo. Tenemos que $\mathcal{O}_P(V)/\bar{\phi}(\mathfrak{m}_Q)\mathcal{O}_P(V) = \mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m}_P(V) \cong k$, luego el cociente está generado por la clase de la función constante 1. Concluimos que también $\mathcal{O}_P(V)$ está generado por la función 1 sobre $\mathcal{O}_Q(W)$, es decir, que $\mathcal{O}_P(V) = \bar{\phi}[\mathcal{O}_Q(W)]$.

Sea $k[V] = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle_{k[W]}$. Como $\alpha_i \in \mathcal{O}_P(V)$, se cumple que $\alpha_i = \bar{\phi}(\beta_i)$, con $\beta_i \in \mathcal{O}_Q(W)$. Sea W_γ un abierto principal de W entorno de Q (para un $\gamma \in k[W]$) tal que todas las β_i sean regulares en W_γ. Así,

$$k[V_{\bar{\phi}(\gamma)}] = \big\langle \bar{\phi}(\beta_1), \ldots, \bar{\phi}(\beta_m) \big\rangle_{k[W_\gamma]} = \bar{\phi}[k[W_\gamma]].$$

Esto prueba que $\phi|_{V_{\bar{\phi}(\gamma)}} : V_{\bar{\phi}(\gamma)} \longrightarrow W_\gamma$ es un isomorfismo (pues induce un isomorfismo entre los anillos de funciones regulares). Como W_γ es un entorno de Q, esto implica que ψ es regular en Q. ∎

Vamos a usar este teorema en el siguiente caso particular:

Teorema 3.47 *Sea $V \subset \mathrm{P}^N$ una variedad proyectiva regular y $P \in \mathrm{P}^N \setminus V$ un punto racional que no pertenezca a la variedad tangente de V en ningún punto y tal que cada recta que pasa por P corte a V a lo sumo en un punto. Entonces la proyección $\pi : V \longrightarrow \mathrm{P}^{N-1}$ de centro P es un isomorfismo en su imagen.*

Demostración: Podemos tomar un sistema de referencia en el que P tenga coordenadas $(1, \ldots, 1)$. Si identificamos P^{N-1} con el hiperplano $X_{N+1} = 0$, entonces la proyección π viene dada por $\pi(x) = (x_i - x_{N+1})$ (véase 2.63).

Por el teorema 2.49, el conjunto $W = \pi[V]$ es cerrado, y es irreducible porque una descomposición en cerrados daría lugar a otra de V. Vamos a ver que se cumplen las condiciones del teorema anterior. Sabemos que las proyecciones son aplicaciones finitas.

También se cumple que π es biyectiva. Notemos que cada $Q \in V$ está en la intersección con V de la recta que pasa por P y $\pi(Q)$. En efecto, si Q tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_{N+1})$, entonces la recta que pasa por P y Q está formada por los puntos de coordenadas

$$\lambda(1, \ldots, 1) + \mu(x_1, \ldots, x_{N+1}), \qquad \lambda, \mu \in k.$$

La intersección de esta recta con P^{N-1} es el punto determinado por la ecuación $\lambda + \mu x_{N+1} = 0$. De aquí se sigue que $\mu \neq 0$ y que el punto tiene coordenadas

$$(\mu(x_1 - x_{N+1}), \ldots, \mu(x_N - x_{N+1}), 0).$$

Ciertamente este punto es $\pi(Q)$. Si $\pi(Q) = \pi(Q')$, entonces la recta que pasa por P y este punto corta a V en Q y en Q'. Por hipótesis $Q = Q'$.

Finalmente veremos que la hipótesis sobre las variedades tangentes implica que la diferencial de π en cada punto Q es inyectiva. En primer lugar supondremos que Q satisface $x_{N+1} \neq 0$, con lo que podemos tomar un vector de coordenadas de la forma $Q = (b_1, \ldots, b_N, 1)$. Luego veremos que con esto no perdemos generalidad. Como $Q \in V$ y $P \notin V$, ha de ser $Q \neq P$, luego podemos suponer que $b_N \neq 1$.

Sea $V' = V \cap A^N$ y sea $\pi' : V' \longrightarrow A^{N-1}$ la restricción de π, dada por

$$\pi'(x_1, \ldots, x_N) = \left(\frac{x_1 - 1}{x_N - 1}, \ldots, \frac{x_{N-1} - 1}{x_N - 1}\right).$$

Ahora π' es una función racional definida en el abierto $x_N \neq 1$. Sea $R = \pi(Q)$. Supongamos que $d_Q\pi : (\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2)^* \longrightarrow (\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2)^*$ no es inyectiva. Entonces existe $\alpha \in (\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2)^*$ no nulo tal que $d_Q\pi(\alpha) = \bar{\pi} \circ \alpha = 0$.

Por otra parte, tenemos el isomorfismo $d_Q^* : (T_QV')^{**} \longrightarrow (\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2)^*$, de modo que existe $\beta \in T_Q(V')^{**}$ no nulo tal que $\alpha = d_Q^*(\beta)$. Por el isomorfismo canónico entre $T_Q(V')$ y su bidual, existe un $T \in T_QV'$, $T \neq Q$, tal que, para todo $\gamma \in T_Q(V')^*$, se cumple $\beta(\gamma) = \gamma(T)$.

Combinando todo esto, si $f \in \mathfrak{m}_R$, tenemos que $\bar{\pi}([f]) \in \mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2$ y

$$0 = \alpha(\bar{\pi}([f])) = d_Q^*(\beta)(\bar{\pi}([f])) = \beta(d_Q(\bar{\pi}(f)) = d_Q(\bar{\pi}(f))(T).$$

Si $R = (d_1, \ldots, d_{N-1})$, aplicamos esto a las funciones $f_i(x) = x_i - d_i \in \mathfrak{m}_R$, de modo que $d_Q(\bar{\pi}(f_i))(T) = 0$. Vamos a calcular esta diferencial. En primer lugar,

$$\bar{\pi}(f_i) = \frac{x_i - 1}{x_N - 1} - \frac{b_i - 1}{b_N - 1} = \frac{(b_N - 1)(x_i - 1) - (b_i - 1)(x_N - 1)}{(b_N - 1)(x_N - 1)}.$$

Por lo tanto,

$$d_Q(\bar{\pi}(f_i)) = \frac{(b_n-1)(x_i-b_i)-(b_i-1)(x_N-b_N)}{(b_N-1)^2}.$$

La igualdad $d_Q(\bar{\pi}(f_i))(x) = 0$ equivale a

$$(b_N-1)(x_i-b_i) = (b_i-1)(x_N-b_N).$$

Cuando $i = 1, \ldots, N-1$, estas ecuaciones determinan la recta que pasa por P y Q. Así pues, hemos probado que existe un punto $T \in T_QV'$, $T \neq Q$ que está en la recta que une P y Q o, equivalentemente, P está en la recta que pasa por dos puntos de T_QV', lo cual implica obviamente que $P \in T_QV' \subset T_QV$, contradicción.

Llamemos A_i^N al complementario del hiperplano H_i dado por $x_i = 0$ y sea $V_i = V \cap A_i^N$. Sea $\pi_i : V \longrightarrow H_i$ la proyección dada por

$$\pi_i(x) = (x_1 - x_i, \ldots, x_{N+1} - x_i).$$

El argumento anterior prueba en realidad que si $Q \in V_i$, entonces $d_Q\pi_i$ es inyectiva. Ahora bien, es fácil ver que $\pi = \pi_i \circ \pi|_{H_i}$, pues si L es la recta que une a P y Q, tenemos que $\pi(Q) = L \cap H_{N+1}$, $\pi_1(Q) = L \cap H_1$ y $\pi(\pi_1(Q))$ es el punto donde la recta que pasa por P y $\pi_1(Q)$ —o sea, L— corta a H_{N+1}, o sea, $\pi(Q)$.

Es fácil ver que $\pi|_{H_i} : H_i \longrightarrow H_{N+1}$ es un isomorfismo, de modo que podemos concluir que $d_Q\pi = d_Q\pi_1 \circ d_{\pi_1(Q)}\pi|_{H_1}$ es inyectiva. ∎

Con esto podemos probar:

Teorema 3.48 *Si k es infinito, toda variedad proyectiva regular de dimensión n es isomorfa a una subvariedad de P^{2n+1}.*

Demostración: Sea $V \subset \mathrm{P}^N$ una variedad proyectiva regular de dimensión n. El teorema quedará probado si, bajo la hipótesis de que $N > 2n+1$, encontramos un $P \in \mathrm{P}^N(k)$ en las condiciones del teorema anterior. En efecto, si existe tal P, entonces V es isomorfa a su imagen por la proyección π, que es una subvariedad de P^{N-1}, y podemos repetir el argumento hasta sumergir V en P^{2n+1}.

Sea $C \subset \mathrm{P}^N \times V \times V$ el conjunto de todas las ternas de puntos colineales. La colinealidad de tres puntos equivale a que sus coordenadas homogéneas sean linealmente dependientes, lo cual equivale a que ciertos determinantes sean nulos, luego C es un conjunto algebraico. Consideremos la proyección $\pi : \mathrm{P}^N \times V \times V \longrightarrow V \times V$. Si $U = \{(Q_1, Q_2) \in V \times V \mid Q_1 \neq Q_2\}$, entonces, para todo $(Q_1, Q_2) \in U$, se cumple que $\pi|_C^{-1}[(Q_1, Q_2)] = L \times \{(Q_1, Q_2)\}$, donde L es la recta que pasa por Q_1 y Q_2. En particular $\pi|_C^{-1}[(Q_1, Q_2)]$ es irreducible de dimensión 1.

No podemos aplicar el teorema 3.44 porque esto tendría que ocurrir para todos los puntos de $V \times V$ y no sólo para los del abierto U. No obstante, si

repasamos la prueba concluimos que en esta situación[4] existe una componente irreducible C_1 de C tal que $\pi[C_1] = V \times V$ y $\pi|_C^{-1}[U] \subset C_1$. Por el teorema 3.43 tenemos que $\dim C_1 \leq 2n + 1$.

Consideramos la otra proyección $\pi' : \mathrm{P}^N \times V \times V \longrightarrow \mathrm{P}^N$. Por 2.49, se cumple que $\pi'[C_1]$ es cerrado. Por 3.43 sabemos además que $\dim \pi'[C_1] \leq 2n+1$, luego el abierto $U_1 = \mathrm{P}^N \setminus \pi'[C_1]$ no es vacío.

Ahora observamos que si $P \in U_1$, entonces $P \notin V$, o de lo contrario $(P, P, Q) \in U$, para cualquier $Q \in V$, $Q \neq P$, y tendríamos $P \in \pi'[U] \subset \pi'[C_1]$. Además una misma recta que pase por P no puede cortar a V en dos puntos distintos Q_1 y Q_2, pues entonces $(P, Q_1, Q_2) \in U$ y llegaríamos a la misma contradicción.

Consideremos ahora la proyección $\pi : V \times \mathrm{P}^N \longrightarrow \mathrm{P}^N$. Aplicando de nuevo el teorema 3.43 vemos que $\dim \pi[TV] \leq 2n$, luego $U_2 = \mathrm{P}^N \setminus \pi[TV]$ es un abierto no vacío. Si $P \in U_2$, entonces P no pertenece a ninguna variedad tangente de ningún punto de V. Por 2.9 podemos tomar un punto racional $P \in U_1 \cap U_2$, y éste cumple las condiciones del teorema anterior. ∎

El ejemplo de la página 107 muestra que la hipótesis de regularidad no puede suprimirse en el teorema anterior.

3.5 Curvas algebraicas

Terminamos el capítulo con algunos resultados específicos para variedades de dimensión 1, es decir, para curvas. La mayoría de ellos sólo admiten generalizaciones parciales a dimensiones superiores.

Puntos regulares El teorema 3.39 afirma que si P es un punto regular de una variedad V entonces el anillo $\mathcal{O}_P(V)$ es un dominio de factorización única. En el caso de curvas podemos probar que es un dominio de ideales principales y, de hecho, esto resulta ser una caracterización de la regularidad. En primer lugar demostramos lo siguiente:

Teorema 3.49 *Un punto racional P de una curva V es regular si y sólo si el ideal maximal $\mathfrak{m}_P$ de $\mathcal{O}_P(V)$ es principal. En tal caso, los generadores de $\mathfrak{m}_P$ son los parámetros locales en P.*

Demostración: Una implicación es el teorema 3.32, en virtud del cual todo parámetro local genera $\mathfrak{m}_P$. Supongamos ahora que $\mathfrak{m}_P = (x)$ y veamos que $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_P^2 = \langle [x] \rangle_k$, con lo que $\dim \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = 1$ y P será regular.

Todo $\alpha \in \mathfrak{m}_P$ es de la forma $\alpha = \beta x$, con $\beta \in \mathcal{O}_P(V)$. Sea $\beta(P) = a \in k$, de modo que $\beta - a \in \mathfrak{m}_P$, luego $\beta - a = \gamma x$, para cierto $\gamma \in \mathcal{O}_P(V)$. En definitiva tenemos que $\alpha = \beta x = ax + \gamma x^2$, luego $[\alpha] = a[x] \in \langle [x] \rangle_k$.

Falta probar que todo generador de $\mathfrak{m}_P$ es un parámetro local. Ahora bien, $x \in \mathcal{O}_P(V)$ es un parámetro local si y sólo si $x \in \mathfrak{m}_P$ y $x \notin \mathfrak{m}_P^2$. Es claro que si

[4] En el momento en que se toma $P \in U_1 \cap \cdots \cap U_r$ hay que exigir también $P \in U$.

x cumple esto y ϵ es una unidad de $\mathcal{O}_P(V)$, entonces ϵx cumple lo mismo, luego todos los generadores de $\mathfrak{m}_P$ son parámetros locales en P. ∎

Este teorema junto con 1.24 implica que si P es un punto racional regular de una curva, entonces el anillo $\mathcal{O}_P(V)$ es un dominio de ideales principales. Basta tener en cuenta el teorema siguiente:

Teorema 3.50 *Sea A un anillo noetheriano con un único ideal maximal $\mathfrak{m}$. Si $\mathfrak{m}$ es principal, entonces A es un dominio de ideales principales.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathfrak{m} = (\pi)$. Veamos que todo elemento no nulo de A es de la forma $\alpha = \epsilon\pi^n$, donde ϵ es una unidad y $n \geq 0$.

Si α es una unidad, es de esta forma con $n = 0$. En caso contrario $\alpha \in \mathfrak{m}$, pues $(\alpha) \neq 1$ y $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal. Así pues, $\alpha = \alpha_1\pi$, para cierto $\alpha_1 \in A$. Si α_1 tampoco es una unidad, entonces $\alpha_1 = \alpha_2\pi$, luego $\alpha = \alpha_2\pi^2$, para un cierto $\alpha_2 \in A$. Como A es noetheriano, la cadena de ideales

$$(\alpha) \subset (\alpha_1) \subset (\alpha_2) \subset \cdots$$

no puede prolongarse indefinidamente, luego hemos de llegar a una factorización $\alpha = \alpha_n\pi^n$ en la que α_n sea una unidad. La expresión es única, pues n está determinado por α como el único natural tal que $(\alpha) = \mathfrak{m}^n$. Definimos $v(\alpha) = n$, de modo que claramente $v(\alpha\beta) = v(\alpha) + v(\beta)$ (para α, $\beta \in A$ no nulos). El mismo argumento con que hemos probado el teorema B.9 justifica que A es un dominio euclídeo con la norma v. En particular es un dominio de ideales principales. ∎

Una propiedad notable de las curvas es la siguiente:

Teorema 3.51 *Si V es una curva, W es una variedad proyectiva y $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación racional, entonces ϕ es regular en todos los puntos regulares de V.*

DEMOSTRACIÓN: Digamos que $W \subset \mathrm{P}^n$, sea $U \subset V$ el abierto donde ϕ es regular como aplicación en W y sea U' el abierto donde es regular como aplicación en P^n. En principio $U \subset U'$, pero es fácil ver que $\phi[U'] \subset \overline{\phi[U]} \subset W$, luego ϕ es regular como aplicación $\phi : U' \longrightarrow W$ (teorema 2.36). Así pues, $U = U'$, luego podemos suponer que $W = \mathrm{P}^n$.

Sea P un punto regular de V. Podemos suponer que $P \in U = \phi^{-1}[A^n]$ y basta probar que la restricción de ϕ a U es regular en P. Por 2.53, dicha restricción es de la forma $\phi(X) = (\alpha_1(X), \ldots, \alpha_n(X), 1)$, con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k(U)$. Teniendo en cuenta que $k(U)$ es el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_P(U) = \mathcal{O}_P(V)$, podemos multiplicar por un factor adecuado para que

$$\phi(X) = (\alpha_1(X), \ldots, \alpha_{n+1}(X)),$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathcal{O}_P(V)$ no tienen ningún factor primo en común. En particular no se anulan todas en P, pues en tal caso tendrían como factor común a un parámetro local en P. Así pues, $\phi(P)$ está definido. ∎

Teorema 3.52 *Si dos curvas proyectivas regulares son birracionalmente equivalentes, entonces son isomorfas.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación birracional entre dos curvas proyectivas regulares. Por el teorema anterior tenemos que ϕ y ϕ^{-1} son regulares en V y W respectivamente, luego $\phi\circ\phi^{-1}$ es una aplicación regular que —al menos en un conjunto denso— coincide con la identidad. Por 2.46 tenemos que es la identidad. Igualmente al revés. ∎

Ejemplos Sabemos que la parábola (afín) $Y = X^2$ es isomorfa a la recta A^1 (porque es una gráfica, véase el ejemplo 1 de la página 11). El isomorfismo es una aplicación birracional entre la parábola proyectiva y la recta P^1, luego ambas son isomorfas. En el ejemplo de la página 53 hemos visto que todas las cónicas son isomorfas, luego todas las cónicas son isomorfas a P^1.

La explosión de un punto descrita en el ejemplo de la página 77 es un caso de aplicación birracional sobre una superficie regular E que no es regular en todos los puntos de E. Más aún, identificando E con $\mathrm{P}^1\times\mathrm{P}^1$, tenemos que $\mathrm{P}^1\times\mathrm{P}^1$ es birracionalmente equivalente a P^2, pero ambas superficies no son isomorfas pues, por ejemplo, el teorema 3.16 afirma que dos curvas cerradas en P^2 se cortan necesariamente en algún punto, mientras que en $\mathrm{P}^1\times\mathrm{P}^1$ hay claramente curvas cerradas disjuntas. ∎

Veamos otra caracterización útil de los puntos regulares:

Teorema 3.53 *Un punto racional P de una curva V es regular si y sólo si el anillo $\mathcal{O}_P(V)$ es íntegramente cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Ciertamente, si P es regular entonces $\mathcal{O}_P(V)$ es un dominio de factorización única y los dominios de factorización única son íntegramente cerrados (teorema [Al 3.35]). Esta implicación es válida para variedades de cualquier dimensión.

Supongamos ahora que $\mathcal{O}_P(V)$ es íntegramente cerrado. Sustituyendo V por un entorno afín de P, podemos suponer que V es afín. Tomamos $f \in k[V]$ no nula tal que $f(P) = 0$. Por el teorema 3.12 sabemos que f se anula en un conjunto finito de puntos de V. Sustituyendo V por un entorno afín de P que no contenga a los demás puntos donde se anula f podemos suponer[5] que f sólo se anula en P. Digamos que $f = [F]$. Si $\alpha \in \mathfrak{m}_P$, entonces $\alpha = [G]/[H]$, donde $G(P) = 0$, $H(P) \neq 0$. Por lo tanto,

$$G \in I(\{P\}) = I(V(I(V), F)) = \mathrm{Rad}(I(V), F),$$

luego existe un $m > 0$ tal que $G^m \in (I(V), F)$ y, por consiguiente, $[G]^m \in (f)$. A su vez, $\alpha^m \in (f)$. Si $\mathfrak{m}_P = (x_1, \ldots, x_r)$, podemos encontrar un mismo número natural $k > 0$ tal que $x_i^k \in (f)$. Tomando $m = kr$ concluimos que $\mathfrak{m}_P^m \subset (f)$

[5]Notemos que el entorno puede tomarse en la topología de Zariski relativa a k, pues si P tiene coordenadas $a \in k^n$ y $Q \neq P$ tiene coordenadas $\xi \in K^n$, el polinomio mínimo $F_i(X_i)$ de ξ_i sobre k no se anula en a_i, luego $C = V(F_1, \ldots, F_n)$ es un cerrado que contiene a Q y no a P.

(pues un producto de m generadores ha de contener uno repetido k veces). Sea m el mínimo natural tal que $\mathfrak{m}_P^m \subset (f)$. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \in \mathfrak{m}_P$ tales que $\beta = \alpha_1 \cdots \alpha_{m-1} \notin (f)$ pero $\beta\mathfrak{m}_P \subset (f)$. Llamamos $\gamma = f/\beta$. Así, $\gamma^{-1} \notin \mathcal{O}_P(V)$ (o, de lo contrario, $\beta = \gamma^{-1} f \in (f)$), y además $\gamma^{-1}\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_P(V)$. Esto último implica que $\gamma^{-1}\mathfrak{m}_P$ es un ideal de $\mathcal{O}_P(V)$.

Por otra parte, $\gamma^{-1}\mathfrak{m}_p \not\subset \mathfrak{m}_P$, pues en caso contrario el teorema [TAl 2.9] implicaría que γ^{-1} es entero sobre $\mathcal{O}_P(V)$ y, como estamos suponiendo que $\mathcal{O}_P(V)$ es íntegramente cerrado, llegaríamos a que $\gamma^{-1} \in \mathcal{O}_P(V)$, contradicción.

Como $\mathfrak{m}_P$ es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_P(V)$, ha de ser $\gamma^{-1}\mathfrak{m}_P = \mathcal{O}_P(V)$, lo cual equivale a que $\mathfrak{m}_P = (\gamma)$. ∎

En el caso de curvas afines, este teorema tiene una versión global.

Teorema 3.54 *Si k es perfecto, una curva afín absoluta V es regular si y sólo si el anillo $k[V]$ es íntegramente cerrado.*

Demostración: Observemos por una parte que V es regular si y sólo si todos los puntos de $V(\bar{k})$ son regulares. Esto se debe a que el conjunto C de los puntos singulares de V es algebraico (definido sobre k) y, por el teorema de los ceros de Hilbert, un conjunto algebraico no vacío tiene puntos racionales sobre $\bar{k}$.

Por otra parte, el teorema 1.43 nos da que $k[V]$ es íntegramente cerrado si y sólo si lo es $\bar{k}[V]$. Estos dos hechos hacen que no perdamos generalidad si suponemos que $k = K$.

Si V es regular, para probar que $k[V]$ es íntegramente cerrado tomamos una función $\alpha \in k(V)$ entera sobre $k[V]$ y vamos a ver que $\alpha \in k[V]$. Ahora bien, trivialmente α es entera sobre cada anillo $\mathcal{O}_P(V)$, con $P \in V$, y por hipótesis $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$. Así pues, α es regular sobre cada punto de V, es decir, $\alpha \in k[V]$. (Notemos que esta implicación vale para variedades de dimensión arbitraria.)

Recíprocamente, supongamos que $k[V]$ es íntegramente cerrado, tomemos $P \in V$ y veamos que $\mathcal{O}_P(V)$ es íntegramente cerrado.[6] Dado $\alpha \in k(V)$ entero sobre $\mathcal{O}_P(V)$, tenemos que

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

para ciertos $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_P(V)$. Digamos que $a_i = u_i/v_i$ y sea $d = v_1 \cdots v_n$, de modo que $d \in \mathcal{O}_P(V)$, $d(P) \neq 0$. Multiplicando la igualdad anterior por d^n obtenemos que $\beta = d\alpha$ es entero sobre $k[V]$, luego por hipótesis $\beta \in k[V]$, luego $\alpha = \beta/d \in \mathcal{O}_P(V)$. ∎

Regularización de una curva Ahora demostraremos que toda curva es birracionalmente equivalente a una curva regular, que además es única salvo isomorfismo si imponemos algunas restricciones, recogidas en la definición siguiente:

[6] Esto es un hecho general: toda localización de un dominio íntegro íntegramente cerrado es íntegramente cerrada.

Definición 3.55 Una *regularización* de una curva V es una curva regular V^r junto con una aplicación $r : V^r \longrightarrow V$ finita y birracional.

En primer lugar probamos la existencia de regularización para curvas afines:

Teorema 3.56 *Toda curva absoluta afín sobre un cuerpo perfecto tiene una regularización, que es también afín.*

DEMOSTRACIÓN: Sea V una curva afín y sea A la clausura entera de $k[V]$ en $k(V)$. Es claro que A es íntegramente cerrado. Vamos a probar que A es un $k[V]$-módulo finitamente generado. Como la extensión $k(V)/k$ es separable, podemos tomar una base de trascendencia x de $k(V)$ sobre k tal que $x \in k[V]$ y la extensión $k(V)/k(x)$ es finita separable. Tenemos que $k[x] \subset k[V] \subset A$, luego A es la clausura entera de $k[x]$ en $k(V)$. Por el teorema [TAl 2.17] concluimos que A es un $k[x]$-módulo finitamente generado, luego también un $k[V]$-módulo finitamente generado, como queríamos probar.

Uniendo un generador de A sobre $k[V]$ con un generador de $k[V]$ sobre k obtenemos que $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, para ciertos $x_1, \ldots, x_n \in A$. En la prueba del teorema 1.43 hemos visto que la clausura entera de $\bar{k}[V]$ en $\bar{k}(V)$ es el álgebra $\overline{A} = \bar{k}A = \bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$.

Claramente, $\overline{A} = \bar{k}[X_1, \ldots, X_n]/I$, donde I es el núcleo del epimorfismo dado por $X_i \mapsto x_i$. Como I es un ideal primo (porque $\overline{A}$ es un dominio íntegro), vemos que $V^r = V(I)$ es una variedad absoluta y $\bar{k}[V^r] \cong \overline{A}$. Más aún, V^r es una curva, pues el cuerpo de cocientes de $\overline{A}$ es $\bar{k}(V)$, cuyo grado de trascendencia sobre $\bar{k}$ es 1. Además V^r es regular, pues A es íntegramente cerrado. Vamos a probar que V^r está definida sobre k y que $k[V^r] \cong A$. Por el teorema 1.38, basta ver que V^r es invariante por $G(K/k)$.

Ahora bien, tenemos que $F \in I$ si y sólo si $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ y, como los $x_i \in k(V)$ son invariantes por $G(K/k)$, es claro que $F \in I$ si y sólo si $F^\sigma \in I$, para todo $\sigma \in G(K/k)$, de donde se sigue a su vez que $\sigma[V^r] = V^r$. Así pues, $I_k(V^r) = I \cap k[X_1, \ldots, X_n]$, de donde se sigue que

$$k[V^r] \cong k[X_1, \ldots, X_n]/I_k(V^r) \cong A.$$

La inclusión $k[V] \subset A = k[V^r]$ induce una aplicación finita $r : V^r \longrightarrow V$ y el teorema 2.56 nos da que es birracional. ∎

De aquí pasamos al caso general:

Teorema 3.57 *Toda curva absoluta sobre un cuerpo perfecto tiene una regularización.*

DEMOSTRACIÓN: Sea V una curva absoluta y sea $V = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ un cubrimiento de V por abiertos afines.

Sea $r_i : U_i^r \longrightarrow U_i$ una regularización de U_i, que existe por el teorema anterior. Sea V_i la clausura proyectiva de U_i^r. Tomemos un abierto afín U_0 contenido en todos los abiertos U_i, que no contenga puntos singulares de V y tal que r_i se restrinja a un isomorfismo $r_i|_{U_0^i} : U_0^i \longrightarrow U_0$.

La composición $r_i \circ r_j^{-1}$ restringida a U_0^i se extiende a una aplicación birracional $\phi_{ij} : U_i^r \longrightarrow V_j$. El teorema 3.51 nos da que ϕ_{ij} es regular. Sea $W = \prod_i V_i$ y $\phi_i : U_i^r \longrightarrow W$ dada por

$$\phi_i(P) = (\phi_{i1}(P), \dots, \phi_{in}(P)).$$

Definimos $V^r = \bigcup_i \phi_i[U_i^r]$. Vamos a probar que V^r es una curva (cuasiproyectiva).

Observemos que $X = \phi_i[U_i^0] = \{(r_1^{-1}(P), \dots, r_n^{-1}(P)) \mid P \in U_0\}$ es una curva isomorfa a U_0 (independiente de i) tal que $X \subset \phi_i[U_i^r] \subset \overline{X}$. Para probar la última inclusión tomamos un punto $Q \in U_i^r$ y un abierto U en W tal que $\phi_i(Q) \in U$, y hemos de probar que $U \cap X \neq \varnothing$. En efecto, $\phi_i^{-1}[U]$ es abierto en U_i^r (no vacío) al igual que U_i^0, luego $\phi_i^{-1}[U] \cap U_i^0 \neq \varnothing$ y, por lo tanto, $U \cap X \neq \varnothing$.

Por consiguiente, $X \subset V^r \subset \overline{X}$. Como $\overline{X} \setminus X$ es finito, lo mismo sucede con $\overline{X} \setminus V^r$, luego V^r es abierto en la curva proyectiva $\overline{X}$, luego V^r es una curva cuasiproyectiva. Notemos que, por el mismo motivo, cada $\phi_i[U_i^r]$ es abierto en $\overline{X}$ y, por consiguiente, en V^r.

Veamos ahora que V^r es regular. Para ello basta probar que cada $\phi_i[U_i^r]$ es regular, pues todo punto de V^r está contenido en uno de estos abiertos. A su vez basta ver que ϕ_i es un isomorfismo en su imagen. Ciertamente es regular, y su inversa es la proyección sobre V_i, pues $\phi_{ii} : U_i^r \longrightarrow V_i$ es la identidad en U_0^i, luego es la identidad en todo U_i^r.

Sea ahora $r_i' : \phi_i[U_i^r] \longrightarrow V$ la aplicación $r_i' = \phi_i^{-1} \circ r_i$. Según acabamos de comentar, ϕ_i^{-1} es simplemente la proyección i-ésima, luego r_i' es regular. Además todas las aplicaciones r_i' coinciden en X. Por el teorema 2.46, dos cualesquiera de ellas coinciden en su dominio común, luego entre todas inducen una aplicación regular $r : V^r \longrightarrow V$. De hecho es birracional, pues se restringe a un isomorfismo entre X y U_0. Por último, la finitud de las aplicaciones r_i implica claramente la finitud de cada r_i', y de aquí se sigue la finitud de r, pues r coincide con una r_i en un entorno de cada punto.

Así pues, $r : V^r \longrightarrow V$ es una regularización de V. ∎

La unicidad de la regularización de una curva es consecuencia del teorema siguiente, más general:

Teorema 3.58 *Sea $r : V^r \longrightarrow V$ una regularización de una curva V sobre un cuerpo perfecto y sea $\phi : W \longrightarrow V$ una aplicación regular densa definida sobre una curva regular W. Entonces existe una aplicación regular $\psi : W \longrightarrow V^r$ tal que $\psi \circ r = \phi$.*

Demostración: Supongamos primeramente que las tres curvas son afines. A través de ϕ podemos considerar $k[V] \subset k[W]$ y a través de r que $k[V] \subset k[V^r]$ y $k(V) = k(V^r)$. Así, todo $\alpha \in k[V^r]$ es entero sobre $k[V]$ y, en particular, sobre $k[W]$. Además $\alpha \in k(V) \subset k(W)$. Como W es regular, $k[W]$ es íntegramente cerrado, luego concluimos que $\alpha \in k[W]$. Así pues, $k[V] \subset k[V^r] \subset k[W]$. La segunda inclusión determina una aplicación ψ que cumple el teorema.

En el caso general, para cada $P \in W$ tomamos un entorno afín U de $\phi(P)$ tal que $U^r = r^{-1}[U]$ sea afín y la restricción de r sea finita (es claro entonces que U^r es una regularización de U). Tomemos un entorno afín U' de P tal que $U' \subset \phi^{-1}[U]$. Como los abiertos en las curvas son cofinitos, podemos cubrir W por un número finito de abiertos $U'_1, \dots, U'_m$ en estas condiciones. Por la parte ya probada, existen aplicaciones regulares $\psi_i : U_i \longrightarrow U_i^r$ que cumplen $\psi_i \circ r = \phi$. Basta probar que dos de ellas coinciden en su dominio común. Ahora bien, si $U_0 \subset V^r$ es un abierto donde r es un isomorfismo (tal que cada punto de $r[U_0]$ tiene una única antiimagen en V^r) y $U'_0 = \phi^{-1}[r[U_0]]$, entonces dos aplicaciones ψ_i y ψ_j coinciden sobre los puntos del abierto $U'_i \cap U'_j \cap U'_0$. En efecto, si Q está en este conjunto, entonces

$$r(\psi_i(Q)) = r(\psi_j(Q)) = \phi(Q) \in r[U_0],$$

luego $\psi_i(Q) = \psi_j(Q) = r^{-1}(\phi(Q))$. Por lo tanto las aplicaciones ψ_i inducen una aplicación ψ que cumple el teorema. ∎

Como consecuencia:

Teorema 3.59 *Si $r : V^r \longrightarrow V$ y $r' : V'^r \longrightarrow V$ son regularizaciones de una misma curva V, entonces existe un isomorfismo $\psi : V^r \longrightarrow V'^r$ tal que $\psi \circ r' = r$.*

Demostración: Aplicando el teorema anterior obtenemos una aplicación regular ψ que cumple el enunciado, pero también una aplicación $\psi' : V'^r \longrightarrow V^r$ regular que cumple $\psi' \circ r = r'$. Basta ver que son inversas, pero $\psi \circ \psi'$ coincide con la identidad en un abierto, luego es la identidad, y lo mismo vale para $\psi' \circ \psi$. ∎

Es claro que la regularización de una curva puede obtenerse por restricción de la regularización de su clausura proyectiva, por lo que la existencia de la regularización de una curva proyectiva contiene el caso general. Respecto a ésta, podemos precisar un poco más:

Teorema 3.60 *La regularización de una curva proyectiva es proyectiva.*

Demostración: Sea V una curva proyectiva y $r : V^r \longrightarrow V$ su regularización. Si V^r no es proyectiva, llamamos W a su clausura proyectiva y tomamos $P \in W \setminus V^r$. Sea U un entorno afín de P en W. La regularización $r' : U^r \longrightarrow U$ se restringe a un isomorfismo entre un abierto de U^r y un abierto de V^r, luego $\phi = r' \circ r$ determina una aplicación birracional $\phi : U^r \longrightarrow V$. Como V es proyectiva, concluimos que ϕ es regular, es decir, está definida en todo U^r.

Por 3.58 existe una aplicación regular $\psi : U^r \longrightarrow V^r$ tal que $\psi \circ r = \phi$. Así ψ y r' coinciden sobre un abierto, luego $\psi = r'$, pero entonces

$$P \in U = r'[U^r] = \psi[U^r] \subset V^r,$$

contradicción. ∎

En particular tenemos que toda curva proyectiva es birracionalmente equivalente a una curva proyectiva regular (única salvo isomorfismo). El teorema 3.48 muestra que la regularización puede tomarse contenida en P^3. El ejemplo de la página 268 muestra una curva proyectiva plana que no es birracionalmente equivalente a ninguna curva proyectiva plana regular.

En el ejemplo de la página 77 hemos visto que la regularización de la curva "alfa" puede obtenerse a través de la explosión de su punto singular. Es posible demostrar en general que la regularización de una curva puede obtenerse mediante un número finito de explosiones de sus puntos singulares, pero no vamos a entrar en ello.

Terminamos con una observación sobre la regularización $r : V^r \longrightarrow V$ de una curva V: los puntos regulares de V tienen una única antiimagen. En efecto, por el teorema 3.27 sabemos que el conjunto U de los puntos regulares de V es un abierto. Entonces, la restricción $r|_{r^{-1}[U]} : r^{-1}[U] \longrightarrow U$ es una regularización de U, pero la identidad en U es otra. Por la unicidad, $r|_{r^{-1}[U]}$ tiene que ser un isomorfismo, luego cada punto de U tiene una única antiimagen por r.

Por lo tanto, sólo una cantidad finita de puntos de V tiene más de una antiimagen por r (a lo sumo los puntos singulares). No obstante, un punto singular puede tener una sola antiimagen.

Ejemplo Consideremos la cúbica V dada por $Y^2 = X^3$ (véase la figura de la página 7 y el ejercicio de la página 112). Es claro que la aplicación $r : A^1 \longrightarrow V$ dada por $r(t) = (t^2, t^3)$ es biyectiva y regular y se restringe a un isomorfismo $A^1 \setminus \{0\} \longrightarrow V \setminus \{0, 0\}$, luego es birracional. También es finita, pues a través de r el anillo $k[V]$ se identifica con $k[t^2, t^3] \subset k[t]$, y la extensión es entera, pues t es raíz de $T^2 - t^2 \in k[V][T]$. Por lo tanto r es la regularización de V. De este modo, el punto $(0, 0)$ es un punto singular de V y tiene una única antiimagen por r. ∎

Ejemplo *Las cúbicas singulares $Y^2 = X^3$ y $X^3+Y^3 = XY$ no son isomorfas.* (Compárese con el ejemplo de la página 112.)

En lugar de $X^3 + Y^3 = XY$ podemos considerar la curva $Y^2 = X^2(X + 1)$, que es proyectivamente equivalente a la del enunciado y hemos trabajado más con ella. La aplicación construida en el ejemplo de la página 76 es claramente la regularización de la curva, y vemos que el punto singular tiene dos antiimágenes. Por el contrario, el ejemplo anterior muestra que la regularización de $Y^2 = X^3$ es biyectiva, luego el teorema 3.59 implica que las dos curvas no pueden ser isomorfas. ∎

Capítulo IV

Variedades reales y complejas

En este capítulo estudiaremos las variedades (cuasiproyectivas) reales y complejas, es decir, las variedades sobre el cuerpo $K = \mathbb{C}$ definidas sobre $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$. Además del aparato algebraico que hemos introducido en los capítulos precedentes (anillos de funciones regulares, cuerpos de funciones racionales, etc.) ahora dispondremos de una estructura topológica y una estructura analítica. Veremos que muchos de los conceptos que hemos definido (como la dimensión, la regularidad de puntos y aplicaciones, etc.) pueden verse como caracterizaciones algebraicas de nociones geométricas análogas.

4.1 Las estructuras topológica y analítica

En [VC A.2] probamos que el espacio proyectivo $\mathrm{P}^n(\mathbb{C})$ admite una única estructura analítica respecto a la cual, para todo sistema de coordenadas prefijado, los espacios afines $A^n_j \subset \mathrm{P}^n$ resultantes de eliminar el hiperplano $H_\infty = V(X_j)$ son abiertos, y las asignaciones de coordenadas afines $A^n_j \longrightarrow \mathbb{C}^n$ son biholomorfas.

Así, en P^n tenemos definidas dos topologías distintas: la topología de Zariski y la topología asociada a su estructura analítica, a la que llamaremos *topología compleja* para distinguirla de la primera.

Recordemos que, con la topología compleja, P^n es un espacio topológico (de Hausdorff) compacto. Además, la aplicación $p : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathrm{P}^n$ que a cada z le asigna el punto de coordenadas homogéneas z respecto de un sistema de referencia prefijado es holomorfa.

En general, toda variedad analítica de dimensión n es también una variedad diferencial de dimensión $2n$. Por ejemplo, en la sección A.1 de [VC] vimos que la recta proyectiva P^1 es difeomorfa a una esfera, como variedad diferencial.

Todo lo que acabamos de decir vale iguamente con $\mathbb{R}$ en lugar de $\mathbb{C}$ cambiando "aplicación holomorfa" por "diferenciable" y "biholomorfa" por "difeomorfismo". Notemos que la estructura diferencial de $\mathrm{P}^n(\mathbb{R})$ es la introducida en la

sección 1.3 de [GD]. Es fácil ver que la topología de $\mathrm{P}^n(\mathbb{R})$ es la inducida por la topología compleja de P^n.

Toda variedad cuasiproyectiva compleja V es un subconjunto de un espacio proyectivo P^n, luego, además de la topología de Zariski, podemos considerar en ella la topología inducida por la topología compleja de P^n. La llamaremos *topología compleja* en V. Observemos que la topología compleja en $A^n = \mathbb{C}^n$ es la topología usual.

Un polinomio es una función continua en A^n, luego el conjunto de sus ceros es cerrado. Por consiguiente, un conjunto algebraico afín es cerrado por ser una intersección de cerrados. Lo mismo es cierto para los conjuntos algebraicos proyectivos:

Teorema 4.1 *Todo subconjunto algebraico de* P^n *es compacto con la topología compleja.*

Demostración: Sea C un subconjunto algebraico de P^n y consideremos el cono $\mathrm{Cn}(C) \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Tenemos que $\mathrm{Cn}(C)$ es un conjunto algebraico afín, luego es cerrado en $\mathbb{C}^{n+1}$, según las observaciones precedentes. También será cerrada la intersección C' del cono con la esfera unidad de $\mathbb{C}^{n+1}$. Más aún, como la esfera es compacta, C' también lo será. La aplicación $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathrm{P}^n$ dada por $p(z) = [z]$ es continua, y claramente $C = p[C']$, luego C es compacto. ∎

Así pues, la topología de Zariski de P^n es menos fina que la topología compleja y, por consiguiente, lo mismo es válido sobre cualquier variedad cuasiproyectiva.

El mismo argumento prueba que $\mathrm{P}^n(\mathbb{R})$ es compacto, y en particular es cerrado en P^n, por lo que si V es una variedad cuasiproyectiva, se cumple que $V(\mathbb{R})$ es cerrado en V (sin excluir que pueda ser vacío).

Las variedades algebraicas heredan, obviamente, la estructura topológica de P^n, pero no siempre heredan por completo su estructura analítica. Aquí interviene el concepto algebraico de regularidad:

Teorema 4.2 *Si* $V \subset \mathrm{P}^n$ *una variedad cuasiproyectiva de dimensión* d*, entonces el conjunto* V_r *de sus puntos regulares es una subvariedad analítica de* P^n *de dimensión* d*.*

Demostración: Tomemos $P \in V_r$. Podemos suponer que cumple $z_{n+1} \neq 0$, de modo que $P \in V_r' = V_r \cap A^n$. Fijado un sistema de referencia, podemos identificar $A^n = \mathbb{C}^n$ y P con sus coordenadas $a \in \mathbb{C}^n$. Sea $I(V_r') = (F_1, \ldots, F_m)$, para ciertos polinomios $F_i \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Por 3.37, existe un entorno abierto U de P (para la topología de Zariski, luego también para la topología compleja) tal que, reordenando los generadores si es preciso,

$$V \cap U = \{Q \in U \mid F_1(Q) = \cdots = F_{n-d}(Q) = 0\}.$$

Más aún, en la prueba de 3.37 hemos visto que P es un punto regular del conjunto algebraico C definido por $F_1, \dots, F_{n-d}$, lo que significa que, reordenando si es preciso las variables, se cumple que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_{d+1}}\Big|_a & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n}\Big|_a \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-d}}{\partial X_{d+1}}\Big|_a & \cdots & \frac{\partial F_{n-d}}{\partial X_n}\Big|_a \end{vmatrix} \neq 0.$$

Podemos aplicar el teorema de la función implícita [VC 1.15] a la función holomorfa $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-d}$ dada por $F(x) = (F_1(x), \dots, F_{n-d}(x))$, según el cual, existe un entorno abierto U de P (es decir, podemos reducir el entorno U que ya teníamos), un entorno abierto $W \subset \mathbb{C}^d$ de las d primeras coordenadas de P y una función holomorfa $g : W \longrightarrow \mathbb{C}^{n-d}$ de modo que

$$V \cap U = \{Q \in U \mid F_1(Q) = \cdots = F_{n-d}(Q) = 0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in W\}.$$

Más aún, por continuidad, reduciendo U, podemos suponer que el determinante anterior es no nulo en todos los puntos $a \in U$, no sólo en las coordenadas de P. Esto hace que todo $Q \in V \cap U$ cumpla que $\dim T_Q V = n - d$, por 3.20, ya que el rango de la matriz de derivadas de $F_1, \dots, F_m$ tiene que ser al menos $n - d$, luego $\dim T_Q V \leq d = \dim V$, y la otra desigualdad se da siempre. Así pues,

$$V_r \cap U = \{(x, g(x)) \mid x \in W\}.$$

Esto prueba que V_r es localmente la gráfica de una función holomorfa, luego V_r es una variedad analítica por [VC A.51]. ∎

Nota En las condiciones del teorema anterior, si V es una variedad definida sobre $\mathbb{R}$ y $P \in V(\mathbb{R})$, los generadores $F_1, \dots, F_m$ pueden tomarse en $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ y podemos aplicar el teorema de la función implícita del análisis real [An 6.7], con lo que obtenemos abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^d$ y una función diferenciable $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ (de clase C^∞) de modo que

$$V_r(\mathbb{R}) \cap U = \{(x, g(x)) \mid x \in W\},$$

y podemos aplicar [An 6.2] en lugar de [VC A.51]. La conclusión es:

Teorema 4.3 *Si $V \subset \mathrm{P}^n$ una variedad cuasiproyectiva de dimensión d definida sobre $\mathbb{R}$, entonces el conjunto $V_r(\mathbb{R})$ de sus puntos regulares con coordenadas reales (si no es vacío) es una subvariedad diferencial de $\mathrm{P}^n(\mathbb{R})$ de dimensión d.*

En particular, las variedades cuasiproyectivas regulares en P^n son subvariedades analíticas de P^n y, si están definidas sobre $\mathbb{R}$ y tienen puntos racionales (reales), éstos forman una subvariedad diferencial de $\mathrm{P}^n(\mathbb{R})$ de dimensión d. También vemos ahora que la noción algebraica de dimensión se corresponde debidamente con la noción geométrica.

Teorema 4.4 *Toda aplicación regular $\phi : V \longrightarrow W$ entre variedades cuasiproyectivas es continua y, si además V y W son regulares, entonces ϕ es holomorfa.*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos $W = \mathrm{P}^n$, pues si $W \subset \mathrm{P}^n$, entonces ϕ es continua u holomorfa como aplicación en W si y sólo si lo es como aplicación en P^n. Fijemos $P \in V$. Basta ver que ϕ es continua u holomorfa en un entorno de P. Según las observaciones tras el teorema 2.53, existe un entorno U de P en V para la topología de Zariski —luego también para la topología compleja— en el que ϕ viene dada por

$$\phi(Q) = (F_1(Q), \dots, F_{n+1}(Q)),$$

donde $F_1, \dots, F_{n+1}$ son formas del mismo grado que no se anulan simultáneamente en ningún punto. Más aún, podemos suponer que $U \subset A^m$. Así podemos tomar coordenadas afines y $\phi|_U$ se expresa como composición de las aplicaciones siguientes, todas continuas, y holomorfas en caso en que V y W sean regulares:

1. La aplicación que a cada Q le asigna su m-tupla de coordenadas afines. (Es la restricción a U de una función holomorfa en A^m.)
2. La aplicación polinómica $\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ definida por las formas (deshomogeneizadas) F_i.
3. La aplicación holomorfa $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathrm{P}^n$ dada por $z \mapsto [z]$. ∎

Ejercicio: Comprobar que la topología compleja en un producto $V \times W$ es el producto de las topologías complejas.

Similarmente se comprueba que, en las condiciones del teorema anterior, si ϕ está definida sobre $\mathbb{R}$ y $V(\mathbb{R}) \neq \varnothing$, entonces ϕ se restringe a una función diferenciable $V(\mathbb{R}) \longrightarrow W(\mathbb{R})$.

Si V es una variedad cuasiproyectiva regular, según 2.34, las funciones de $\mathbb{C}[V]$ pueden verse como funciones regulares $V \longrightarrow \mathbb{C}$, luego son holomorfas, es decir, tenemos que $\mathbb{C}[V] \subset \mathcal{H}(V)$. A su vez, esto implica que $\mathcal{O}_P(V) \subset \mathcal{H}_P(V)$.

Si $P \in V$, tenemos definidos dos espacios tangentes, el analítico y el algebraico. El primero está formado por las derivaciones de $\mathcal{H}_P(V)$, mientras que el segundo está formado por las derivaciones de $\mathcal{O}_P(V)$. Ahora bien, el teorema [VC A.50] aplicado a las coordenadas $x_1, \dots, x_m$ de un entorno afín de P nos da que algunas de ellas se restringen a las funciones coordenadas de una carta de V alrededor de P, y son funciones de $\mathcal{O}_P(V)$, y un elemento del espacio tangente analítico está determinado por su acción sobre estas funciones. Por lo tanto, la restricción es un monomorfismo del espacio tangente analítico en el algebraico. Como ambos tienen la misma dimensión, de hecho es un isomorfismo.

Si $f \in \mathcal{O}_P(V)$ y $v \in T_P V$, la relación $d_P f(v) = v(f)$ se cumple tanto para la diferencial algebraica como para la geométrica, luego ambas coinciden.

A su vez, [VC A.43] nos da ahora que unas funciones $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{O}_P(V)$ son las funciones coordenadas de una carta alrededor de P si y sólo si las funciones $x_i - x_i(P)$ son un sistema de parámetros locales en P.

Teorema 4.5 *Sea P un punto regular de una variedad V y sea $x_1, \dots, x_n$ un sistema fundamental de parámetros alrededor de P. Si $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$, entonces su serie de Taylor*

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_m \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$$

converge en un abierto $D \subset \mathbb{C}^n$ y, para todo punto Q en un cierto entorno de P en V, se cumple que $(x_1(Q), \dots, x_n(Q)) \in D$ y

$$\alpha(Q) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(x_1(Q), \dots, x_n(Q)).$$

Demostración: Sea G un entorno de P en V en el que α sea regular y tal que la aplicación $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}^n$ dada por $\phi(Q) = (x_1(Q), \dots, x_n(Q))$ sea una carta de V alrededor de P. Entonces $\phi^{-1} \circ \alpha$ es una función holomorfa en un entorno de 0 en $\mathbb{C}^n$, luego admite un desarrollo en serie de Taylor

$$\alpha(\phi^{-1}(z_1, \dots, z_n)) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(z_1, \dots, z_n).$$

Sea U la antiimagen por ϕ del dominio de la serie de potencias, de modo que para todo $Q \in U$ se cumple

$$\alpha(Q) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(x_1(Q), \dots, x_n(Q)).$$

Sólo hemos de probar que $\tau'(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(X_1, \dots, X_n)$ es la serie de Taylor de α.

Tenemos definidos dos k-homomorfismos $\tau, \tau' : \mathcal{O}_P(V) \longrightarrow k[[X_1, \dots, X_n]]$, que asignan a cada función su serie de Taylor algebraica y analítica respectivamente. Obviamente $\tau(x_i) = X_i = \tau'(x_i)$, luego ambos coinciden sobre el anillo $k[x_1, \dots, x_n]$.

Consideramos en $\mathcal{O}_P(V)$ la topología que resulta de identificarlo con su imagen por τ, respecto a la cual $k[x_1, \dots, x_n]$ se corresponde con $k[X_1, \dots, X_n]$ y es denso. Si probamos que τ' es continua respecto a esta topología, tendremos que $\tau = \tau'$, como queremos demostrar.

Como τ' conserva sumas basta ver que es continua en 0. Para ello a su vez basta probar que si $\alpha \in \mathfrak{m}_P^r$ entonces $v(\tau'(\alpha)) \geq r$. Ahora bien, esto es trivial, pues si $\alpha \in \mathfrak{m}_P$ entonces $\alpha(P) = 0$, luego $\tau'(\alpha)(0, \dots, 0) = 0$, lo que se traduce en que $v(\tau'(\alpha)) \geq 1$, y ahora basta usar que τ' es un homomorfismo y las propiedades de las valoraciones. ∎

Así pues, si llamamos $g : \tilde{U} \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ a la función definida por la serie de Taylor y $x : U \longrightarrow \tilde{U}$ a la función $x(Q) = (x_1(Q), \dots, x_n(Q))$, tenemos que x es una carta alrededor de P y, para todo $Q \in U$, se cumple $f(Q) = g(x(Q))$, luego g es la lectura de f en la carta x.

Teniendo esto en cuenta es inmediato que las derivadas parciales $\partial/\partial x_i|_P$ en el sentido algebraico coinciden con las analíticas. (En realidad ya sabíamos que esto es así porque ambas son la base dual de la base $d_P x_i$ de $T_P V^*$.)

A veces es útil la siguiente caracterización interna de la topología compleja de una variedad:

Teorema 4.6 *Una base de una variedad cuasiproyectiva V para la topología compleja la forman los conjuntos*

$$U(\alpha_1,\dots,\alpha_r;\epsilon) = \{P \in V \mid \alpha_i \in \mathcal{O}_P(V) \text{ y } |\alpha_i(P)| < \epsilon\}, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}(V),\ \epsilon > 0.$$

Demostración: Basta probarlo para la clausura proyectiva de V o, lo que es lo mismo, en el caso en que $V \subset \mathrm{P}^n$ es proyectiva. Si G es el conjunto de puntos de V donde todas las α_i son regulares, entonces G es abierto en V para la topología de Zariski, luego también para la compleja, el conjunto $U(\alpha_1,\dots,\alpha_r;\epsilon)$ está contenido en G y todas las $\alpha_i|_G$ son continuas, luego es abierto.

Consideremos ahora un abierto G en V y un punto $P \in G$. Tomemos un sistema de referencia proyectivo de P^n respecto al cual P tenga coordenadas homogéneas $(0,\dots,0,1)$. Vamos a ver que existe un número real $\epsilon > 0$ tal que $P \in U(x_1,\dots,x_n;\epsilon) \subset G$. En caso contrario existiría $P_m \in U(x_1,\dots,x_n;1/m)$ tal que $P_m \notin G$. La compacidad de V implica que $\{P_m\}$ tiene una subsucesión $\{P_{m_i}\}$ convergente a un punto $Q \in V \setminus G$. Como $|x_j(P_{m_i})| < 1/m_i$, concluimos que $x_j(Q) = 0$ para todo $j = 1,\dots,n$, luego ha de ser $Q = P$, contradicción. ∎

Teorema 4.7 *Si V es una variedad cuasiproyectiva, todo abierto no vacío respecto de la topología de Zariski es denso respecto de la topología compleja.*

Demostración: Sea U un abierto no vacío en V. Entonces U también es abierto (de Zariski) en la clausura proyectiva de V. Si es denso (par la topología complea) en ésta, también lo será en V, luego no perdemos generalidad si suponemos que V es una variedad proyectiva. A su vez, V está cubierta por un número finito de variedades afines V_i, y si $U \cap V_i$ es denso en V_i, entonces U es denso en V. Por lo tanto, no perdemos generalidad si suponemos que $V \subset A^n$ es una variedad afín.

Supongamos en primer lugar que V es una curva. Entonces podemos considerar su regularización $r : V^r \longrightarrow V$. Sea $U \subset V$ un abierto no vacío (respecto de la topología de Zariski), sea $C = V \setminus U$ y sea $C' = r^{-1}[C]$, que es cerrado en V^r. Como r es suprayectiva, tiene que ser $C' \subsetneq V^r$, luego las componentes irreducibles de C' tienen que ser puntos (por 3.5). En otras palabras, C' es un conjunto finito. Como V^r es regular, cada $P \in C'$ tiene un entorno complejo U_0 homeomorfo a un disco abierto en $\mathbb{C}$, que podemos tomar de modo que $U_0 \cap C' = \{P\}$. Es claro que $U_0 \setminus \{P\}$ es denso en U_0, luego $V^r \setminus C'$ es denso en C', y esto implica que $U = V \setminus C$ es denso en V.

Ahora razonamos por inducción sobre la dimensión d de V. Si $\dim V = d > 1$ y el resultado es cierto para $d-1$, tomemos como antes un abierto no vacío U y llamemos $C = V \setminus U$. Fijado un punto $P \in C$, tomamos un punto $P_i \neq P$ en cada componente irreducible de C de dimensión $d-1$ que pase por P (si es que las hay).

Observemos ahora que podemos tomar un hiperplano H en A^n que pase por P, pero que no pase por ninguno de los puntos P_i.

En efecto, la clausura proyectiva de H estará determinada por una ecuación lineal homogénea que debe ser satisfecha por las coordenadas de P pero no por las de los puntos P_i, lo cual equivale a que los coeficientes de dicha ecuación determinen un punto de P^n que está en el hiperplano H_0 determinado por las coordenadas de P, pero no en los determinados por las coordenadas de los P_i (que son hiperplanos distintos). A su vez, esto equivale a la existencia de un punto en H_0 que no esté en la unión de un número finito de variedades lineales de dimensión $n-2$, es decir, a que H_0 no sea unión de un número finito de variedades de dimensión $n-2$, lo cual es obvio, pues H_0 es irreducible.

Sea V' una componente irreducible de $V \cap H$ que pase por P. Por el teorema 3.10 sabemos que $\dim V' = d-1$. Sea $C' = C \cap V' \subset C \cap H$. Toda componente irreducible de C' está contenida en una componente irreducible de C, luego no puede tener dimensión $d-1$, pues entonces algún P_i estaría en H. Esto implica que $C' \subsetneq V'$, luego $U' = V' \setminus C'$ es un abierto no vacío de V' en la topología de Zariski. Por hipótesis de inducción es denso en V' respecto de la topología compleja, luego P está en la clausura de $U' \subset U$, luego también en la de U, respecto de la topología compleja. ∎

El teorema 4.2 prueba que todo punto regular de una variedad cuasiproyectiva tiene un entorno (respecto de la topología de Zariski, luego también respecto de la compleja) que tiene estructura de subvariedad analítica de P^n, es decir, que es un punto analítico en el sentido de [VC A.47]. Ahora vamos a probar el recíproco, con lo que llegamos a que, sobre variedades cuasiproyectivas, el concepto analítico de punto analítico es equivalente al concepto algebraico de punto regular.

Teorema 4.8 *Un punto de una variedad cuasiproyectiva es analítico si y sólo si es regular.*

Demostración: Sea V una variedad cuasiproyectiva y $P \in V$. Tanto el concepto de punto analítico como el de punto regular son locales, luego podemos sustituir V por su clausura proyectiva y ésta a su vez por su intersección con un abierto afín, de modo que no perdemos generalidad si suponemos que $V \subset \mathbb{C}^n$ es una variedad afín. El teorema 4.2 prueba que si P es un punto regular entonces es analítico. Supongamos ahora que P es analítico. Esto significa que tiene un entorno (conexo) W con estructura de subvariedad analítica de $\mathbb{C}^n$.

Por el teorema anterior, dicho entorno contiene puntos regulares de V. El teorema 4.2 nos da entonces que la dimensión de W como variedad analítica coincide con la dimensión de V como variedad algebraica. Llamemos d a esta dimensión.

La diferencial de la inclusión $W \longrightarrow \mathbb{C}^n$ nos permite identificar $T_P W$ con un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$ de dimensión d. Observemos que si $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $F|_W = 0$, entonces $dF|_P|_{T_P W} = d(F|_W)_P = 0$. Esto se aplica en particular a todo polinomio $F \in I(V)$.

Fijemos un sistema generador $F_1, \dots, F_m$ de $I(V)$, que determina una función holomorfa $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$. Sea $A(X)$ la matriz formada por las derivadas parciales de las funciones F_i, de modo que $A(P)$ es la matriz asociada a la diferencial $dF|_P : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$.

Acabamos de ver que $T_P W$ está contenido en el núcleo de $dF|_P$, por lo que $\operatorname{rang} A(P) \leq r$. Esto lo sabíamos ya por la prueba del teorema 3.27, donde hemos visto, más aún, que la igualdad equivale a que el punto P sea regular en V. Supongamos que no lo es, lo que se traduce en que el núcleo N de $dF|_P$ contiene estrictamente a $T_P W$.

Tomemos una base de $T_P W$, extendámosla a una base de N y ésta a su vez a una base de $\mathbb{C}^n$. Esta base determina un sistema de referencia de $\mathbb{C}^n$ respecto del cual P tiene coordenadas nulas, $T_P W = \{(x, y) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^r \mid y = 0\}$ y para todo $F \in I(V)$ se cumple que

$$\left.\frac{\partial F}{\partial X_i}\right|_P = 0, \quad i = 1, \dots, d, \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial Y_1}\right|_P = 0.$$

Las funciones coordenadas y_i en $\mathbb{C}^n$ cumplen $d(y_i|_W)_P = 0$. Por [VC A.50], tiene que haber d funciones coordenadas en $\mathbb{C}^n$ cuya restricción a W sean independientes en un entorno de P, luego no pueden ser otras más que $x_1, \dots, x_d$. La prueba de [VC A.51] muestra entonces que, restringiendo W, podemos suponer que es la gráfica de una función holomorfa, es decir, que existe un entorno U' de 0 en $\mathbb{C}^d$, un entorno U de P en $\mathbb{C}^n$ y una función holomorfa $\phi : U' \longrightarrow \mathbb{C}^r$ de modo que

$$W = V \cap U = \{(x, y) \in U' \times \mathbb{C}^r \mid y = \phi(x)\}.$$

Vamos a ver que podemos reducir el problema al caso en que $n = d + 1$. Para ello suponemos que $d < n - 1$ y veamos que podríamos haber elegido el sistema de referencia de modo que se cumpliera una propiedad adicional: Sea L un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$ de dimensión $n - 1$ que contenga a N y vamos a escoger adecuadamente el último vector de la base que determina el sistema de referencia. Para ello tomamos un hiperplano L' paralelo a L. Sean $\overline{L}'$ y $\overline{V}$ las clausuras de L' y V en P^n. Consideramos la proyección $V \setminus \{P\} \longrightarrow \overline{L}'$, es decir, la aplicación que a cada punto $Q \in V \setminus \{P\}$ le hace corresponder la intersección con $\overline{L}'$ de la recta que pasa por P y Q. Se trata de una aplicación regular (es una aplicación del tipo definido en 2.63). Si llamamos $V' \subset \overline{L}'$ a la clausura de su imagen (en la topología de Zariski), tenemos una aplicación regular densa $V \setminus \{P\} \longrightarrow V'$, por lo que $\dim V' \leq d < \dim \overline{L}'$ (por ejemplo por los teoremas 2.67 y 3.43). Esto nos permite tomar como último vector de la base que determina el nuevo sistema de referencia de $\mathbb{C}^n$ un punto de $\overline{L}' \setminus V'$, y esto nos asegura que el único punto de la recta

$$x_1 = \cdots = x_d = y_1 = \cdots = y_{n-1} = 0$$

que está en la clausura proyectiva de V es P. Sea entonces Q el punto infinito de esta recta, y consideremos la proyección $\overline{V} \longrightarrow \mathrm{P}^{n-1}$ desde Q, donde P^{n-1}

se identifica con la clausura proyectiva del hiperplano $y_n = 0$. Por 2.49 sabemos que la imagen de $\overline{V}$ es una variedad proyectiva $\overline{V}_0 \subset \mathrm{P}^{n-1}$. Llamemos V_0 a su intersección con el abierto afín $\mathbb{C}^{n-1}$. La proyección se restringe a la proyección $V \longrightarrow V_0$ que consiste en eliminar la coordenada y_n. Esta restricción no es necesariamente suprayectiva, pues en V_0 puede haber imágenes de puntos infinitos de V, pero la construcción garantiza que la única antiimagen de P es el propio P.

Observemos ahora que cada punto $(x, y) \in V_0 \cap U$ tiene una única antiimagen en W, a saber, $(x, \phi(x))$, y reduciendo los abiertos U y U' podemos suponer que dicha antiimagen es su única antiimagen en $\overline{V}$. En efecto, en caso contrario podríamos encontrar una sucesión de puntos $Q_n \in \overline{V} \setminus U$ con imágenes convergentes a P. Por compacidad podríamos extraer una subsucesión convergente a un punto $P' \in \overline{V} \setminus U$ cuya imagen debería ser P, lo cual es imposible.

En definitiva, $V_0 \subset \mathbb{C}^{n-1}$ es un conjunto algebraico que en un entorno de P es la gráfica de la función holomorfa ϕ' (resultante de eliminar la última coordenada de ϕ) y es claro que $I(V_0) \subset I(V)$, por lo que las derivadas parciales de los elementos de $I(V_0)$ respecto de $X_1, \ldots, X_d, Y_1$ son nulas en P. Más aún, es fácil ver que la variedad tangente $T_P V_0$ sigue siendo la dada por $y = 0$.

Repitiendo este proceso las veces necesarias, llegamos a una subvariedad de $\mathbb{C}^{d+1}$. En definitiva, podemos suponer que V es una hipersuperficie de $\mathbb{C}^{d+1}$, que por el teorema 3.6 será de la forma $V = V(F)$, para cierto polinomio F que podemos tomar irreducible, de modo que $I(V) = (F)$. Por una parte tenemos que

$$\left.\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|_P = \cdots = \left.\frac{\partial F}{\partial X_d}\right|_P = \left.\frac{\partial F}{\partial Y}\right|_P = 0,$$

y por otra que existen abiertos $U \subset \mathbb{C}^{d+1}$, $U' \subset \mathbb{C}^d$ y una función holomorfa $\phi : U' \longrightarrow \mathbb{C}$ de manera que

$$W = \{(x, y) \in U \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in U' \times \mathbb{C} \mid y = \phi(x)\}.$$

La condición sobre las derivadas equivale a que F no tiene términos de grado 1 (ni término independiente, pues $F(P) = 0$ y P tiene coordenadas nulas). Llamemos $s \geq 2$ al menor grado de un monomio no nulo de F y sea $F_s \neq 0$ la forma de grado s de F. Existe un punto $(a_1, \ldots, a_d, 1) \in \mathbb{C}^{d+1}$ tal que $F_s(a_1, \ldots, a_d, 1) \neq 0$. El polinomio

$$F^*(X'_1, \ldots, X'_d, Y) = F(X'_1 + a_1 Y, \ldots, X'_d + a_d Y, Y)$$

tiene únicamente monomios de grado $\geq s$, y $F^*_s(0, \ldots, 0, 1) \neq 0$, lo que significa que el coeficiente de Y^s en F^*_s es no nulo. Por otra parte, puesto que $dy|_P = 0$, resulta que las funciones $x'_1, \ldots, x'_d$ son también independientes en P, luego la variedad $V(F^*)$ es también la gráfica de una función holomorfa $y = \phi(x')$ en un entorno de P. Equivalentemente, podemos suponer que el coeficiente de Y^s en F_s es no nulo, o incluso que es igual a 1.

Sea $D(X_1, \ldots, X_d)$ el discriminante [Al 9.9] de F, visto como polinomio en Y. Como F es irreducible, sus raíces en la clausura algebraica de $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_d)$

son simples, luego el polinomio D es no nulo y, por 4.7, el conjunto de puntos de $\mathbb{C}^d$ donde no se anula es denso para la topología compleja. Si $Q \in \mathbb{C}^d$ es uno de estos puntos, tenemos que $F(Q,Y) \in \mathbb{C}[Y]$ es un polinomio no nulo y tiene todas sus raíces simples. Así pues, en todo entorno de $0 \in \mathbb{C}^d$ existen puntos Q tales que $F(Q,Y)$ sólo tiene raíces simples.

Ahora aplicamos el principio del argumento [VC 3.21] (véase la expresión para $I(\phi \circ f, 0)$ que aparece en la demostración), según el cual, si fijamos un disco $\Omega \subset \mathbb{C}$ de centro 0, la integral

$$N(Q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{F'(Q,\zeta)}{F(Q,\zeta)}\, d\zeta$$

es igual al número de ceros del polinomio $F(Q,Y)$ (contados con su multiplicidad) contenidos en Ω (bajo el supuesto de que $F(Q,Y)$ no tenga ningún cero en la circunferencia sobre la que se calcula la integral).

Tomemos ahora un abierto $P \in U' \times \Omega \subset U$, donde U es el entorno de P en el que V es la gráfica de una función y Ω es un disco cuya frontera no contiene ningún cero del polinomio $F(0,Y)$. Entonces $N(0) \geq s \geq 2$, ya que

$$F(0,Y) = Y^s + \text{términos de grado superior}$$

tiene al menos un cero de orden s en $0 \in \Omega$.

Ahora bien, por compacidad, para todo Q en un entorno de $0 \in \mathbb{C}^d$, se cumple que $F(Q,Y)$ no se anula en $\partial\Omega$, luego está definido $N(Q)$. Además es una función continua de Q que sólo puede tomar valores enteros, luego es constante. Concluimos que $F(Q,Y)$ tiene al menos s ceros para todo punto Q en un entorno de 0, y podemos tomar puntos Q arbitrariamente cerca de 0 en los que $F(Q,Y)$ sólo tiene ceros simples, luego concluimos que existe un punto $Q \in U'$ para el que existen dos puntos distintos $y_1, y_2 \in \Omega$ tales que $F(Q,y_1) = F(Q,y_2) = 0$, luego (Q,y_1), $(Q,y_2) \in V \cap U$, lo que contradice que V sea en U la gráfica de una función. ∎

4.2 El teorema de conexión

En esta sección demostraremos un hecho nada trivial, y es que las variedades algebraicas son conexas para la topología compleja. Para ello necesitamos algunos resultados previos. Empezaremos estudiando más a fondo las aplicaciones finitas entre variedades algebraicas. Estos primeros resultados son válidos para variedades definidas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado arbitrario.

Definición 4.9 Si $\phi : X \longrightarrow Y$ es una aplicación finita entre dos variedades algebraicas definidas sobre un cuerpo k, entonces ϕ induce un monomorfismo $k(Y) \longrightarrow k(X)$ que nos permite considerar a $k(X)$ como una extensión algebraica de $k(Y)$ (véase la prueba de 3.4). Puesto que $k(X)$ es finitamente generado sobre k, la extensión $k(X)/k(Y)$ es finita, luego podemos definir el *grado* de ϕ como $\operatorname{grad}\phi = |k(X) : k(Y)|$.

Teorema 4.10 *Si $\phi : X \longrightarrow Y$ es una aplicación finita de grado n entre variedades algebraicas e Y es regular, entonces cada punto de Y tiene a lo sumo n antiimágenes en X.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un punto $y \in Y$. Sustituyendo Y por un entorno afín del punto y X por su antiimagen, podemos suponer que tanto X como Y son variedades afines. Así, $k[X]$ es una extensión entera de $k[Y]$ y $|k(X) : k(Y)| = n$. Por otra parte, la regularidad de Y implica que el anillo $k[Y]$ es íntegramente cerrado, pues esta implicación en el teorema 3.54 no requiere que Y sea una curva.

En estas condiciones, si $a \in k[X]$, tenemos que a es entero sobre $k[Y]$, luego los coeficientes del polinomio mínimo de a en $k(Y)$ son también enteros sobre $k[Y]$, y están en $k(Y)$, luego están en $k[Y]$.

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$ las antiimágenes de y. Podemos tomar un $a \in k[X]$ tal que las imágenes $a(x_i)$ sean distintas dos a dos. (Siempre es posible tomar un polinomio que tome valores distintos sobre un número finito de puntos prefijados.) Sea $F(T) \in k[Y][T]$ el polinomio mínimo de a, que cumple $\operatorname{grad} F \leq n$. Si llamamos $F(y)(T) \in k[T]$ al polinomio que resulta de evaluar en y los coeficientes de $F(T)$, vemos que todos los $a(x_i)$ son raíces de $F(y)(T)$, luego $m \leq \operatorname{grad} F(y)(T) = \operatorname{grad} F(T) \leq n$. ∎

Definición 4.11 En las condiciones del teorema anterior, diremos que ϕ es *no ramificada* sobre el punto $y \in Y$ si y tiene exactamente n antiimágenes en X. Diremos que ϕ es *no ramificada* si lo es en todos los puntos de Y.

Teorema 4.12 *Si $\phi : X \longrightarrow Y$ es una aplicación finita entre variedades algebraicas e Y es regular, entonces el conjunto de puntos de Y donde ϕ es no ramificada es abierto, y es no vacío si $k(X)$ es una extensión separable de $k(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que no perdemos generalidad si suponemos que X e Y son afines. Fijado un punto $y \in Y$, mantenemos la notación del teorema anterior. Si ϕ no se ramifica en y, entonces $\bar{F}$ tiene n raíces distintas en k, luego $\operatorname{grad} F(T) = \operatorname{grad} F(y)(T) = n$ y el discriminante $D(F(y)) = D(F)(y)$ es no nulo. Por consiguiente, tenemos además que $k(X) = k(Y)(a)$, es decir, que a es un elemento primitivo de la extensión $k(X)/k(Y)$.

En general, si $a \in k[X]$ es un elemento primitivo cualquiera de la extensión, F es su polinomio mínimo e $y \in Y$ es un punto que cumple $D(F)(y) \neq 0$, llamamos $U \subset Y$ al abierto afín formado por los puntos de Y donde $D(F)$ no se anula y vamos a probar que ϕ no se ramifica en U. Esto prueba también la segunda parte del teorema, pues, si la extensión $k(X)/k(Y)$ es separable, tiene un elemento primitivo a, que podemos tomar en $k[X]$, y F tiene raíces simples por la separabilidad, luego $D(F) \neq 0$, luego existe un punto $y \in Y$ donde $D(F)(y) \neq 0$, y esto implica la existencia de puntos no ramificados.

Sea $V = \phi^{-1}[U]$, que es un abierto afín de X porque ϕ es finita. Notemos que $F \in k[Y][T] \subset k[U][T]$, y $D(F) \in k[U]$ no se anula en ningún punto de U. Equivalentemente, podemos sustituir X por V e Y por U, y suponer que $D(F)$ no se anula en ningún punto de Y.

Sea $X' \subset Y \times A^1$ el conjunto algebraico afín formado por los pares (y, α) que cumplen $F(y)(\alpha) = 0$. Observemos que $k[X'] \cong k[Y][T]/(F)$ y F es irreducible en $k[Y]$, por lo que $k[X']$ es un dominio íntegro, luego X' es una variedad afín. Más aún, tenemos un isomorfismo natural $k[X'] \cong k[Y][a] \subset k[X]$. Los homomorfismos de k-álgebras

$$k[Y] \longrightarrow k[Y][T] \longrightarrow k[X'] \longrightarrow k[X]$$

se corresponden con aplicaciones regulares

$$X \longrightarrow X' \longrightarrow Y \times A^1 \longrightarrow Y,$$

cuya composición es ϕ. En definitiva, ϕ se descompone como una aplicación regular $X \longrightarrow X'$ seguida de la restricción $f : X' \longrightarrow Y$ de la proyección $Y \times A^1 \longrightarrow Y$. Observemos que f es no ramificada, pues, si $y \in Y$, el polinomio $F(y)(T)$ tiene n raíces distintas $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$, por lo que los puntos $(y, \alpha_i) \in X'$ son n antiimágenes de y.

Para terminar la demostración basta ver que X' es regular, pues entonces $k[X']$ será íntegramente cerrado (véase la prueba del teorema anterior), pero todo elemento de $k[X]$ es entero sobre $k[Y]$, luego sobre $k[Y][a]$, luego ha de estar en $k[Y][a]$. En definitiva, tendremos que $k[X] = k[Y][a] \cong k[X']$, luego la aplicación $X \longrightarrow X'$ es un isomorfismo, a través del cual ϕ se corresponde con f y, por consiguiente, es no ramificada.

Observemos que la dimensión de $Y \times A^1$ es una unidad más que la de Y, por lo que $\dim X' = \dim Y = d$. Tomemos un punto $x \in X'$ y sea $y = f(x) \in Y$. La aplicación f induce un homomorfismo $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Basta probar que es suprayectivo, pues entonces

$$d \leq \dim_k T_x X' = \dim_k \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \leq \dim_k \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 = \dim_k T_y Y = d,$$

lo que implica que x es regular en X'.

Sea $u_1, \dots, u_d \in \mathfrak{m}_y$ un sistema local de parámetros en y. Es claro que un sistema local de parámetros en x está formado por $u_1, \dots, u_d, a$, por lo que sólo hemos de probar que $d_x a$ es combinación lineal de los $d_x u_i$. Ahora bien, si

$$F(T) = T^n + b_1 T^{n-1} + \cdots + b_n, \qquad b_i \in k[Y],$$

al calcular la diferencial de $F(a) = 0$ obtenemos que

$$F(y)'(a) d_x(a) + a^{n-1}(x) d_x b_1 + \cdots + d_x b_n = 0.$$

Por otra parte, como $x \in X'$, tenemos que $F(y)(a) = 0$, es decir, que a es una raíz de $F(y)(T)$. Como $D(F)(y) \neq 0$, se trata de una raíz simple, luego $F'(y)(a) \neq 0$, lo que nos permite despejar $d_x(a)$ como combinación lineal de las $d_x b_i$, que a su vez son combinaciones lineales de las $d_x u_i$. ∎

A partir de aquí consideremos una variedad compleja X. Por el teorema de Noether 2.66, existe una aplicación finita $\phi : U \longrightarrow A^m$, para un cierto abierto

afín U de X. Por el teorema anterior, sustituyendo U por un abierto menor, obtenemos una aplicación finita y no ramificada $\phi : U \longrightarrow V$, donde $V \subset A^m$ es un abierto afín. Restringiendo aún más U y V, podemos suponer que ϕ es de la forma descrita en el teorema anterior, es decir, que $U \subset V \times A^1$ es regular y está definido por un polinomio irreducible $F \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_m, T]$ (mónico en T) y que ϕ es la restricción de la proyección.

Veamos ahora que, respecto a la topología compleja, ϕ es un cubrimiento no ramificado, es decir, que cada punto $y \in V$ tiene un entorno V' tal que $\phi^{-1}[V']$ es unión de n abiertos disjuntos $U'_1, \ldots, U'_n$ tales que $\phi|_{U'_i} : U'_i \longrightarrow V'$ es un homeomorfismo.

En efecto, sean $x_1, \ldots, x_n \in U$ las antiimágenes de y. En la prueba del teorema anterior hemos visto que $d\phi_{x_i} : T_{x_i}U \longrightarrow T_yV$ es un isomorfismo (hemos visto que su dual es suprayectiva, y ambos espacios tienen la misma dimensión). Sabemos que la diferencial algebraica coincide con la diferencial analítica, luego el teorema de la función inversa nos da que ϕ se restringe a una aplicación biholomorfa entre un entorno U'_i de x_i y un entorno V'_i de y. Restringiendo estos entornos podemos suponer que los U'_i son disjuntos dos a dos y que todos los V'_i son un mismo abierto V'. De este modo, cada punto $y' \in V'$ tiene exactamente n antiimágenes en $U'_1 \cup \cdots \cup U'_n$, luego éstas son todas sus antiimágenes, y esta unión es todo $\phi^{-1}[V']$.

Vamos a usar la aplicación ϕ para demostrar que U es conexo, lo cual implica a su vez que la variedad original X es conexa, pues U es denso en X.

Observemos que V es conexo: Se trata de un abierto de A^m para la topología de Zariski. Dados dos puntos $P, Q \in V$, sea $L \subset A^m$ la recta que los contiene, que es homeomorfa a $\mathbb{C}$. Entonces, $L \cap V$ es un abierto no vacío en L para la topología de Zariski, luego es homeomorfo a $\mathbb{C}$ menos un número finito de puntos, luego es un conjunto conexo contenido en V que contiene a P y Q. Esto prueba que P y Q están en la misma componente conexa de V, luego V es conexo.

Supongamos que $U = M_1 \cup M_2$, donde los M_i son cerrados disjuntos no vacíos. El hecho de que ϕ sea un cubrimiento no ramificado implica claramente que es abierta y cerrada, por lo que $\phi[M_i]$ son abiertos y cerrados en V, que es conexo, luego $\phi[M_1] = \phi[M_2] = V$.

También es claro que la restricción $\phi_1 : M_1 \longrightarrow V$ es un cubrimiento no ramificado y el número de antiimágenes de cada punto es localmente constante, luego es constante. Llamémoslo r. Puesto que también $\phi[M_2] = V$, ha de ser $r < n$.

Sea $a \in \mathbb{C}[U]$ el elemento primitivo de la extensión $\mathbb{C}(U)/\mathbb{C}(V)$ según el teorema anterior. Fijemos un punto $v \in V$ y sea V_v un entorno en el que $\phi_1^{-1}[V_v] = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ se descomponga como unión de abiertos disjuntos homeomorfos a V_v. Llamemos $\phi_i : U_i \longrightarrow V_v$ a las restricciones de ϕ_1, sean $a_i \in \mathcal{H}(U_i)$ las restricciones de a y sean $g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{H}(V_v)$ los polinomios simétricos elementales en $\phi_i^{-1} \circ a_i$. Vamos a probar que existen polinomios $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{C}[A^m]$, independientes de v, cuyas restricciones a V_v coinciden con $g_1, \ldots, g_r$.

Esto significará que el polinomio $T^r - p_1T^{r-1} + \cdots + (-1)^r p_r \in \mathbb{C}[V][T]$ se anula en cada $\phi_i^{-1} \circ a_i$, luego

$$P(T) = T^r - \bar{\phi}(p_1)T^{r-1} + \cdots + (-1)^r \bar{\phi}(p_r) \in \mathbb{C}[V][T]$$

se anula en cada a_i. (Aquí consideramos $\bar{\phi} : \mathbb{C}[V] \longrightarrow \mathbb{C}[U]$ como una inclusión, por lo que podemos escribir $\bar{\phi}(p_j) \in \mathbb{C}[V]$.) Esto implica a su vez que $P(T)$ se anula en la restricción de a a cada $\phi_1^{-1}[V_v]$, luego, en definitiva, $P(a|_{M_1}) = 0$.

Similarmente, podemos encontrar otro polinomio mónico $P' \in \mathbb{C}[V][T]$ de grado $r' < n$ tal que $P'(a|_{M_2}) = 0$. Entonces $P(a)P'(a) = 0$ en $\mathbb{C}[U]$, que es un dominio íntegro, por lo que llegamos a que a es raíz de un polinomio mónico de grado $< n$, lo cual es absurdo, ya que a es un elemento primitivo de $\mathbb{C}(U)/\mathbb{C}(V)$ y esta extensión tiene grado n.

Así pues, sólo nos falta probar la existencia de los polinomios p_i. Observemos en primer lugar que, para cada $w \in V_v$, la función $g_i(w)$ se calcula haciendo actuar un polinomio simétrico sobre las imágenes por a de las r antiimágenes de w en M_1, lo cual no depende de v, por lo que las funciones g_i están definidas realmente sobre todo V y son holomorfas en un entorno de cada punto, luego $g_i \in \mathcal{H}(V)$.

Sea $S = A^m \setminus V$, que es un conjunto algebraico afín, y tomemos $s \in S$. Sea $F \in \mathbb{C}[A^m][T]$ el polinomio mínimo de a. Para cada $v \in V$, tenemos que cada $a(\phi_i^{-1}(v))$ es raíz de $F(v)(T)$. Los coeficientes de $F(T)$ son polinomios en A^m, luego están acotados en un entorno compacto C de s, luego $\phi_i^{-1} \circ a$ está acotado[1] en $C \cap V$, luego g_i también lo está. El teorema 4.14 implica entonces que g_i se extiende a una función holomorfa $p_i \in \mathcal{H}(A^n)$. Sólo nos falta probar que p_i es un polinomio. Para ello usaremos el teorema 4.15.

Tomemos $z \in V$ y sea $|z| = \text{máx}\,|z_i|$. Tomemos un punto $x \in M_1$ tal que $\phi(x) = z$. Aplicando de nuevo la consecuencia del teorema de Rouché citada en la nota al pie, tenemos que $|a(x)| \leq 1 + \text{máx}\,|b_i(z)|$, donde $b_i \in \mathbb{C}[A^m]$ son los coeficientes de F. Los b_i son polinomios en m variables. Si N es el máximo de sus grados, para cada $\epsilon > 0$ existe una constante C_ϵ tal que $|a(x)| < C_\epsilon|z|^k$, para $|z| > \epsilon$. Puesto que $g_i(z)$ depende polinómicamente de los $a(x)$, donde x recorre las antiimágenes de z, tenemos una desigualdad similar $|g_i(z)| \leq C'_\epsilon|z|^{ik}$. En principio, esto vale para $z \in V$, pero como V es denso en A^m se cumple para todo $z \in A^m$ (tal que $|z| > \epsilon$). De acuerdo con 4.15, esto implica que g_i es un polinomio.

A falta de probar 4.14 y 4.15, llegamos al teorema que perseguíamos:

Teorema 4.13 *Toda variedad algebraica es conexa con respecto a la topología compleja.*

Veamos ahora los resultados pendientes:

[1] En general, si M es una cota del módulo de los coeficientes de un polinomio mónico, el módulo de sus raíces está acotado por $1 + M$. Véanse las observaciones tras el teorema de Rouché [VC 3.24].

Teorema 4.14 *Sea $S \subsetneq A^m$ un conjunto algebraico afín y $g \in \mathcal{H}(A^n \setminus S)$ una función acotada en un entorno de cada punto $s \in S$. Entonces S se extiende a una función holomorfa en todo A^m.*

DEMOSTRACIÓN: Fijado $s \in S$, basta encontrar un entorno U de s tal que g se extiende a una función holomorfa en U. El principio de prolongación analítica [VC A.7] garantiza que todas las extensiones parciales son consistentes entre sí. Podemos sustituir S por un conjunto mayor, luego podemos suponer que está definido por un único polinomio $F(z_1, \ldots, z_m)$. Tras un cambio de coordenadas, podemos suponer que $s = 0$ y que la forma de mayor grado de F contiene el monomio z_m^k (igual que hemos hecho en la prueba de B.13 con la forma de menor grado de la serie de potencias). Así,

$$F(z_1, \ldots, z_m) = z_m^k + H_1(z')z_m^{k-1} + \cdots + H_k(z'),$$

donde $z' = (z_1, \ldots, z_{m-1})$. Pongamos que el polinomio $F(0, z_m) \in \mathbb{C}[z_m]$ factoriza como

$$F(0, z_m) = z_m^t(z_m - \lambda_1)\cdots(z_m - \lambda_{k-t})$$

y tomemos un $\delta > 0$ y un $r > 0$ tal que los discos de centro $0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-t}$ y radio δ no contengan ningún $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| = r$. Veamos ahora que existe un $\epsilon > 0$ tal que si $|z'| < \epsilon$ entonces las raíces de $F(z', z_m) \in \mathbb{C}[z_m]$ están en los discos indicados, luego ninguna cumple $|w| = r$.

En efecto, sea $M - 1$ una cota de $|H_i(z')|$ sobre el polidisco $|z'| \leq 1$, de modo que todo $w \in \mathbb{C}$ que cumpla $F(z', w) = 0$ para $|z'| \leq 1$ ha de cumplir $|w| \leq M$. Si tomamos ϵ tal que cuando $|z'| < \epsilon$ entonces $|H_i(0) - H_i(z')| < \epsilon^k/kM^k$ para todo i, vemos que

$$|F(0,w)| = |F(0,w) - F(z',w)| \leq |H_1(0) - H_1(w)||w|^{k-1} + \cdots + |H_k(0) - H_k(z')|$$

$$\leq \frac{\epsilon^k}{kM^k} kM^k = \epsilon^k$$

y, si w distara de $0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-t}$ más que ϵ, debería ser $|F(0, w)| > \epsilon^k$.

Así podemos definir, para $|z'| < \epsilon$, $|z_n| < r$,

$$G(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{g(z', w)}{w - z_n}\, dw.$$

En efecto, si $|z'| < \epsilon$ y $|w| = r$ tenemos que $F(z', w) \neq 0$, por lo que $(z', w) \notin S$, luego $g(z', w)$ está definido. El mismo razonamiento empleado en la prueba del teorema [VC 1.28] implica que la función G es holomorfa en el polidisco en que está definida. Sólo nos falta probar que es una prolongación analítica de g. Para ello fijamos un punto z' tal que $|z'| < \epsilon$ y observamos que $g(z', z_m)$, considerada como función de z_m, está definida en el disco $|z_m| < r$ salvo quizá en un número finito de puntos donde $F(z', z_m) = 0$. Ahora bien, por hipótesis g está acotada en un entorno de cada uno de estos puntos, luego son singularidades evitables de $g(z', z_m)$. La fórmula integral de Cauchy para

funciones de una variable nos da entonces que $G(z', z_m) = g(z', z_m)$ para todo z_m tal que $|z_m| < r$ y donde g esté definida. Así pues, G es una prolongación analítica de g. ∎

Teorema 4.15 *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ tal que existen $\epsilon > 0$ y $C > 0$ tales que, para todo $z \in \mathbb{C}^n$ con $|z| > \epsilon$, se cumple $|f(z)| < C|z|^k$. Entonces f es un polinomio de grado $\leq k$.*

Demostración: Supongamos, por reducción al absurdo, que la componente homogénea F_l de grado k de la serie de potencias de f alrededor de 0 es no nula, para un cierto $l > k$. Tomemos un punto $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $F_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. Entonces la función $g(z) = f(\alpha_1 z, \ldots, \alpha_n z)$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ que satisface una cota como la del enunciado y cuya serie de Taylor tiene no nulo el coeficiente de grado l. Si eliminamos los k primeros términos de dicha serie obtenemos una nueva función g_1 que sigue cumpliendo una acotación como la del enunciado. Más aún, como tiene un cero de orden $\geq k$, la función $g_1(z)/z^k$ está acotada en todo $\mathbb{C}$, luego ha de ser constante, pero entonces el coeficiente de Taylor de grado k de g_1 ha de ser nulo, y es el mismo que el de g, contradicción. ∎

Como primera aplicación observamos lo siguiente:

Teorema 4.16 *Una variedad cuasiproyectiva es proyectiva si y sólo si es compacta (respecto a la topología compleja).*

Demostración: Si V es una variedad cuasiproyectiva, sabemos que V es abierta en su clausura proyectiva $\overline{V}$ (respecto a la topología de Zariski, luego también respecto a la topología compleja) y por ser compacta también es cerrada. Como $\overline{V}$ es conexa, ha de ser $V = \overline{V}$. ∎

Otra consecuencia es que una variedad proyectiva está determinada por cualquiera de sus fragmentos con interior no vacío:

Teorema 4.17 *Si V, $W \subset \mathrm{P}^n$ son dos variedades proyectivas y $U \subset \mathrm{P}^n$ es un abierto (para la topología compleja) tal que $U \cap V = U \cap W \neq \varnothing$, entonces $V = W$.*

Demostración: Es claro que basta probar el resultado análogo para variedades afines V, $W \subset A^n$. Hemos de probar que $I(V) = I(W)$. Para ello, basta probar que si $F \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ se anula en $U \cap V$, entonces se anula en V, pero esto es consecuencia del principio de prolongación analítica [VC A.7]. ∎

4.3 Variedades proyectivas

En esta sección obtendremos algunos resultados que relacionan la estructura algebraica y la analítica de las variedades proyectivas regulares. Para ello necesitamos extender el concepto de función meromorfa a variedades analíticas de dimensión arbitraria, pues en [VC A.17] está definido únicamente para variedades de dimensión 1.

En esencia, una función meromorfa sobre una variedad analítica de dimensión 1 es una función holomorfa salvo en un conjunto discreto de polos. Esta definición se apoya en la clasificación de las singularidades aisladas, y no es aplicable en dimensiones superiores porque las funciones holomorfas no tienen singularidades aisladas (véase la observación tras [VC 2.8]). En su lugar, generalizaremos el concepto de función meromorfa partiendo del hecho de que, en dimensión 1, las funciones meromorfas son localmente cocientes de funciones holomorfas [VC 4.18].

Definición 4.18 Si V es una variedad analítica, llamaremos $\mathcal{H}(V)$ al conjunto de las funciones holomorfas $V \longrightarrow \mathbb{C}$, que tiene estructura de anillo con la suma y el producto definidos puntualmente. Las funciones constantes forman un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$, por lo que $\mathcal{H}(V)$ es, de hecho, una $\mathbb{C}$-álgebra. Más aún, si V es conexa entonces $\mathcal{H}(V)$ es un dominio íntegro.[2]

Por lo tanto, si U es un abierto conexo en una variedad analítica, podemos considerar el cuerpo de cocientes $\mathcal{K}(U)$ del anillo $\mathcal{H}(U)$. A sus elementos los llamaremos *fracciones holomorfas* en U. Diremos que una fracción $\alpha \in \mathcal{K}(U)$ es *holomorfa* en un punto $p \in U$ si $\alpha = \beta/\gamma$, donde β, $\gamma \in \mathcal{H}(U)$ y $\gamma(p) \neq 0$. En tal caso definimos $\bar{\alpha}(p) = \beta(p)/\gamma(p)$. Es claro que este valor no depende de la representación de α como fracción.

También es obvio que el conjunto de puntos donde α es holomorfa es un abierto $U_0 \subset U$ (denso, por el principio de prolongación analítica), así como que $\bar{\alpha}$ es realmente una función holomorfa en U_0. Más aún, si α, $\alpha' \in \mathcal{K}(U)$ cumplen que $\bar{\alpha}$ y $\bar{\alpha}'$ coinciden en un abierto de U, entonces $\alpha = \alpha'$. En efecto, sea p un punto donde ambas funciones coinciden, y sean $\alpha = \beta/\gamma$, $\alpha' = \beta'/\gamma'$, de modo que $\gamma(p) \neq 0 \neq \gamma'(p)$. Entonces las funciones β/γ y β'/γ' están definidas en un entorno de p y son iguales, luego $\beta\gamma' - \gamma\beta' \in \mathcal{H}(U)$ se anula en un entorno de p, luego $\beta\gamma' - \gamma\beta' = 0$ en $\mathcal{H}(U)$, luego $\alpha = \alpha'$.

En particular, cada $\alpha \in \mathcal{K}(U)$ está completamente determinada por $\bar{\alpha}$, por lo que en lo sucesivo identificaremos la fracción α con la función holomorfa que define y omitiremos la barra.

Observemos también que si $U \subset U'$ son abiertos conexos en una variedad analítica, podemos definir un monomorfismo de cuerpos $\mathcal{K}(U') \longrightarrow \mathcal{K}(U)$ mediante $\alpha = \beta/\gamma \mapsto \alpha|_U = \beta|_U/\gamma|_U$. Es evidente que no depende de la representación de α como fracción, así como que el dominio de $\alpha|_U$ es la intersección con U del dominio de α y que, considerada como función holomorfa sobre este dominio, es la restricción de α considerada como función holomorfa.

Si V es una variedad analítica, una *función meromorfa* en V es una función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida sobre un abierto denso de V tal que todo punto de V tiene un entorno abierto conexo W tal que $f|_{U\cap W} \in \mathcal{K}(W)$.

[2]Recordemos el argumento: si f, $g \in \mathcal{H}(V)$ son no nulas, el principio de prolongación analítica [VC A.7] implica que el conjunto de puntos donde se anula una de ellas es cerrado de interior vacío, luego la unión de ambos también tiene interior vacío (equivalentemente, la intersección de dos abiertos densos es densa), luego $fg \neq 0$.

Es claro que las funciones meromorfas son holomorfas en su dominio. Notemos que esta definición tiene implícito que f no puede extenderse a una función meromorfa en un abierto mayor contenido en V. En efecto, si $p \in V \setminus U$ y W es un entorno conexo de p según la definición, tenemos que $f|_{U\cap W} \in \mathcal{K}(W)$. Si f admitiera una extensión $\bar{f}$ a un abierto que contuviera a p, restringiendo W podríamos suponer que $\bar{f}$ está definida en W, pero, por definición de $\mathcal{K}(W)$ (o, más precisamente, por la identificación de los elementos de $\mathcal{K}(W)$ con las funciones holomorfas que definen), entonces $f|_{U\cap W}$ tendría que estar definida en p, contradicción.

Llamaremos $\mathcal{M}(V)$ al conjunto de todas las funciones meromorfas en V.

El conjunto $\mathcal{M}(V)$ tiene estructura de anillo con las operaciones definidas como sigue: dadas dos funciones meromorfas $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : U' \longrightarrow \mathbb{C}$, cubrimos V con abiertos conexos W_i tales que $f|_{U\cap W_i}$, $g|_{U'\cap W_i} \in \mathcal{K}(W_i)$ y consideramos las funciones $f|_{U\cap W_i} + g|_{U'\cap W_i} \in \mathcal{K}(W_i)$. Llamamos U'' a la unión de sus dominios y definimos $f + g : U'' \longrightarrow \mathbb{C}$ como la función que extiende a todas las sumas. El producto se define análogamente.

Si V es una variedad analítica conexa, entonces $\mathcal{M}(V)$ es un cuerpo, pues si $f \in \mathcal{M}(V)$ no es nula, podemos cubrir V con abiertos conexos W_i tales que $f|_{W_i} \in \mathcal{K}(W_i)$, y ha de ser $f|_{W_i} \neq 0$, pues en caso contrario f sería una función holomorfa que se anularía en un abierto, luego sería nula. Por consiguiente, podemos considerar las fracciones holomorfas $f|_{W_i}^{-1} \in \mathcal{K}(W_i)$, que claramente definen una función meromorfa f^{-1} con la propiedad de que $ff^{-1} = 1$.

Veamos que la definición de función meromorfa que acabamos de dar generaliza a [VC A.17]:

Teorema 4.19 *Si X es una superficie de Riemann, podemos identificar las funciones meromorfas en X con las funciones holomorfas $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ distintas de la función constante ∞.*

Demostración: Sea $f \in \mathcal{M}(X)$ y $x \in X$. Entonces f se expresa en un entorno U de x (que podemos tomar difeomorfo a un abierto de $\mathbb{C}$) como cociente de dos funciones holomorfas en U. Ahora bien, los cocientes de funciones holomorfas en un abierto de $\mathbb{C}$ definen funciones meromorfas en el sentido usual de la teoría de funciones de (una) variable compleja, esto es, funciones holomorfas en U salvo en un número finito de puntos, donde tienen polos. Recordemos ahora que una función meromorfa $U' \longrightarrow \mathbb{C}$, donde U' es un abierto de $\mathbb{C}$, se extiende[3] a una función holomorfa $U' \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$. Lo mismo vale, obviamente, para $f|_U$ y, por consiguiente, para f.

Recíprocamente, si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función holomorfa distinta de la constante ∞, entonces ∞ tiene un número finito de antiimágenes. Si U es un

[3]Si $z_0 \in U$ es un polo de $f = g/h$, donde g y h son holomorfas en U', el orden de g en z_0 es menor que el de h, por lo que, dividiendo ambas fracciones entre una potencia de $z - z_0$, podemos suponer que $g(z_0) \neq 0$. Entonces, definiendo $f(z_0) = \infty$ y tomando $1/z$ como carta de $\mathbb{C}^\infty$ alrededor de ∞, la lectura de f en dicha carta es h/g, que es holomorfa en un entorno de z_0.

abierto de X difeomorfo a un abierto en $\mathbb{C}$, entonces $f|_U$ se corresponde con una función meromorfa en el sentido de la teoría de funciones de una variable compleja (es holomorfa salvo en un número finito de singularidades donde tiene límite ∞, luego son polos), luego $f|_U$ se corresponde con un cociente de funciones holomorfas y, por consiguiente, $f|_U$ es a su vez un cociente de funciones holomorfas en U. Esto prueba que f es meromorfa en el sentido de 4.18. ∎

En el caso en que V es una variedad cuasiproyectiva regular, tenemos que las funciones racionales son meromorfas, es decir, que $\mathbb{C}(V) \subset \mathcal{M}(V)$. En efecto, si $P \in V$, llamamos V_0 a la intersección de V con un espacio afín que contenga a P, de modo que V_0 es un entorno de P y cada $\alpha \in \mathbb{C}(V)$ se calcula (en los puntos de V_0 donde está definida) como cociente de dos funciones de $\mathbb{C}[V_0] \subset \mathcal{H}(V_0)$. Así pues, $\alpha|_{V_0} \in \mathcal{K}(V_0)$, luego $\alpha \in \mathcal{M}(V)$. A priori podría ocurrir que una función de $\mathbb{C}(V)$ estuviera definida en un punto como función meromorfa pero no como función racional. Vamos a ver que de hecho no es así:

Teorema 4.20 *Si V es una variedad cuasiproyectiva regular y $f \in \mathbb{C}(V)$ es holomorfa en un punto P, entonces f es regular en P.*

Demostración: Tenemos las inclusiones

$$\mathcal{O}_P(V) \subset \mathcal{H}_P(V) \subset \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]].$$

Pongamos que $f = u/v$, donde u, $v \in \mathcal{O}_P(V)$. Que f sea holomorfa en P significa que $v \mid u$ en $\mathcal{H}_P(V)$, luego también en $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$. Ahora bien, en el teorema 3.39 hemos demostrado que $\mathcal{O}_P(V)$ y $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$ cumplen las hipótesis del teorema 3.38, y en la prueba de éste hemos visto que si $v \mid u$ en $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$, también $v \mid u$ en $\mathcal{O}_P(V)$, luego $f \in \mathcal{O}_P(V)$. ∎

Vamos a probar que en el caso de las variedades proyectivas se da la igualdad $\mathbb{C}(V) = \mathcal{M}(V)$, es decir, que las funciones meromorfas coinciden con las funciones racionales. Para ello necesitamos un resultado analítico general que a su vez requiere algunos resultados previos.

Si V es una variedad analítica y $a \in V$, representaremos por $\mathcal{G}_a(V)$ al anillo de los gérmenes de funciones holomorfas en a, es decir, el conjunto formado por las clases de equivalencia de funciones holomorfas en un entorno de a, donde dos funciones están relacionadas si coinciden en un entorno de a. La estructura de anillo es la definida de forma natural.

Como a tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{C}^n$, es inmediato que $\mathcal{G}_a(V)$ es isomorfo a $\mathcal{G}_a(\mathbb{C}^n)$, que por [AA 1.25] es a su vez isomorfo a $\mathbb{C}\{Z_1, \dots, Z_n\}$, luego por B.17 (véase la observación posterior) es un dominio de factorización única.

Teorema 4.21 *Si f y g son funciones holomorfas en un punto $a \in \mathbb{C}^n$ primas entre sí como elementos de $\mathcal{G}_a(\mathbb{C}^n)$, entonces existe un entorno U de a en el que ambas son holomorfas y primas entre sí como elementos de $\mathcal{G}_b(\mathbb{C}^n)$, para todo $b \in U$.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que podemos suponer $a = 0$. En efecto, la aplicación $\phi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ dada por $\phi(z) = z + a$ es biholomorfa e induce isomorfismos $\mathcal{G}_b(\mathbb{C}^n) \cong \mathcal{G}_{b+a}(\mathbb{C}^n)$. Así, $\phi \circ f$ y $\phi \circ g$ son primas entre sí en $\mathcal{G}_0(\mathbb{C}^n)$ y, si el teorema se cumple para ellas, entonces son primas entre sí en todos los anillos $\mathcal{G}_b(\mathbb{C}^n)$, donde b recorre un entorno de 0, luego f y g son primas entre sí en todos los anillos $\mathcal{G}_{a+b}(\mathbb{C}^n)$, es decir, en los anillos $\mathcal{G}_b(\mathbb{C}^n)$, donde ahora b recorre un entorno de a.

Supongamos, pues, que $a = 0$. El resultado es trivial si alguna de las funciones es una unidad en $\mathcal{G}_0(\mathbb{C}^n)$, pues entonces lo es también en $\mathcal{G}_b(\mathbb{C}^n)$, para todo b en un entorno de 0. Supongamos que no son unidades.

La prueba del teorema B.13 muestra que es posible encontrar una misma transformación lineal $\phi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ que haga que las funciones $f' = \phi \circ f$ y $g' = \phi \circ g$ tengan series de Taylor regulares en Z_n. Estas funciones siguen siendo primas entre sí en $\mathcal{G}_0(\mathbb{C}^n)$ y, si existe un entorno U que cumple el teorema para ellas, es claro que $\phi[U]$ es un entorno de 0 que cumple el teorema para f y g, ya que para cada $u \in U$ tenemos que f' y g' son primas entre sí en $\mathcal{G}_u(\mathbb{C}^n)$, luego f y g son primas entre sí en $\mathcal{G}_{\phi(u)}(\mathbb{C}^n)$.

Por consiguiente, podemos suponer que las series de Taylor de f y g en 0 son regulares en Z_n, con lo que el teorema B.16 nos da que, salvo unidades, dichas series son polinomios mónicos en Z_n con coeficientes en $\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}$. Puesto que las unidades lo son también en todos los puntos de un entorno de 0, podemos eliminarlas.

Sea d el máximo común divisor de f y g en $\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}[Z_n]$, un polinomio que podemos tomar mónico y que será una unidad en $\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_n\}$. Entonces d es también el máximo común divisor de f y g en el anillo de polinomios sobre el cuerpo de cocientes de $\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}$, donde podemos aplicar la relación de Bezout. Después de quitar denominadores, se convierte en una relación de la forma

$$uf + vg = dr,$$

donde u, v son funciones holomorfas en un entorno de 0 con series de Taylor en $\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}[Z_n]$ y r es una función holomorfa no nula cuya serie de Taylor pertenece a $\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}$. Sea U un entorno de 0 donde estén definidas todas estas funciones y donde d siga siendo una unidad.

Si $b \in U$, podemos considerar las cinco funciones como elementos de $\mathcal{G}_b(\mathbb{C}^n)$, que se identifican con series de $\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ componiéndolas primero con la traslación $z + b$. Esta composición hace que las series de Taylor sean otras, pero sigue siendo cierto que las series de u, v, f, g, d son polinomios (mónicos en el caso de f, g y d) de $\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}[Z_n]$ y la de r está en $\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}$. Si ahora identificamos las funciones con estas nuevas series alrededor de b, siguen cumpliendo la relación $uf + vg = dr$.

Supongamos que f y g tienen un divisor común (no unitario) c en $\mathcal{G}_b(\mathbb{C}^n)$, que será también un divisor de r. Notemos que todo primo $p \in \mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}$ es también primo en el anillo $\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_n\} \cong \mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}\{Z_n\}$, ya que

$$\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_n\}/(p) \cong (\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}/(p))\{Z_n\}$$

es un dominio íntegro. Por consiguiente, eliminando una unidad, podemos suponer que $c \in \mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_{n-1}\}$. Más aún, c no puede ser una unidad de este anillo. Esto hace que un múltiplo de c no pueda tener un monomio Z_n^m, pero f lo tiene, lo que nos da una contradicción. ∎

Teorema 4.22 *Sea f una función holomorfa en (un entorno de) el polidisco cerrado $|z_i| \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$ y sea M el máximo de f en dicho polidisco. Supongamos que f y todas sus derivadas de orden menor que h se anulan en 0. Entonces, para todo z en el polidisco abierto, se cumple que $|f(z)| \leq M \operatorname{máx}_i |z_i|^h$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $z \in \mathbb{C}^n$ llamaremos $|z| = \operatorname{máx}_i |z_i|$. Fijemos un z tal que $0 < |z| < 1$ y para cada $t \in \mathbb{C}$ definamos $g(t) = f(tz)$, que es una función holomorfa en un entorno del disco $|t| \leq |z|^{-1}$.

La hipótesis sobre las derivadas de f implica que su serie de Taylor no tiene términos de grado menor que h, luego a la serie de Taylor de g le sucede lo mismo, es decir, la función $g(t)/t^h$ es holomorfa en un entorno del disco cerrado. Por el principio del módulo máximo, $|g(t)/t^h|$ es menor o igual que el valor que toma esta función en la frontera del disco, que a su vez es menor o igual que $M/|z|^{-h}$, es decir, tenemos que $|g(t)/t^h| \leq M|z|^h$. Haciendo $t = 1$ queda $f(z) \leq M|z|^h$, como había que probar. ∎

Otro hecho elemental que necesitaremos a continuación es el siguiente: el número de monomios de grado $\leq m$ en n indeterminadas es

$$M_n^m = \binom{m+n}{n}.$$

En efecto, podemos dividir tales monomios en dos grupos: los que contienen alguna indeterminada X_n, que son M_n^{m-1}, y los que no contienen ninguna, que son M_{n-1}^m, luego $M_n^m = M_n^{m-1} + M_{n-1}^m$. Basta razonar por inducción sobre $m + n$.

Ahora ya podemos probar:

Teorema 4.23 *Si V es una variedad analítica compacta, entonces el grado de trascendencia de $\mathcal{M}(V)$ sobre $\mathbb{C}$ es menor o igual que $\dim V$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $n = \dim V$ y tomemos funciones $f_1, \ldots, f_{n+1} \in \mathcal{M}(V)$. Hemos de probar que existe un polinomio no nulo $F \in \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_{n+1}]$ tal que $F(f_1, \ldots, f_{n+1}) = 0$.

Para cada punto $x \in V$ vamos a elegir tres entornos $x \in W_x \subset V_x \subset U_x$. En primer lugar elegimos U_x tal que $f_i = P_{i,x}/Q_{i,x}$, donde $P_{i,x}$, $Q_{i,x} \in \mathcal{H}(U_x)$ son funciones primas entre sí en todos los puntos de U_x. La existencia de U_x nos la da el teorema 4.21. Tomamos V_x tal que su clausura esté contenida en U_x y que sea el dominio de una carta con imagen en el polidisco $|z_i| < 1$. El tercer entorno W_x es la antiimagen del polidisco $|z_i| < 1/2$.

Consideremos dos puntos $x,\ y \in V$ tales que $U_x \cap U_y \neq \varnothing$. En dicha intersección tenemos que

$$\frac{P_{i,x}}{Q_{i,x}} = \frac{P_{i,y}}{Q_{i,y}},$$

y ambas fracciones son primas entre sí en cada punto de $U_x \cap U_y$, por lo que $Q_{i,x}/Q_{i,y}$ ha de ser una unidad en cada punto, es decir, $Q_{i,x} = Q_{i,y}\phi_{i,x,y}$, para una cierta función holomorfa $\phi_{i,x,y} \in \mathcal{H}(U_x \cap U_y)$ que no se anula en ningún punto.

Podemos tomar un número finito de puntos $\xi_1, \ldots, \xi_r \in V$ tales que los abiertos W_{ξ_j} cubran V. Definimos

$$\phi_{j,k} = \prod_{i=1}^{n+1} \phi_{i,\xi_j,\xi_k}, \qquad C = \max_{j,k} \max_{V_{\xi_j} \cap V_{\xi_k}} |\phi_{j,k}|.$$

Notemos que $C \geq 1$, pues $\phi_{j,k}\phi_{k,j} = 1$.

Consideremos un polinomio arbitrario $F(T_1, \ldots, T_{n+1})$ de grado m y pongamos que

$$F(f_1, \ldots, f_{n+1}) = \frac{R_x}{Q_x^m} \qquad \text{en } V_x, \tag{4.1}$$

donde

$$Q_x = \prod_{i=1}^{n+1} Q_{i,x}.$$

Observemos que $R_{\xi_j} = \phi_{j,k}^m R_{\xi_k}$ en $V_{\xi_j} \cap V_{\xi_k}$. Vamos a probar que, para cada $h > 0$, podemos encontrar un polinomio no nulo F para el cual las funciones R_{ξ_j} tengan nulas todas las derivadas de orden menor que h en ξ_j.

Observemos que la aplicación que a cada polinomio F le asigna la función R_{ξ_j} es lineal, como también lo es la que a F le asigna una derivada parcial fija de R_{ξ_j} en ξ_j. Consideremos, pues, la aplicación lineal que a cada polinomio F de grado $\leq m$ le asigna el vector formado por todas las derivadas parciales de orden $< h$ de todas las funciones R_{ξ_j} en ξ_j (incluyendo la derivada de orden 0, igual a $R_{\xi_j}(\xi_j)$). Si escogemos m y h de modo que

$$\binom{n+m+1}{n+1} > r\binom{n+h-1}{n}, \tag{4.2}$$

la aplicación tendrá un núcleo no trivial, pues el miembro izquierdo es la dimensión del espacio de polinomios y el miembro derecho es el número de derivadas parciales. (Notemos que el número de derivadas parciales de orden $\leq m$ de una función de n variables es el mismo que el de monomios de grado $\leq m$ en n indeterminadas). Basta tomar un polinomio F en dicho núcleo.

Así podemos aplicar el teorema anterior a las funciones R_{ξ_j}. Para ello llamamos

$$M = \max_j \max_{x \in V_{\xi_j}} |R_{\xi_j}(x)|,$$

con lo que, para todo $x \in W_{\xi_j}$, se cumple que

$$|R_{\xi_j}(x)| \leq \frac{M}{2^h}.$$

El máximo M se alcanzará en un punto $x_0 \in V_{\xi_j}$. Entonces $x_0 \in W_{\xi_k}$, para cierto k, luego

$$M = |R_{\xi_j}(x_0)| = |R_{\xi_k}(x_0)||\phi_{k,j}(x_0)|^m \leq \frac{M}{2^h}\, C^m.$$

Vamos a ver que podemos elegir h y m de modo que $C^m/2^h < 1$, lo que obliga a que $M = 0$, lo que a su vez implica que cada R_{ξ_j} es nula en V_{ξ_j} y, como estos abiertos cubren V, concluimos que $F(f_1, \ldots, f_{n+1})$ por (4.1).

Pongamos $C = 2^\lambda$, donde $\lambda \geq 0$, porque $C \geq 1$. Lo que queremos es que $\lambda m \leq h$. Ahora bien, el miembro izquierdo de (4.2) es un polinomio de grado $n+1$ en m, digamos $P(m)$, mientras que el miembro derecho es un polinomio de grado n en h, digamos $Q(h)$. Fijemos un natural $l > \lambda$ y hagamos $h = lm$. El polinomio $Q(lm)$ tiene también grado n en m, luego sólo hemos de tomar un m suficientemente grande para que $P(m) > Q(lm)$, lo cual siempre es posible. ∎

Veamos una primera consecuencia:

Teorema 4.24 *Si X es una variedad proyectiva regular, las funciones meromorfas en X coinciden con las funciones racionales, es decir, $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(X)$.*

Demostración: Por 4.23 sabemos que $\mathcal{M}(X)$ es algebraico sobre $\mathbb{C}(X)$. Basta probar que $\mathcal{M}(X)$ es algebraicamente cerrado sobre $\mathbb{C}(X)$. Esto es cierto para cualquier variedad algebraica regular, no necesariamente proyectiva.

En efecto, tomemos una función $f \in \mathcal{M}(X)$ algebraica sobre $\mathbb{C}(X)$. Entonces f es raíz de un polinomio irreducible

$$F(T) = T^m + a_1 T^{m-1} + \cdots + a_m \in \mathbb{C}(X)[T].$$

Todo se reduce a demostrar que $m = 1$. Sea $U \subset X$ un abierto afín en el que sean regulares todas las funciones racionales a_i y donde el discriminante $D(F) \in \mathbb{C}(X)$ no se anule. Basta probar que $f|_U \in \mathbb{C}(U)$, pues entonces $f|_U$ se extiende a una función $g \in \mathbb{C}(X)$, de modo que f y g son funciones meromorfas en X que coinciden en un abierto denso, luego son iguales. Equivalentemente, podemos sustituir X por U y suponer que $a_i \in \mathbb{C}[X]$ para todo i, así como que $D(F)$ no se anula en ningún punto de X.

Para cada punto $x \in X$, sabemos que $\mathcal{G}_x(X)$ es un dominio de factorización única, luego es íntegramente cerrado, y f se identifica con un cociente de elementos de $\mathcal{H}_x(X)$ entero sobre $\mathcal{G}_x(X)$, luego $f \in \mathcal{G}_x(X)$. Así pues, $f \in \mathcal{H}(X)$.

Sea $X' \subset X \times A^1$ el conjunto de los puntos (x, z) tales que $F(x, z) = 0$. Así X' es un conjunto algebraico afín tal que $\mathbb{C}[X'] = \mathbb{C}[X][T]/(F) \cong \mathbb{C}[X][f]$. Como F es irreducible, resulta que X' es una variedad afín.

Nos encontramos ahora en la misma situación que en la prueba de 4.12, por lo que podemos concluir como allí que X' es una variedad regular y que la restricción de la proyección $p : X' \longrightarrow X$ es una aplicación finita no ramificada de grado m. Por otra parte, podemos definir una aplicación regular $\phi : X \longrightarrow X'$ mediante $\phi(x) = (x, f(x))$, que cumple $\phi \circ p = 1$.

Ahora ya podemos llegar a una contradicción si suponemos que $m > 1$. Concretamente, vamos a probar que $\phi[X]$ y $X' \setminus \phi[X]$ son abiertos disjuntos no vacíos, lo que implica que X' no es conexo, en contra de lo que nos asegura el teorema 4.13.

En efecto, si $x \in X$, tras la prueba de 4.12 hemos visto que x tiene un entorno U para la topología compleja, que podemos tomar conexo, tal que $p^{-1}[U]$ se descompone en unión de m abiertos disjuntos U_i homeomorfos con U a través de p. Claramente, $\phi[U]$, al ser conexo, ha de estar contenido en uno de los U_i, luego ha de ser $\phi[U] = U_i$, para un cierto índice i. Por consiguiente U_i es un entorno de $\phi(x)$ en $\phi[X]$, mientras que los demás U_j son entornos de las otras antiimágenes de x por p en $X' \setminus \phi[X]$. Esto prueba que ambos conjuntos son abiertos y, desde luego, no vacíos. ∎

Más en general:

Teorema 4.25 *Toda aplicación holomorfa $f : X \longrightarrow Y$ entre dos variedades proyectivas regulares es regular.*

Demostración: Tomemos un punto $x \in X$ y sea $y = f(x)$. Vamos a probar que f es regular en x. Pongamos que $Y \subset \mathrm{P}^n$ y elijamos un hiperplano infinito en P^n de modo que $y \in A^n$. Sean $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}[Y] \subset \mathcal{M}(Y)$ las funciones coordenadas de A^n. Es claro que $f \circ z_i \in \mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(X)$ y, como cada $f \circ z_i$ es holomorfa en x, el teorema 4.20 implica que también es regular en x. Sea U un entorno afín de x tal que $f \circ z_i \in \mathbb{C}[U]$, para todo i. Esto implica que $U \subset f^{-1}[Y \cap A^n]$. Es claro que estas aplicaciones definen una aplicación regular $U \longrightarrow A^n$, que no es sino $f|_U$. Por consiguiente, f es regular en x. ∎

En particular:

Teorema 4.26 *Dos variedades proyectivas regulares son isomorfas si y sólo si son biholomorfas.*

El resultado más importante que relaciona las variedades analíticas y las algebraicas es el siguiente:

Teorema 4.27 *Toda subvariedad analítica compacta y conexa de una variedad proyectiva regular es una variedad proyectiva regular.*

Demostración: Sea V una subvariedad analítica compacta de una variedad proyectiva regular X. Como $X \subset \mathrm{P}^n$, para cierto n, tenemos que V es también una subvariedad analítica de P^n compacta y conexa. Elijamos un sistema de referencia en P^n de modo que la coordenada homogénea x_0 no sea idénticamente nula en V, es decir, que, si tomamos $V(X_0)$ como hiperplano infinito, entonces V contiene puntos finitos.

Sea Y la clausura de V respecto a la topología de Zariski. Ciertamente, Y es un conjunto algebraico proyectivo. Vamos a ver que es una variedad, para lo cual hemos de probar que $I(Y)$ es primo, es decir, que si P y Q son polinomios homogéneos tales que PQ se anula en Y, entonces uno de los factores se anula en Y. Si P no es idénticamente nulo en Y, el conjunto de los puntos de Y donde P no se anula es un abierto no vacío para la topología de Zariski, pero V es denso en Y para esta topología, luego P no se anula en algún punto de V, y el conjunto $U \subset V$ donde P no se anula es un abierto no vacío para la topología compleja.

Pongamos que $\operatorname{grad} Q = k$, de modo que $Q/X_0^k \in \mathcal{M}(V)$ se anula en U y, como V es conexo, el principio de prolongación analítica implica que se anula en todo V. Esto significa que Q se anula en todos los puntos de V salvo a lo sumo en los que cumplen $X_0 = 0$, pero considerando entonces las funciones Q/X_i^k concluimos que también se anula en estos puntos. En definitiva, Q se anula en un conjunto denso en Y (para la topología de Zariski), luego se anula en Y.

Una función racional de Y es de la forma P/Q, donde P y Q son polinomios homogéneos del mismo grado y Q no es idénticamente nulo en Y. Si Q se anulara en un abierto de V (para la topología compleja), razonando como antes con las funciones Q/X_i^k concluiríamos que se anula en todo V. Así pues, el cociente P/Q está definido en un conjunto denso en V (para la topología compleja). Esto significa que toda función de $\mathbb{C}(Y)$ se restringe a una función de $\mathcal{M}(V)$. Razonando con P en lugar de Q concluimos que la restricción es única, por lo que podemos considerar $\mathbb{C}(Y) \subset \mathcal{M}(V)$.

Ahora bien, si $\dim V = m$ y $\dim Y = d$, tenemos ciertamente que $m \leq d$, pues el conjunto de puntos regulares de Y es abierto, luego existe un punto $v \in V$ regular en Y. Esto significa que v tiene un entorno $Y' \subset Y$ (para la topología compleja) que es una subvariedad analítica de P^n de dimensión d, y por otra parte v tiene un entorno $V' \subset V \cap Y'$ que es una subvariedad analítica de P^n de dimensión m. Entonces V' es también una subvariedad analítica de Y', lo que nos da la desigualdad entre las dimensiones.

Por otra parte, el teorema 4.23 nos da que el grado de trascendencia de $\mathcal{M}(V)$ es a lo sumo m, mientras que el de $\mathbb{C}(Y)$ es exactamente d. Así pues,

$$\dim V = \dim Y = d.$$

Sea Y_r el conjunto de los puntos regulares de Y, que es una variedad algebraica, y también una variedad analítica conexa (por el teorema 4.13). Como V es compacta, es cerrada en Y para la topología compleja, luego $V \cap Y_r$ es una subvariedad analítica cerrada en Y_r, pero una subvariedad de la misma dimensión ha de ser necesariamente abierta, luego por conexión $Y_r \subset V \subset Y$.

Finalmente, Y_r es denso en Y para la topología compleja, luego la compacidad de V implica que $Y = V$. El teorema 4.8 implica que Y es regular. ∎

4.4 El teorema de Lefschetz

Según [GD 2.36], toda variedad diferencial real es difeomorfa a una subvariedad de $\mathbb{R}^n$, para un n suficientemente grande. Sin embargo, no se cumple un teorema análogo para variedades complejas. Existen toros complejos que no son biholomorfos a ninguna subvariedad de $\mathbb{C}^n$, o incluso de P^n. En virtud del teorema 4.27, esto implica que no toda variedad analítica compacta es biholomorfa a una variedad algebraica.

No vamos a dar ejemplos de estos hechos, pero, por ejemplo, sucede que hay toros complejos T (definición [VC A.30] en los que las únicas funciones meromorfas son las constantes o, en otros términos, tales que $\mathcal{M}(T) = \mathbb{C}$. En cambio, si T es proyectivo, es decir, si es biholomorfo a una variedad proyectiva, por 4.24 tenemos que $\mathcal{M}(T)$ ha de tener grado de trascendencia sobre $\mathbb{C}$ igual $\dim T$. En general, saber que una variedad analítica compacta es proyectiva proporciona mucha información sobre ella.

El propósito de esta sección es demostrar un teorema de inmersión de Lefschetz que proporciona una condición suficiente para que un toro complejo sea proyectivo. Ello nos lleva a estudiar las llamadas funciones zeta:

Definición 4.28 Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión g y R un retículo[4] en V. Una *función zeta* en V con respecto a R es una función $F \in \mathcal{H}(V)$ no nula tal que existen funciones $L : V \times R \longrightarrow \mathbb{C}$ y $J : R \longrightarrow \mathbb{C}$ de modo que L es $\mathbb{C}$-lineal en su primera variable y, para todo $z \in V$ y todo $r \in R$, se cumple que

$$F(z + r) = F(z)e^{2\pi i(L(z,r)+J(r))}.$$

Una función zeta es *trivial* si no se anula en ningún punto.

Una definición tan técnica como ésta requiere una explicación:

En el estudio de una variedad analítica compacta X tiene interés investigar los subconjuntos de X que son localmente ceros de funciones holomorfas. Aunque no nos va a hacer falta en ningún momento, esto se precisa mediante el concepto de divisor de Cartier: Un *divisor (entero) de Cartier* D en una variedad X está determinado por una familia de pares (U_i, f_i), donde los conjuntos U_i forman un cubrimiento abierto de X y las funciones $f_i \in \mathcal{H}(U_i)$ cumplen que los cocientes $f_i/f_j \in \mathcal{H}(U_i \cap U_j)$ no se anulan en ningún punto. El *soporte* de D es el conjunto $Z \subset X$ formado por los puntos en los que se anulan las funciones f_i. Es en este sentido en el que podemos decir que los soportes de los divisores de Cartier son localmente ceros de funciones holomorfas.

En general, las funciones f_i que definen a Z no pueden "pegarse" para formar una única función $f \in \mathcal{H}(X)$, pues dicha f habría de ser constante, luego estaríamos en uno de los casos triviales $Z = \varnothing$ o bien $Z = X$. Sin embargo, si $X = V/R$ es un toro complejo, puede probarse que las funciones f_i pueden

[4] Definición [VC A.26].

manipularse adecuadamente (sin modificar el soporte Z) de modo que sus composiciones con la proyección $p : V \longrightarrow V/R$ sí pueden pegarse para formar una función zeta en V.

Observemos que si F es una función zeta en V respecto de R, el toro V/R puede cubrirse por abiertos U_i donde p tiene inversa, y que los pares $(U_i, p|_{U_i}^{-1} \circ F)$ forman un divisor de Cartier de V/R. Lo que hemos afirmado es que todo divisor de Cartier del toro puede obtenerse de este modo a partir de una función zeta.

No vamos a demostrar este hecho porque no lo vamos a necesitar, pero conviene recordar que, esencialmente, una función zeta está definiendo un "conjunto de ceros" en V/R. Por ejemplo, esto explica el interés de las funciones zeta triviales: son las asociadas al conjunto vacío.

Veamos ahora que es fácil determinar explícitamente las funciones zeta triviales.

Si F es una función zeta trivial, entonces[5] $F(z) = e^{2\pi i f(z)}$, para una función $f \in \mathcal{H}(V)$. Sean L y J según la definición de función zeta. Fijado un $r \in R$, tenemos que

$$f(z+r) - f(z) = L(z,r) + J(r) + k_r,$$

para un cierto $k_r \in \mathbb{Z}$ que es una función continua de z, luego es constante. (Recordemos que $L(z,r)$, para un r fijo, es una función lineal, luego continua.) El miembro derecho, para un r fijo, es una función lineal, luego todas las derivadas parciales de orden 2 del miembro derecho son nulas. Equivalentemente,

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\right|_z = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\right|_{z+r},$$

para todo $z \in V$ y todo $r \in R$. Por consiguiente, estas derivadas segundas inducen funciones holomorfas $V/R \longrightarrow \mathbb{C}$, luego son constantes por el principio de prolongación analítica. Concluimos que f es un polinomio de grado ≤ 2, luego podemos descomponerlo como $f(z) = q(z) + \lambda(z) + c$, donde $q(z)$ es una forma cuadrática, $\lambda(z)$ es una forma lineal y $c \in \mathbb{C}$. Con esto tenemos probada la mayor parte del teorema siguiente:

Teorema 4.29 *Si R es un retículo en V, las funciones zeta triviales en V respecto de R son las funciones de la forma $F(z) = e^{2\pi i(q(z)+\lambda(z)+c)}$, donde $q(z)$ es una forma cuadrática, $\lambda(z)$ es una forma lineal y $c \in \mathbb{C}$.*

[5]Es claro que F tiene un logaritmo holomorfo en un entorno de cada punto, y dos logaritmos holomorfos definidos en un mismo abierto conexo se diferencian en un múltiplo de $2\pi i$. Si F no tuviera un logaritmo holomorfo definido en todo V, podríamos tomar el supremo $r > 0$ de todos los radios tales que F admite un logaritmo holomorfo en la bola abierta $B(0,r) \subset V$. La frontera de dicha bola podría cubrirse por un número finito de bolas abiertas con centro en $\partial B(0,r)$ y en las que F admite un logaritmo holomorfo. Si B es una de estas bolas, $B \cap B(0,r)$ es convexo, luego conexo, luego el logaritmo en B puede tomarse de modo que extienda al definido en $B(0,r)$. Si B' es otra de las bolas y $B \cap B' \neq \varnothing$, entonces $B(0,r) \cap B \cap B'$ es un abierto convexo no vacío en el que las dos prolongaciones coinciden, luego ambas coinciden en $B \cap B'$. De este modo tenemos un logaritmo de F definido sobre un abierto que contiene a la bola cerrada de radio r, luego también a una bola abierta de radio mayor, en contradicción con la elección de r.

DEMOSTRACIÓN: Sólo falta probar que cualquier función de la forma descrita en el enunciado es realmente una función zeta. Observemos en primer lugar que $q(z) = b(z,z)$, donde $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ es una forma bilineal simétrica. Evaluando $b(z_1 + z_2, z_1 + z_2)$ vemos que

$$q(z_1 + z_2) - q(z_1) - q(z_2) = 2b(z_1, z_2),$$

por lo que la función $e^{2\pi i q(z)}$ cumple la definición de función zeta con las funciones

$$L(z,r) = 2b(z,r), \qquad J(r) = q(r).$$

Por otra parte, la función $e^{2\pi i \lambda(z)}$ cumple la definición de función zeta con $L = 0$ y $J = \lambda$. La constante e^c es trivialmente una función zeta y la función del enunciado es el producto de las tres. ∎

La construcción de funciones zeta no triviales es un problema más delicado del que nos ocuparemos más adelante.

Las funciones L y J que aparecen en la definición de las funciones zeta satisfacen ciertas relaciones. En primer lugar, si tomamos r, $s \in R$ y calculamos $F(z + r + s)/F(z)$ de las dos formas obvias, obtenemos:

$$L(z, r+s) + J(r+s) \equiv L(z,s) + L(z+s,r) + J(r) + J(s) \text{ (mód } \mathbb{Z}). \tag{4.3}$$

Haciendo $z = 0$ queda

$$J(r+s) - J(r) - J(s) \equiv L(r,s) \text{ (mód } \mathbb{Z}). \tag{4.4}$$

Como el miembro izquierdo es simétrico en r y s, deducimos a su vez que

$$L(r,s) \equiv L(s,r) \text{ (mód } \mathbb{Z}). \tag{4.5}$$

Sustituyendo (4.4) en (4.3) obtenemos

$$L(z, r+s) \equiv L(z,s) + L(z+s,r) - L(r,s) \text{ (mód } \mathbb{Z}).$$

Usando (4.5) y la linealidad de L en la primera componente resulta

$$L(z, r+s) \equiv L(z,r) + L(z,s) \text{ (mód } \mathbb{Z}).$$

Fijados r y s, la diferencia entre ambos miembros es un entero que depende linealmente de z, luego ha de ser nulo. Así pues:

$$L(z, r+s) = L(z,r) + L(z,s).$$

Esto nos permite extender L a una función $L : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ que es $\mathbb{C}$-lineal en la primera variable y $\mathbb{R}$-lineal en la segunda. Definimos ahora

$$K(r) = J(r) - \frac{1}{2} L(r,r).$$

De (4.4) se sigue que

$$K(r+s) \equiv K(r) + K(s) \text{ (mód } \mathbb{Z}).$$

Llamemos $K' : V \longrightarrow \mathbb{C}$ a la aplicación $\mathbb{R}$-lineal que coincide con K en una base de R. Entonces $K'(r) \equiv K(r)$ (mód $\mathbb{Z}$). Ahora bien, la función

$$J'(r) = J(r) + K'(r) - K(r)$$

cumple también la definición de función zeta para F, luego cambiando J por J' podemos suponer que K es $\mathbb{R}$-lineal. En definitiva, hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 4.30 *Sea F una función zeta en V respecto a un retículo R y sean L y J las funciones que cumplen la definición de función zeta. Entonces L se extiende a una función $L : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ que es $\mathbb{C}$-lineal en la primera variable y $\mathbb{R}$-lineal en la segunda, y la función J puede elegirse de modo que la función $K(r) = J(r) - \frac{1}{2}L(r,r)$ es $\mathbb{Z}$-lineal y se extiende a una función $\mathbb{R}$-lineal $K : V \longrightarrow \mathbb{C}$.*

En términos de K y L, la relación que define las funciones zeta equivale a

$$F(z+r) = F(z)\exp(2\pi i(L(z,r) + \frac{1}{2}L(r,r) + K(r))). \tag{4.6}$$

Si estamos dispuestos a modificar la función F de forma no esencial, todavía podemos decir más. Para ello definimos la equivalencia de funciones zeta. Notemos que el producto de dos funciones zeta en V respecto al mismo retículo R es también una función zeta, así como que la inversa de una función zeta trivial es también una función zeta trivial, luego las funciones zeta triviales forman un grupo.

Definición 4.31 Diremos que dos funciones zeta en V respecto a un retículo R son *equivalentes* si su cociente es una función zeta trivial.

La idea subyacente es que dos funciones zeta son equivalentes si determinan el mismo conjunto de ceros en el toro V/R. Como las funciones zeta triviales forman un grupo, es obvio que la equivalencia de funciones zeta es en efecto una relación de equivalencia. Vamos a asociar algunos invariantes a cada clase de equivalencia. En primer lugar, la aplicación $E : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$E(z,w) = L(z,w) - L(w,z) \tag{4.7}$$

es una forma $\mathbb{R}$-bilineal alternada. Por (4.5) vemos que E toma valores enteros en $R \times R$, y la bilinealidad implica entonces que toma valores reales en $V \times V$.

A su vez, la forma $S : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S(z,w) = E(iz,w)$$

es $\mathbb{R}$-bilineal simétrica.

En efecto, $S(z,w) = L(iz,w) - L(w,iz)$, $S(w,z) = L(iw,z) - L(z,iw)$. Por lo tanto,

$$S(z,w) - S(w,z) = i(E(z,w) - E(iz,iw)).$$

Como un miembro es real y el otro imaginario puro, ambos miembros son nulos y S es simétrica. Además obtenemos que $E(z,w) = E(iz,iw)$.

Finalmente definimos $H : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$H(z,w) = E(iz,w) + iE(z,w). \tag{4.8}$$

Así H es una forma *hermitiana,* es decir, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, se cumple

$$H(\lambda z, w) = \lambda H(z,w), \quad H(z,\lambda w) = \bar{\lambda} H(z,w), \quad H(z,w) = \overline{H(w,z)}.$$

En efecto:

$$\overline{H(w,z)} = E(iw,z) - iE(w,z) = -E(z,iw) + iE(z,w)$$

$$= E(iiz,iw) + iE(z,w) = E(iz,w) + i(z,w) = H(z,w).$$

Se comprueba inmediatamente que $H(iz,w) = iH(z,w)$, de donde se sigue la $\mathbb{C}$-linealidad en la primera variable, mientras que la semilinealidad en la segunda se sigue de ésta y de la tercera propiedad.

La forma E y, por consiguiente, también las formas S y H, no se alteran al pasar de una función zeta a otra equivalente.

En efecto, si dos funciones zeta F y F' cumplen la definición con funciones L y L', entonces FF' cumple la definición con $L + L'$. Si $F'(z) = e^{2\pi i(q(z)+\lambda(z)+c)}$ es una función zeta trivial, en la prueba del teorema 4.29 hemos visto que cumple la definición de función zeta con $L'(z,w) = 2b(z,w)$, donde b es la forma bilineal simétrica que cumple $q(z) = b(z,z)$. Esto hace que FF' cumple la definición de función zeta con $L + 2b$, y la simetría de b implica que la forma E para FF' es la misma que la asociada a F. ∎

Vemos también que, para una función zeta trivial, partiendo de $L = 2b$, obtenemos $E = S = H = 0$.

Diremos que una función zeta está *normalizada* si la función K toma valores reales y

$$L(z,w) = -\frac{i}{2} H(z,w). \tag{4.9}$$

El interés de esta definición radica en el teorema siguiente:

Teorema 4.32 *Toda función zeta es equivalente a una función zeta normalizada.*

Demostración: Una función zeta trivial es de la forma $e^{2\pi i(q(z)+\lambda(z)+c)}$, donde $q(z) = b(z,z)$, para una cierta forma bilineal simétrica $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$.

Al multiplicar una función zeta por esta función trivial, a la función L se le suma la forma $2b(z,r)$. Vamos a probar que

$$2b(z,w) = -L(z,w) - \frac{i}{2}\,H(z,w)$$

es simétrica, con lo que será una forma $\mathbb{C}$-bilineal (ya que es $\mathbb{C}$-lineal en la primera variable). Así, al multiplicar la función zeta correspondiente a L por la función zeta trivial definida por esta b, obtenemos una función zeta cuya función L cumple la segunda condición de la definición de normalización. En definitiva, hemos de probar que

$$\frac{i}{2}\,(H(z,w) - H(w,z)) = L(w,z) - L(z,w),$$

y ciertamente

$$\frac{i}{2}\,(H(z,w) - H(w,z)) = \frac{i}{2}\,(H(z,w) - \overline{H(z,w)}) = -E(z,w)$$

$$= E(w,z) = L(w,z) - L(z,w).$$

Por otra parte, al multiplicar por la función zeta trivial, a la función J (y, por consiguiente, a K) se le suma la forma lineal $\lambda(z)$. Hemos de probar que existe una forma lineal $\lambda(z)$ que hace que $K(z) + \lambda(z)$ tome valores reales.

Como K es $\mathbb{R}$-lineal, también lo es $\operatorname{Im} K : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Por consiguiente, si $z = (a_1 + ib_1, \ldots, a_g + ib_g)$, entonces $\operatorname{Im} K(z) = c_1a_1 + d_1b_1 + \cdots + c_ga_g + d_gb_g$, para ciertos c_i, $d_i \in \mathbb{R}$. Sea $\alpha_i = d_i + ic_i$ y $\lambda(z) = -\alpha_1 z_1 - \cdots - \alpha_g z_g$. Es claro que $\operatorname{Im} K(z) + \operatorname{Im} \lambda(z) = 0$. ∎

Para una función zeta normalizada, la relación (4.6) se expresa en la forma:

$$F(z+r) = F(z)\exp(2\pi i(-\frac{i}{2}\,H(z,r) - \frac{i}{4}\,H(r,r) + K(r))). \tag{4.10}$$

Observemos que si partimos de esta ecuación entendiendo que $L = -(i/2)H$ (y suponiendo que H es una forma hermitiana), la forma E dada por (4.7) es $E = \operatorname{Im} H$, y la forma H dada por (4.8) es la forma H dada.

Más aún, la ecuación (4.10) determina completamente la forma H. En efecto, si una función F cumple (4.10) con dos formas H y H' (y dos funciones K, K'), las exponenciales correspondientes han de coincidir, al igual que los logaritmos de sus módulos, que son

$$\pi E(iz,r) + \frac{\pi}{2}E(ir,r) = \pi E'(iz,r) + \frac{\pi}{2}E'(ir,r).$$

Equivalentemente, $E(i(2z+r),r) = E'(i(2z+r),r)$. Como esto vale para todo $z \in V$, de hecho $E(z,r) = E'(z,r)$. Como podemos tomar una $\mathbb{R}$-base de V contenida en R, esto implica que $E = E'$, luego $H = H'$. ∎

Teorema 4.33 *La forma hermitiana H asociada a una función zeta es semidefinida positiva, es decir, $H(z,z) \geq 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea F una función zeta. No perdemos generalidad si suponemos que está normalizada. Sea $f(z) = F(z)\exp(-\frac{\pi}{2}H(z,z))$. Así, para todo $r \in R$,

$$f(z+r) = F(z+r)\exp(-\frac{\pi}{2}H(z+r,z+r))$$

$$= F(z)\exp(2\pi i(-\frac{i}{4}H(z,r) + K(r) + \frac{i}{4}H(z,z) + \frac{i}{4}H(r,z)))$$

$$= f(z)\exp(2\pi i(\frac{1}{2}\operatorname{Im}H(z,r) + K(r))) = f(z)\exp(2\pi i(\frac{1}{2}E(z,r) + K(r))).$$

Como E y K toman valores reales, resulta que $|f(z+r)| = |f(z)|$. Por consiguiente, $|f|$ induce una función continua en el toro compacto V/R, luego está acotada. Si C es una cota, tenemos que

$$F(z) \leq Ce^{\frac{\pi}{2}H(z,z)}.$$

Si $H(z_0,z_0) < 0$, entonces la función $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\lambda \mapsto F(\lambda z_0)$ es entera y tiende a 0 en ∞, luego tiene que ser idénticamente nula. En particular $F(z_0) = 0$. Hemos probado que si $H(z_0,z_0) < 0$ entonces $F(z_0) = 0$. Como $H(z,z)$ ha de ser negativa en un entorno de z_0, resulta que F se anula en un abierto, luego es idénticamente nula, en contradicción con la definición de función zeta. ∎

Nos ocupamos ahora del problema de la existencia de funciones zeta para las que H es, más precisamente, definida positiva, es decir, que cumple $H(z,z) > 0$ siempre que $z \neq 0$. Notemos que esto es equivalente a que $E(iz,z) > 0$ y, por lo tanto, a que E satisfaga la definición siguiente:

Definición 4.34 Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión g y R un retículo en V. Una *forma de Riemann* en V respecto a R es una forma bilineal alternada $E : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que toma valores enteros en $R \times R$ y tal que la forma bilineal $S(z,w) = E(iz,w)$ es simétrica y definida positiva.

Diremos que una función zeta en un espacio V respecto a un retículo R es *no degenerada* si su forma H asociada es definida positiva o, equivalentemente, si su forma E asociada es una forma de Riemann.

Necesitamos un poco de álgebra lineal:

Teorema 4.35 (Frobenius) *Si $E : R \times R \longrightarrow \mathbb{Z}$ es una forma bilineal alternada definida positiva en un $\mathbb{Z}$-módulo libre R de rango finito, entonces $R = \langle e_1, v_1\rangle \perp \cdots \perp \langle e_g, v_g\rangle$, donde $E(e_j, v_j) = d_j$ es un número natural no nulo y $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_g$.*

DEMOSTRACIÓN: La notación $A \perp B$ indica suma directa ortogonal, es decir, una suma directa tal que $E(a,b) = 0$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. Notemos que la imagen de E en $\mathbb{Z}$ es un ideal no nulo. Sea $d_1 > 0$ su generador, de modo que d_1 divide a cualquier entero en la imagen de E. Pongamos que $E(e_1, v_1) = d_1$. Sea $R_1 = \langle e_1, v_1\rangle$ y sea

$$R_1^\perp = \{r \in R \mid E(e_1, r) = E(v_1, r) = 0\}.$$

Es claro que $R_1 \cap R_1^\perp = 0$. Veamos que $R = R_1 + R_1^\perp$. Para ello tomamos un $r \in R$ y consideramos los elementos de la forma $r - me_1 - nv_1$, para ciertos m, $n \in \mathbb{Z}$. Vemos que

$$E(r - me_1 - nv_1, e_1) = E(r, e_1) + nd_1.$$

Sabemos que $d_1 \mid E(r, e_1)$, luego podemos tomar n de modo que la expresión anterior sea nula. Eligiendo m de modo similar obtenemos $r - me_1 - nv_1 \in R_1^\perp$, luego $r \in R_1 + R_1^\perp$. Así pues, $R = R_1 \perp R_1^\perp$, y la restricción de E a $R_1^\perp \times R_1^\perp$ satisface las hipótesis del teorema. Ahora basta razonar inductivamente sobre el rango de R. ∎

La descomposición dada por el teorema anterior se llama una *descomposición de Frobenius* de R respecto de E, y una base $e_1, v_1, \ldots, e_g, v_g$ en las condiciones del teorema anterior se llama una *base de Frobenius* de R respecto de E.

En las condiciones de la definición 4.34, una base de R como $\mathbb{Z}$-módulo es también una base de V como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Si M y M' son las matrices de la forma E respecto a dos de estas bases, entonces $M' = AMA^t$, donde A es la matriz de cambio de base, que tiene determinante ± 1, por lo que $\det M = \det M'$. A este determinante lo llamaremos *determinante* de E, y lo representaremos por $\det E$. En particular, si calculamos el determinante de E mediante una base de Frobenius de R, vemos que $\det E = d_1^2 \cdots d_g^2$. Así pues, $\det E$ es un cuadrado perfecto.

Notemos también que si $e_1, v_1, \ldots, e_g, v_g$ es una base de Frobenius de R, entonces $e_1, \ldots, e_g$ es una $\mathbb{C}$-base de V. En efecto, basta ver que son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$. Si $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_g e_g = 0$, para ciertos $\lambda_i = a_i + ib_i \in \mathbb{C}$, tomamos $z = a_1 e_1 + \cdots a_g e_g$, $w = b_1 e_1 + \cdots + b_g e_g$, de modo que $z + iw = 0$. Entonces,

$$S(w, w) = E(iw, w) = E(-z, w) = 0,$$

pues $E(e_i, e_j) = 0$ para todo i, j. Como S es definida positiva, ha de ser $w = 0$, luego también $z = 0$, de donde concluimos que todos los λ_i son nulos. ∎

Finalmente estamos en condiciones de probar la existencia de funciones zeta no triviales:

Partamos de dos funciones $L : V \times R \longrightarrow \mathbb{C}$ y $K : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que L sea $\mathbb{C}$-lineal en la primera variable y $\mathbb{R}$-lineal en la segunda, mientras que K es $\mathbb{R}$-lineal. Supongamos que la función E dada por (4.7) es una forma de Riemann en V respecto a R. Llamaremos $\Theta_R(L, K)$ al conjunto formado por la función nula en V más todas las funciones zeta en V respecto a R que cumplen (4.6) con estas L y K. Es claro que se trata de un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Teorema 4.36 *En las condiciones anteriores:* $\dim \Theta_R(L,K) = \sqrt{\det E}$.

DEMOSTRACIÓN: Fijamos una base de Frobenius de R respecto de E y sea $W = \langle e_1,\dots,e_g\rangle_{\mathbb{R}}$. Como E es nula sobre W, vemos que L es simétrica en W. Como $e_1,\dots,e_g$ es una $\mathbb{C}$-base de V, podemos tomar una forma bilineal simétrica $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ que coincida con L sobre W. Tomemos también la forma lineal $\lambda : V \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\lambda(e_i) = K(e_i)$.

Si G es la función zeta trivial determinada por $-B$ y por $-\lambda$, tenemos que la multiplicación por G determina un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\Theta_R(L,K) \longrightarrow \Theta_R(L-B, K-\lambda),$$

y la función $L - B$ da lugar a la misma forma E. Así pues, no perdemos generalidad si suponemos que L es nula en $W \times W$ y que K es nula en W.

Como L es $\mathbb{C}$-lineal en su primera componente y $e_1,\dots,e_g$ es una $\mathbb{C}$-base de V, vemos que $L(z,e_j) = 0$ para todo $z \in V$. Así pues, (4.6) implica que toda $F \in \Theta_R(L,K)$ cumple $F(z+e_j) = F(z)$.

Por otra parte, si $d_j = E(e_j,v_j)$ y $c_j = \frac{1}{2}L(v_j,v_j) + K(v_j)$, para cada $z = z_1e_1 + \cdots + z_ge_g$ tenemos que

$$L(z,v_j) = \sum_k z_k L(e_k,v_j) = \sum_k z_k(E(e_k,v_j) + L(v_j,e_k)) = z_jd_j,$$

luego

$$F(z+v_j) = F(z)\exp(2\pi i(z_jd_j + c_j)).$$

En definitiva, tenemos que $\Theta_R(L,K)$ es el espacio formado por la función nula en V y las funciones $F \in \mathcal{H}(V)$ que satisfacen las relaciones:

$$F(z+e_j) = F(z), \qquad F(z+v_j) = F(z)e^{2\pi i(z_jd_j+c_j)}, \tag{4.11}$$

donde $c_j \in \mathbb{C}$ y los $d_j = E(e_j,v_j)$. Hemos de probar que la dimensión de este espacio es $d_1\cdots d_g$.

No perdemos generalidad si suponemos que $V = \mathbb{C}^g$ y que $e_1,\dots,e_g$ es la base canónica. Así, toda función $F \in \Theta_R(L,K)$ no nula tiene periodo 1 en cada variable. Si $w \in \mathbb{C}^g$ no tiene ninguna coordenada nula y $w_i = e^{2\pi i z_i}$, entonces z_i está determinado módulo $\mathbb{Z}$, pero $f(w_1,\dots,w_g) = F(z_1,\dots,z_g)$ es independiente de la elección de los logaritmos z_i. Puesto que podemos definir logaritmos holomorfos en sendos entornos de los w_i, es claro que la función f así definida es holomorfa y, para cada $z \in \mathbb{C}^g$, se cumple que

$$F(z) = f(e^{2\pi i z_1},\dots,e^{2\pi i z_g}).$$

El teorema [VC 2.25] nos da un desarrollo en serie de Laurent alrededor de 0 para la función f convergente en todo $\mathbb{C}^n$ menos donde alguna variable se anula. Equivalentemente, tenemos un desarrollo de F en serie de Fourier:

$$F(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} a_m e^{2\pi i\, mz},$$

donde $mz = m_1z_1 + \cdots + m_gz_g$. En estos términos, la segunda condición de (4.11) se traduce en que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^g} a_m e^{2\pi i m v_j} e^{2\pi i\, mz} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} a_m e^{2\pi i c_j} e^{2\pi i((m+d_je_j)z)}.$$

La unicidad de los desarrollos en serie de Laurent se traduce en la unicidad de los coeficientes de Fourier, por lo que concluimos que

$$a_m = a_{m-d_je_j} e^{2\pi i(c_j - mv_j)}. \tag{4.12}$$

De aquí se sigue que los coeficientes a_m están completamente determinados por los correspondientes a los multiíndices m tales que $0 \le m_j < d_j$. Sólo falta probar que cualquier elección de estos coeficientes da lugar a una serie de Fourier convergente en todo $\mathbb{C}^g$. Eso demostrará que la dimensión de $\Theta_R(L,K)$ es $d_1\cdots d_g$, como queremos probar.

Por linealidad podemos fijar un multiíndice m_0 tal que $0 \le m_{0j} < d_j$ y considerar la serie dada por los coeficientes a_m que cumplen (4.12) con $a_{m_0} = 1$ y $a_m = 0$ para todos los demás multiíndices m que cumplen $0 \le m_j < d_j$. Esto hace que $a_m \neq 0$ si y sólo si $m_j \equiv m_{0j}$ (mód d_j) para todo j. Para estos multiíndices podemos hacer $a_m = e^{2\pi i g(m)}$, de modo que (4.12) equivale a

$$g(m - d_je_j) - g(m) = mv_j - c_j. \tag{4.13}$$

En realidad no deberíamos haber escrito una igualdad, sino una congruencia módulo $\mathbb{Z}$, pero si encontramos una función $g : \mathbb{Z}^g \longrightarrow \mathbb{C}$ que cumpla (4.13) y $g(m_0) = 0$, entonces los coeficientes

$$a_m = \begin{cases} e^{2\pi i g(m)} & \text{si } m_j \equiv m_{0j} \text{ (mód } d_j) \text{ para todo } j,\\ 0 & \text{en otro caso,}\end{cases}$$

son los únicos que cumplen (4.12) con $a_{m_0} = 1$ y $a_m = 0$ para todo $m \neq m_0$ tal que $0 \le m_j < d_j$.

Notemos que la existencia de g es trivial, lo que necesitamos es determinarla de forma explícita (no recursiva) para estudiar la convergencia de la serie de Laurent definida por los coeficientes a_m.

Para ello consideramos la forma bilineal $T : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ determinada por que $T(e_i, e_j)$ es la coordenada i-ésima de v_j/d_j (en la base canónica $e_1, \ldots, e_g$). Así,

$$v_j = d_j \sum_i T(e_i, e_j) e_i$$

y, recordando que, según hemos visto, $L(z, e_j) = 0$ para todo $z \in V$, resulta que

$$\begin{aligned} L(v_j, v_k) &= d_j \sum_i T(e_i, e_j) T(e_i, e_j) L(e_i, v_k)\\ &= d_j \sum_i T(e_i, e_j) T(e_i, e_j) E(e_i, v_k) = d_j T(e_k, e_j) d_k. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Por otra parte, como $E(v_j, v_k) = 0$, resulta que $L(v_j, v_k) = L(v_k, v_j)$, y esto implica a su vez que $T(e_i, e_j) = T(e_j, e_i)$ o, lo que es lo mismo, que la forma bilineal T es simétrica.

Teniendo esto en cuenta, es fácil probar que la función

$$g(m) = -\frac{1}{2}T(m,m) - \frac{1}{2}mv_j + \sum_j \frac{m_j c_j}{d_j} + c,$$

donde $c \in \mathbb{C}$ es la constante que hace que $g(m_0) = 0$, cumple la relación (4.13). Así pues,

$$g(m) = -\frac{1}{2}\,T(m,m) - \frac{\lambda(m)}{2\pi} + c,$$

donde $\lambda : \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación lineal. Por consiguiente,

$$|e^{2\pi i g(m)}| = |e^{2\pi i c}| e^{\pi \operatorname{Im} T(m,m) + \operatorname{Im}\lambda(m)}.$$

Teniendo en cuenta que a_m puede ser nulo, para un m arbitrario tenemos la desigualdad

$$|a_m| \leq C e^{\pi \operatorname{Im} T(m,m) + \lambda'(m)},$$

donde $\lambda' : \mathbb{R}^g \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal. Veamos ahora que $\operatorname{Im} T(v,v) < 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^g$ no nulo. En efecto, consideremos $w = \sum(z_j/d_j)v_j \in V$. Usando (4.14) vemos que

$$T(z,z) = \sum_{j,k} z_j z_k T(e_j, e_k) = \sum_{j,k} \frac{z_j z_k}{d_j d_k} L(v_j, v_k) = L(w,w).$$

Descompongamos $w = x + iy$, donde x, y tienen coordenadas reales. No puede ser $y = 0$, pues en tal caso $w \in \langle e_1, \ldots, e_g\rangle_{\mathbb{R}} \cap \langle v_1, \ldots, v_g\rangle_{\mathbb{R}} = 0$. Además,

$$L(w,w) = L(x,w) + iL(y,w),$$

y $L(x,w), L(y,w) \in \mathbb{R}$, ya que $L(e_i, v_j) = E(e_i, v_j) \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente, lo que hemos de probar es que $L(y,w) < 0$, lo cual se debe a que

$$0 < E(iy, y) = E(x + iy, y) = E(w, y) = L(w,y) - L(y,w) = -L(y,w).$$

En resumen, tenemos que $|a_m| \leq Ce^{q(m)+cm}$, donde $q : \mathbb{R}^g \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática definida negativa y $c \in \mathbb{R}^g$.

Hemos de probar que la serie de Laurent con coeficientes a_m converge en todos los puntos de $\mathbb{C}^g$ de coordenadas no nulas. Esto equivale a probar que, para cada vector de signos ϵ, la serie de potencias con coeficientes $a'_m = a_{\epsilon_1 m_1, \ldots, \epsilon_g m_g}$ (para $m_i \geq 0$) converge en $\mathbb{C}^g$. Es claro que los coeficientes a'_m cumplen una cota análoga a la que hemos obtenido para los a_m (cambiando $q(m)$ por $q'(m) = q(\epsilon_1 m_1, \ldots, \epsilon_g m_g)$, que es también una forma cuadrática definida negativa). Equivalentemente, hemos de probar que la serie

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^g} a_m z_1^{m_1} \cdots z_g^{m_g}$$

converge en $\mathbb{C}^g$, sabiendo que $|a_m| \leq Ce^{q(m)+cm}$ con q definida negativa y $c \in \mathbb{R}^g$. A su vez, para esto basta probar que la serie converge absolutamente

en $z = (e^r, \dots, e^r)$, para todo $r > 0$, es decir, hemos de probar la convergencia de

$$\sum_{m\in\mathbb{N}^g} |a_m| e^{rm_1+\cdots+rm_g} \le C \sum_{m\in\mathbb{N}^g} e^{q(m)+c'm},$$

donde $c'_i = c + r$. Si $c'' = (1, \dots, 1)$, observamos que la función

$$f(x) = -\frac{(c' + c'')x}{q(x)}$$

es continua en la esfera unidad de $\mathbb{R}^g$, luego está acotada por un $M > 0$. Así, para todo x tal que $\|x\| > M$, se cumple que

$$|f(x)| = \frac{|f(x/\|x\|)|}{\|x\|} < 1.$$

Por consiguiente, para todo multiíndice $m \in \mathbb{N}^g$ salvo a lo sumo un número finito de ellos, tenemos que $q(m) + c'm < -c''m$, luego la serie está mayorada por

$$C \sum_{m\in\mathbb{N}^g} e^{-m_1-\cdots-m_g} = C\left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-m}\right)^g = \frac{C}{(1-e^{-1})^g}.$$

■

En el teorema anterior hemos partido de dos funciones L y K. Ahora bien, si partimos de una forma de Riemann E y definimos H mediante (4.8) y L mediante (4.9), entonces la forma E definida por L mediante (4.7) es la E de la que hemos partido. Por consiguiente, la construcción de funciones zeta que acabamos de realizar requiere únicamente la existencia de una forma de Riemann en V respecto de R (como función K sirve cualquiera).

En particular, la existencia de funciones zeta no degeneradas en un espacio V respecto de un retículo R es equivalente a la existencia de una forma de Riemann en V respecto de R.

Supongamos ahora que tenemos dos retículos $R \subset R' \subset V$ y unas funciones L y K tales que la forma E correspondiente a L sea una forma de Riemann respecto de R' (lo que equivale a que sea una forma de Riemann respecto de R y que tome valores enteros sobre R'). Es claro entonces que $\Theta_{R'}(L, K) \subset \Theta_R(L, K)$.

Por [Al 5.49] existe una base $v_1, \dots, v_{2g}$ de R' tal que $k_1v_1, \dots, k_{2g}v_{2g}$ sea una base de R, para ciertos $k_i \in \mathbb{Z}$. Claramente $|R' : R| = k_1 \cdots k_{2g}$. Calculando el determinante de E con estas bases es claro que $\det_R E = |R' : R|^2 \det_{R'} E$, luego el teorema anterior nos da que

$$\dim \Theta_R(L, K) = |R' : R| \dim \Theta_{R'}(L, K).$$

En particular vemos que si $R \subsetneq R'$, entonces $\Theta_{R'}(L, K) \subsetneq \Theta_R(L, K)$.

Notemos ahora que, fijados V, R, L y K de modo que la forma E asociada a L sea una forma de Riemann respecto de R, sólo puede haber un número finito de retículos R' por encima de R tales que E sea una forma de Riemann

respecto de R'. En efecto, si fijamos una base de Frobenius $e_1, v_1, \ldots, e_g, v_g$ de R respecto de E, cada $r' \in R'$ se expresa como

$$r' = a_1 e_1 + b_1 v_1 \cdots + a_g e_g + b_g v_g,$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Entonces $E(r', e_j) = -b_j d_j$ y $E(r', v_j) = a_j d_j$ son enteros, luego las coordenadas a_j, b_j de r' son números racionales de la forma $u_j/d_j, v_j/d_j$. Si llamamos $d = d_1 \cdots d_g$, vemos que $R \subset R' \subset \frac{1}{d}R$ y, como $|\frac{1}{d}R : R|$ es finito, sólo hay un número finito de retículos intermedios.

Más aún, fijado un retículo R', recordemos que si sustituimos K por otra función K' tal que $K'|_R \equiv K|_R$ (mód $\mathbb{Z}$), el espacio $\Theta_R(L, K)$ no varía, pero esto nos permite considerar distintos espacios $\Theta_{R'}(L, K')$. Vamos a ver, no obstante, que sólo hay un número finito de posibilidades. En efecto, K' está determinada por los valores que toma sobre una base de R'. Si r' es un miembro de dicha base, hemos visto antes que $dr' \in R$, luego $K'(dr') = K(dr') + u$, para un cierto $u \in \mathbb{Z}$. Equivalentemente,

$$K'(r') = \frac{K(dr')}{d} + \frac{u}{d},$$

donde sólo podemos elegir el entero u, pero si sustituimos u por su resto módulo d (para cada vector de la base) obtenemos una nueva función K'' que cumple $K''|_{R'} \equiv K'|_{R'}$ (mód $\mathbb{Z}$), luego sólo hay un número finito de funciones K' que definan espacios $\Theta_{R'}(L, K')$ distintos. En conclusión:

Teorema 4.37 *Sea V un espacio vectorial complejo, sea R un retículo en V, sea $L : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$-lineal en la primera variable y $\mathbb{R}$-lineal en la segunda, sea $K : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $\mathbb{R}$-lineal y supongamos que la forma E asociada a L sea una forma de Riemann respecto de R. Entonces existen funciones en $\Theta_R(L, K)$ que no pertenecen a ningún espacio $\Theta_{R'}(L, K')$ para ningún retículo $R \subsetneq R' \subset V$ y ninguna K' tal que $K'|_R \equiv K|_R$ (mód $\mathbb{Z}$).*

Demostración: Acabamos de probar que hay un número finito de espacios $\Theta_{R'}(L, K')$ y que todos ellos están estrictamente contenidos en $\Theta_R(L, K)$. Un espacio vectorial no puede expresarse como unión de un número finito de subespacios propios. (Por ejemplo, porque un espacio vectorial complejo es una variedad algebraica irreducible.) ∎

Necesitamos discutir ahora las traslaciones de funciones zeta:

Definición 4.38 Si F es una función zeta en un espacio V respecto a un retículo R y $a \in V$, definimos la *traslación* F_a como la función dada por $F_a(z) = F(z-a)$.

Se trata de una función zeta, pues

$$F_a(z+r) = F(z-a+r) = F(z-a) + \exp(2\pi i(L(z-a, r) + \frac{1}{2}L(r, r) + K(r)))$$

$$= F_a(z)\exp(2\pi i(L(z, r) + \frac{1}{2}L(r, r) - L_a(r) + K(r))),$$

donde $L_a(r) = L(a, r)$, de modo que F_a cumple la definición de función zeta con la misma función L que F y con $J'(r) = \frac{1}{2}L(r, r) - L_a(r) + K(r)$.

Si F está normalizada, la traslación F_a no lo está necesariamente, sino que cumple

$$F_a(z+r) = F_a(z)\exp(2\pi i(-\frac{i}{2}H(z,r) - \frac{i}{4}H(r,r) + K(r) + \frac{i}{2}H_a(r))).$$

Estaría normalizada si la función $(i/2)H_a$ tomara únicamente valores reales. Por consiguiente, para normalizar F_a basta multiplicarla por la función zeta trivial $\exp(2\pi i(-\frac{i}{2}H(z,a)))$. Esto suma al exponente el término $2\pi i(-\frac{i}{2}\overline{H_a(r)})$ y la nueva función K pasa a ser $K - E_a$.

Necesitamos estudiar el conjunto de los puntos $a \in V$ tales que F y F_a son equivalentes, es decir, tales que F_a/F es una función zeta trivial:

Teorema 4.39 *Sea F una función zeta no degenerada en un espacio V respecto a un retículo R. Sea E su forma de Riemann asociada. Si $a \in V$ cumple que F_a es equivalente a F, entonces $E_a(w) = E(a,w)$ toma valores enteros en R. Además, el conjunto de los $[a] \in V/R$ tales que E_a cumple esto es un subgrupo finito de orden* $\det E$.

Demostración: Supongamos que $F_a(z) = F(z)g(z)$, para una cierta función zeta trivial $g(z) = e^{2\pi i(q(z)+\lambda(z)+c)}$. Entonces

$$\frac{F_a(z+r)}{F(z+r)} = \frac{F_a(z)}{F(z)}e^{2\pi i L(-a,r)}$$

y, por otra parte, esto es igual a

$$g(z+r) = g(z)e^{2\pi i(2b(z,r)+b(r,r)+\lambda(r))},$$

donde b es la forma bilineal simétrica asociada a la forma cuadrática q. Por lo tanto:

$$e^{2\pi i L(-a,r)} = e^{2\pi i(2b(z,r)+b(r,r)+\lambda(r))}.$$

Haciendo $z = 0$ queda $e^{2\pi i L(-a,r)} = e^{2\pi i(b(r,r)+\lambda(r))}$, luego $e^{2\pi i 2b(z,r)} = 1$. Esto implica que $2b(z,r) \in \mathbb{Z}$ para todo z, lo cual es imposible salvo si $b = 0$.

Nos queda entonces que $e^{2\pi i L(-a,r)} = e^{2\pi i(\lambda(r))}$, luego

$$\lambda(r) = L(-a,r) + m(r) = L(r,-a) + E(-a,r) + m(r)$$

para una cierta función $m : R \longrightarrow \mathbb{Z}$. Despejándola en la igualdad anterior vemos que se extiende a una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $m : V \longrightarrow \mathbb{R}$. (El hecho de que sea lineal y tome valores enteros sobre R implica que la extensión toma valores en $\mathbb{R}$.) Tenemos, pues, que

$$\lambda(z) - L(z,-a) = E(-a,z) + m(z),$$

pero el miembro izquierdo es $\mathbb{C}$-lineal en z y el miembro derecho toma valores en $\mathbb{R}$. Esto sólo puede ser si ambos miembros son nulos. Por lo tanto llegamos a que $\lambda(z) = L(z,-a)$ y $E(a,z) = m(z)$. En particular E_a toma valores enteros sobre R.

Consideremos ahora una base de Frobenius $e_1, v_1, \ldots, e_g, v_g$ de R respecto de E. Dado un $a \in V$ lo expresamos como

$$a = a_1 e_1 + b_1 v_1 \cdots + a_g e_g + b_g v_g,$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Entonces $E(a, e_j) = -b_j d_j$ y $E(a, v_j) = a_j d_j$ son enteros si y sólo si las coordenadas a_j, b_j de a son números racionales de la forma $u_j/d_j, v_j/d_j$. Es claro entonces que, módulo R, hay únicamente $\det R = d_1^2 \cdots d_g^2$ puntos a posibles. ∎

Definición 4.40 Si F es una función zeta normalizada no degenerada en un espacio V respecto de un retículo R, llamaremos $\mathcal{L}(F)$ al espacio vectorial de las funciones zeta que cumplen (4.10) con las mismas H y K.

Hemos visto que (4.10) determina la forma H, y esto a su vez implica que $e^{2\pi i K(r)}$ está unívocamente determinada, por lo que cambiar K por otra función con la que F cumpla también (4.10) no altera a $\mathcal{L}(F)$. También sabemos que $\mathcal{L}(F) = \Theta_R(H, K)$ es un espacio vectorial de dimensión finita.

Finalmente estamos en condiciones de estudiar la inmersión de un toro complejo $T = V/R$ en un espacio proyectivo. Sea $p : V \longrightarrow T$ la proyección canónica y, para cada función zeta F en V respecto a R, consideremos su conjunto de ceros

$$Z_F = \{[z] \in T \mid F(z) = 0\}.$$

Ya hemos comentado que la definición de función zeta hace que la condición $F(z) = 0$ sólo dependa de la clase de z en T. Es claro que $Z_F \subsetneq T$ es cerrado, así como que $Z_{FG} = Z_F \cup Z_G$. En particular T no puede cubrirse por un número finito de conjuntos Z_F.

Supongamos que F es una función zeta no degenerada en V respecto de R y sea $F_0, \ldots, F_m$ una base del espacio $\mathcal{L}(F)$. Sea $U = T \setminus \bigcap_i Z_{F_i}$. Podemos definir una aplicación $f : U \longrightarrow \mathrm{P}^m$ mediante

$$f([z]) = (F_0(z), \ldots, F_m(z)).$$

La clave está en que si sumamos a z un elemento de R todas las funciones $F_i(z)$ se multiplican por el mismo factor no nulo, luego definen el mismo punto de P^m. Observemos que $[z] \in U$ si y sólo si existe una $G \in \mathcal{L}(F)$ tal que $G(z) \neq 0$.

Observemos que la aplicación f es holomorfa en U. En efecto, dado $[z_0] \in U$, existe un i tal que $F_i(z) \neq 0$. Pongamos, por ejemplo que $F_0(z_0) \neq 0$. Esto significa que $f([z_0]) \in A^m$, y la lectura de f en una carta de T formada por una inversa local de p y la carta de P^m formada por las coordenadas afines en A^m es

$$z \mapsto \left(\frac{F_1(z)}{F_0(z)}, \ldots, \frac{F_m(z)}{F_0(z)}\right). \tag{4.15}$$

Las funciones F_i/F_0 son holomorfas en un entorno de z_0, luego f es holomorfa en z_0. Vamos a ver que, eligiendo adecuadamente la función F de partida, podemos demostrar que f cumple las propiedades siguientes:

1. f está definida en todo T.

2. f es inyectiva.

3. Para cada $P \in T$, la diferencial $df_P : T_P T \longrightarrow T_P\,\mathrm{P}^m$ es inyectiva.

Admitiendo esto, como T es compacto resulta que f es un homeomorfismo en su imagen $T' = f[T]$, y f dota a $T' \subset \mathrm{P}^m$ de una estructura de variedad analítica biholomorfa a T. La inclusión $i : T' \longrightarrow \mathrm{P}^m$ es holomorfa, pues se descompone como $f^{-1} : T' \longrightarrow T$ (que es biholomorfa) seguida de $f : T \longrightarrow \mathrm{P}^m$, que es holomorfa, y del mismo modo concluimos que, para cada punto $P' = f(P) \in T'$, la diferencial $di_{P'} : T_{P'}T' \longrightarrow T_{P'}\,\mathrm{P}^m$ es inyectiva. En resumen, llegamos a que T' es una subvariedad de P^m y, por lo tanto, a que T es biholomorfa a una subvariedad de P^m.

Según hemos indicado, para que se cumplan las propiedades a), b) y c) es necesario elegir F adecuadamente. En realidad basta sustituir F por F^3. Observemos que si F es una función zeta no degenerada, asociada a una forma de Riemann E, entonces F^3 es también una función zeta no degenerada asociada a la forma $3E$. En lo sucesivo suponemos, pues, que $F_0, \ldots, F_m$ es una base de $\mathcal{L}(F^3)$.

Empezamos probando que $U = T$. Para ello vemos que si a, $b \in V$, entonces $F_a F_b F_{-a-b} \in \mathcal{L}(F^3)$. En efecto, si F cumple (4.6) con unas funciones L y K, entonces los tres factores cumplen la definición de función zeta con exponentes

$$L(z,r) + \frac{1}{2}L(r,r) + K(r) - L_a(r),$$

$$L(z,r) + \frac{1}{2}L(r,r) + K(r) - L_b(r),$$

$$L(z,r) + \frac{1}{2}L(r,r) + K(r) + L_{a+b}(r),$$

respectivamente, luego el producto de los tres cumple (4.6) con las funciones $3L$ y $3K$, que son las correspondientes a la función F^3. Así pues, para probar que $U = T$ basta ver que para todo $z \in V$ existen a, $b \in V$ tales que $F_a(z)F_b(z)F_{-a-b}(z) \neq 0$.

Notemos que si G es una función zeta, también lo es la función dada por $G^-(z) = G(-z)$. Teniendo esto en cuenta, basta elegir $a \in V$ que no anule a $(F^-)_z$, con lo que $F_a(z) \neq 0$, y luego elegimos otro $b \in V$ que no anule a $(F^-)_b((F^-)_{z+a})^-$, con lo que $F_b(z)F_{-a-b}(z) \neq 0$.

Veamos ahora que f es inyectiva. Para ello suponemos que z, $w \in V$ cumplen que $f([z]) = f([w])$. Entonces existe un $\gamma \in \mathbb{C}$ no nulo tal que $F_i(z) = \gamma F_i(w)$, luego de hecho $G(z) = \gamma G(w)$ para todo $G \in \mathcal{L}(F^3)$. Si $G \in \mathcal{L}(F)$ y a, $b \in V$, entonces $G_a G_b G_{-a-b} \in \mathcal{L}(F^3)$, luego

$$G(z-a)G(z-b)G(z+a+b) = \gamma G(w-a)G(w-b)G(w+a+b).$$

Razonando como en la prueba de a), para cualquier $b_0 \in V$ podemos encontrar un $a \in V$ tal que

$$G(z-a)G(z+a+b_0)G(w-a)G(z+a+b_0) \neq 0.$$

Esta desigualdad sigue cumpliéndose para todo b en un entorno de b_0. En dicho entorno, definimos

$$g_0(b) = \frac{\gamma G(w-a)G(w+a+b)}{G(z-a)G(z+a+b)},$$

de modo que g_0 es una función holomorfa en un entorno de b_0 que no se anula en ningún punto (de dicho entorno) y tal que

$$G(z-b) = G(w-b)g_0(b).$$

Esta relación implica que dos de estas funciones g_0 (para distintos b_0) han de coincidir en su dominio común, luego se extienden a una misma función $g \in \mathcal{H}(V)$ sin ceros tal que

$$G(z-b) = G(w-b)g(b)$$

para todo $b \in V$. Si llamamos $v = z - w$ y cambiamos b por $w - b$, esto equivale a

$$G(b+v) = G(b)h(b), \tag{4.16}$$

donde $h(b) = g(w-b)$ es también una función holomorfa en V sin ceros. Notemos que para cada $r \in R$ se cumple

$$h(b+r) = \frac{G(b+v+r)}{G(b+r)} = h(b)e^{2\pi i L(v,r)}, \tag{4.17}$$

luego h es una función zeta trivial. Puesto que $G_{-v} = Gh$, el teorema 4.39 nos da que E_v toma valores enteros en R. Más aún, en la prueba hemos visto que $h(b) = e^{2\pi i(\lambda(b)+c)}$, donde $\lambda(b) = L(b,v)$, así como que, fijada una base de Frobenius de R respecto de E, el vector v tiene coordenadas racionales. Si $s \in \mathbb{N}$ es un múltiplo de los denominadores de dichas coordenadas, tenemos que $R' = R + \mathbb{Z}v \subset \frac{1}{s}R$ y, como $\frac{1}{s}R$ es obviamente un retículo en V, vemos que R' también lo es.

Recordemos que $v = z - w$ y, por lo tanto, lo que queremos demostrar es que $v \in R$. Si no es así, tenemos una inclusión estricta $R \subsetneq R'$. La ecuación (4.16) es ahora

$$G(b+v) = G(b)e^{2\pi i(L(b,v)+c)},$$

lo que implica, más en general, que

$$G(b+r+kv) = G(b)e^{2\pi i(L(b,r+kv)+J(r)+kc)},$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, donde $J : R \longrightarrow \mathbb{C}$ es la función con la que G cumple la definición de función zeta. Por consiguiente, si para cada $r' \in R' \setminus R$ elegimos

una representación $r' = r + kv$, con $r \in R$ y $k \in \mathbb{Z}$, y definimos $J'(r') = J(r) + kc$ (y definimos $J'(r) = J(r)$ para $r \in R$), tenemos que G es una función zeta respecto de R' con las funciones L y J'. El teorema 4.30 nos permite modificar J' módulo $\mathbb{Z}$ de modo que la función $K'(r') = J'(r') - \frac{1}{2}L(r', r')$ se extienda a una función $\mathbb{R}$-lineal $K' : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces $K'|_R \equiv K|_R$ (mód $\mathbb{Z}$).

Así hemos probado que toda función $G \in \mathcal{L}(F) = \Theta_R(L, K)$ pertenece también a un espacio $\Theta_{R'}(L, K')$, para una cierta función K' congruente con K módulo $\mathbb{Z}$ sobre R. Esto contradice al teorema 4.37, luego ha de ser $v \in R$ y, por consiguiente, f es inyectiva.

Nos falta probar que, para cada $P \in T$, la diferencial df_P es inyectiva. Sea $P = [w]$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $F_0(w) \neq 0$. Entonces df_P se corresponde, a través de los isomorfismos determinados por las diferenciales de cartas de T y P^m, con la diferencial de su lectura en tales cartas. Si elegimos las cartas adecuadamente, dicha lectura es (4.15).

Hemos de ver que, para todo $v \in T_w V$ no nulo, se cumple $d(F_i/F_0)_w(v) \neq 0$ para algún $i = 1, \ldots, m$. Ahora bien, basta encontrar una función $G \in \mathcal{L}(F^3)$ tal que $d(G/F_0)_w(v) \neq 0$, ya que dicha G se expresará como combinación lineal de las F_i (con algún coeficiente no nulo correspondiente a un índice $i > 0$, pues de lo contrario G/F_0 sería constante y tendría diferencial nula) y $d(G/F_0)_w$ será también combinación lineal de las $d(F_i/F_0)_w$, luego una de éstas no se anulará en v.

Más en general, vamos a probar que si $H \in \mathcal{L}(F^3)$ cumple que $H(w) \neq 0$ y $v \in T_w V$ no nulo, entonces existe otra $G \in \mathcal{L}(F^3)$ tal que $d(G/H)_w(v) \neq 0$. A través de un sistema de coordenadas, podemos identificar V y $T_w V$ con $\mathbb{C}^g$. Eligiéndolo adecuadamente, podemos suponer que $v = (1, 0 \ldots, 0)$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $d(G/H)_w(v) = 0$ para toda $G \in \mathcal{L}(F^3)$. Tenemos que

$$d(G/H)_w = \frac{H(w)dG_w - G(w)dH_w}{H(w)^2},$$

luego, para todo G que cumpla además $G(w) \neq 0$, tenemos que

$$\frac{dG_w(v)}{G(w)} = \frac{dH_w(v)}{H(w)}.$$

Llamemos $\alpha \in \mathbb{C}$ a este valor independiente de G. Como $v = (1, 0, \ldots, 0)$, vemos que

$$\frac{dG_w(v)}{G(w)} = \frac{1}{G(w)} \left.\frac{\partial G}{\partial z_1}\right|_w = \alpha. \tag{4.18}$$

Tomemos a, $b \in \mathbb{C}^g$ y consideremos

$$G(z) = F(z - a)F(z - b)F(z + a + b),$$

que, como ya sabemos, cumple $G \in \mathcal{L}(F)$. Además, podemos elegir a y b tales que $G(w) \neq 0$. Más aún, si consideramos a $G(w)$ como una función holomorfa

de (a,b), es claro que existe un abierto $U \times V \subset \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g$ donde $G(w) \neq 0$. Si llamamos

$$u(z) = \frac{1}{F(z)} \frac{\partial F}{\partial z_1},$$

al calcular (4.18) obtenemos la relación

$$u(w-a) + u(w-b) + u(w+a+b) = \alpha.$$

Considerando el miembro izquierdo como función (constante) de a en U, sus derivadas parciales deben ser nulas, es decir,

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial z_j}\right|_{w-a} + \left.\frac{\partial u}{\partial z_j}\right|_{w+a+b} = 0$$

o, equivalentemente,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z_j}\right|_{w-a} = \left.\frac{\partial u}{\partial z_j}\right|_{w+a+b}.$$

Ahora bien, esto vale para todo $b \in V$, lo que significa que el miembro derecho es constante cuando $a \in U$. Equivalentemente, las derivadas de u son constantes en un cierto abierto. En dicho abierto,

$$u(z) = \frac{1}{F(z)} \frac{\partial F}{\partial z_1} = \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_g z_g + \beta,$$

para ciertos α_i, $\beta \in \mathbb{C}$. Sea

$$q(z) = \frac{1}{2}\alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_1 z_2 + \cdots + \alpha_g z_1 z_g + \beta z_1$$

y sea $F^*(z) = F(z)e^{-q(z)}$. La exponencial es una función zeta trivial, luego F^* es una función zeta no degenerada. Notemos que

$$\frac{\partial F^*}{\partial z_1} = \frac{\partial F}{\partial z_1} e^{-q(z)} - F(z)e^{-q(z)} \frac{\partial q}{\partial z_1}$$

$$= e^{-q(z)} F(z) \left(u(z) - \alpha_1 z_1 - \cdots - \alpha_g z_g - \beta\right) = 0$$

en un cierto abierto, luego en todo $\mathbb{C}^g$.

Esto quiere decir que F^* no depende de la variable z_1, pero entonces resulta que $F^*_{(\lambda,0,\ldots,0)} = F^*$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, lo que contradice al teorema 4.39.

Con esto hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 4.41 (Lefschetz) *Si $T = V/R$ es un toro complejo tal que existe una forma de Riemann en V respecto del retículo R, entonces T es biholomorfa a una subvariedad analítica de un espacio proyectivo complejo.*

Puede probarse que la existencia de la forma de Riemann no sólo es suficiente, sino también necesaria, pero no vamos a entrar en ello.

Capítulo V

Funciones algebraicas I

Según 3.52, dos curvas proyectivas regulares definidas sobre un cuerpo k_0 son isomorfas (sobre k_0) si y sólo si son birracionalmente equivalentes, lo cual, por el teorema 2.56 equivale a que sus cuerpos de funciones racionales $k_0(C)$ sean k_0-isomorfos. Esto significa que una curva proyectiva regular C está completamente determinada por el cuerpo $K = k_0(C)$. En este capítulo introduciremos técnicas algebraicas que tienen su origen en la teoría algebraica de números y que nos permitirán estudiar C a través de K. Más adelante veremos que éste es el contexto adecuado para formular y demostrar una serie de resultados profundos sobre cuerpos de funciones algebraicas, en particular sobre curvas algebraicas y superficies de Riemann.

5.1 Cuerpos de funciones algebraicas

Los cuerpos de funciones racionales de las curvas algebraicas tienen una caracterización obvia independiente de la geometría algebraica. En el contexto en el que vamos a trabajar es costumbre referirse a ellos como cuerpos de funciones algebraicas.

Definición 5.1 Un *cuerpo de funciones algebraicas* (de una variable) sobre un *cuerpo de constantes* k_0 es una extensión K finitamente generada y con grado de trascendencia 1 sobre k_0.

Esto significa que existe un $x \in K$ trascendente sobre k_0 tal que la extensión $K/k_0(x)$ es finita (puesto que es algebraica y finitamente generada).

En particular, los cuerpos de funciones algebraicas más sencillos son los de la forma $K = k_0(x)$, donde x es trascendente sobre k_0. Nos referiremos a ellos como *cuerpos de fracciones algebraicas* sobre k_0.

En estos términos podemos decir que los cuerpos de funciones algebraicas son las extensiones finitas de los cuerpos de fracciones algebraicas. Esto introduce un cierto paralelismo con los cuerpos numéricos estudiados en [Al 10.4], que son

las extensiones finitas de $\mathbb{Q}$. Notemos que $k_0(x)$ es el cuerpo de cocientes del anillo de polinomios $k_0[x]$, al igual que $\mathbb{Q}$ es el cuerpo de cocientes de $\mathbb{Z}$, y que tanto $k_0[x]$ como $\mathbb{Z}$ son dominios de ideales principales.

Observemos que toda extensión K/k de cuerpos de funciones algebraicas (sobre un mismo cuerpo de constantes k_0) es necesariamente finita. En efecto, como ambos cuerpos tienen grado de trascendencia 1 sobre k_0, es algebraica (por el teorema [Al 13.30]) y, como K es finitamente generado sobre k_0, también lo es sobre k, y una extensión algebraica finitamente generada es finita.

Si el cuerpo k_0 es perfecto, la extensión K/k_0 es separable, lo que significa que existe una base de trascendencia $x \in K$ tal que la extensión $K/k_0(x)$ es finita y separable, luego por el teorema del elemento primitivo existe un $y \in K$ tal que $K = k_0(x, y)$. Así pues, en este caso K admite un generador sobre k_0 con a lo sumo dos elementos.

La relación básica con la geometría algebraica es la siguiente:

Teorema 5.2 *Una extensión K de k_0 es un cuerpo de funciones algebraicas si y sólo si es k_0-isomorfo al cuerpo de funciones racionales de una curva proyectiva (irreducible, pero no necesariamente geométricamente irreducible) definida sobre k_0.*

Demostración: Ciertamente, si K es k_0-isomorfo a un cuerpo de funciones racionales $k_0(C)$, donde C es una curva proyectiva, entonces K es finitamente generado sobre k_0 y tiene grado de trascendencia 1. Recíprocamente, si $x \in K$ es una base de trascendencia de K sobre k_0,la extensión $K/k_0(x)$ es algebraica y finitamente generada. Digamos que $K = k_0(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Sea $\phi : k_0[X_0, \ldots, X_n] \longrightarrow K$ el homomorfismo de anillos dado por $\phi(X_0) = x$, $\phi(X_i) = \alpha_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Su imagen es un dominio íntegro, luego su núcleo I es un ideal primo, de modo que $C = V(I) \subset A^{n+1}(k_0)$ es una variedad afín. Además $k_0[C] \cong \mathrm{Im}\phi$, luego $k_0(C) \cong K$. De aquí se sigue además que $k_0[C]$ tiene grado de trascendencia 1, luego C tiene dimensión 1. Sustituyendo C por su clausura proyectiva tenemos una curva proyectiva en las mismas condiciones. ∎

Por 1.40, la curva C dada por el teorema anterior será geométricamente irreducible si y sólo si la clausura algebraica de k_0 en K es puramente inseparable sobre k_0. Esto nos lleva a la definición siguiente:

Definición 5.3 Si K es un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0, llamaremos *cuerpo de constantes exacto* de K/k_0 a la clausura algebraica de k_0 en K. Lo representaremos por k_1.

La extensión k_1/k_0 es algebraica y, por [Al 13.35], es finitamente generada, luego es finita. Claramente, K es también un cuerpo de funciones algebraicas sobre k_1 y k_1 es también el cuerpo de constantes exacto de la extensión K/k_1. Por consiguiente, en los contextos en los que podamos sustituir k_0 por k_1, no perderemos generalidad al suponer $k_1 = k_0$.

Tenemos, pues, que los cuerpos de funciones racionales de curvas proyectivas (absolutas) definidas sobre un cuerpo k_0 coinciden con los cuerpos de funciones algebraicas tales que la extensión k_1/k_0 es puramente inseparable.

Nota *Por simplicidad, a partir de este momento consideraremos únicamente curvas algebraicas y cuerpos de funciones algebraicas definidas sobre cuerpos perfectos k_0.* ∎

En estas condiciones tenemos que los cuerpos de funciones algebraicas con cuerpo de constantes exacto k_0 coinciden (salvo k_0-isomorfismo) con los cuerpos de funciones racionales de curvas proyectivas (absolutas) definidas sobre k_0. Más aún, en este caso, el teorema 3.57 nos da que la curva puede tomarse regular, y entonces es única salvo isomorfismo, pues, como hemos observado al principio del capítulo, dos curvas proyectivas regulares (definidas sobre k_0) son isomorfas si y sólo si sus cuerpos de funciones racionales son k_0-isomorfos.

Si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación regular no constante entre curvas proyectivas regulares sobre k_0, entonces ϕ es, de hecho, suprayectiva (pues por el teorema 2.49 sabemos que la imagen es cerrada, luego es todo W o bien un conjunto finito de puntos, pero en tal caso ha de ser un punto o, de lo contrario, las antiimágenes de cada punto contradirían la irreducibilidad de V).

Sabemos que ϕ induce un k_0-monomorfismo $\overline{\phi} : k_0(W) \longrightarrow k_0(V)$. Esto nos permite considerar a $k_0(V)$ como una extensión (finita) de $k_0(W)$. Recíprocamente, todo k_0-monomorfismo entre los cuerpos $k_0(W)$ y $k_0(V)$ está inducido por una aplicación regular no constante ϕ (en principio racional densa, según el teorema 2.54, pero es regular por 3.51).

En definitiva, al igual que cada curva proyectiva regular se corresponde con un cuerpo de funciones algebraicas, tenemos que cada aplicación regular no constante entre curvas proyectivas regulares se corresponde con una extensión de cuerpos de funciones algebraicas.[1]

Esto nos lleva a la definición siguiente:

Definición 5.4 Si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación regular no constante entre curvas proyectivas regulares sobre un cuerpo k_0, llamaremos *grado* de ϕ a

$$\operatorname{grad}\phi = |k_0(V) : \overline{\phi}[k_0(W)]|.$$

Igualmente, diremos que ϕ es separable, inseparable, etc. según lo sea la extensión de cuerpos $k_0(V)/\overline{\phi}[k_0(W)]$.

Conviene fijarse en un caso particular: si $\alpha \in k_0(V)$ no es constante, podemos verla como una aplicación $\alpha : V \longrightarrow \mathrm{P}^1$. Tenemos que $k_0(\mathrm{P}^1) = k_0(x)$, donde x es simplemente la identidad en P^1, luego la imagen de $k_0(\mathrm{P}^1)$ en $k_0(V)$ inducida por α es simplemente $k_0(\overline{\alpha}(x)) = k_0(\alpha)$.

[1] Más precisamente, tenemos un funtor contravariante de la categoría de las curvas proyectivas regulares sobre k_0 en la categoría de los cuerpos de funciones algebraicas con cuerpo de constantes exacto k_0 (tomando como morfismos los k_0-monomorfismos).

5.2 Divisores primos

En [Al] vimos que los cuerpos numéricos tienen una "aritmética ideal" derivada en principio de la estructura de dominio de Dedekind de sus anillos de enteros algebraicos, pero que también puede expresarse en términos de valoraciones. En el contexto de los cuerpos de funciones algebraicas la situación es similar, pero es más cómodo trabajar directamente en términos de valoraciones.

Divisores primos Si V es una curva algebraica cuasiproyectiva definida sobre un cuerpo k_0 y $P \in V(k_0)$ es un punto regular, el anillo $\mathcal{O}_P(V)$ es un dominio de ideales principales,[2] luego es un dominio de Dedekind [Al 11.6] con un único ideal primo (maximal) $\mathfrak{m}_P$, formado por las funciones que se anulan en P.

Definición 5.5 Sea V una curva cuasiproyectiva sobre un cuerpo de constantes k_0 y sea $P \in V(k_0)$ un punto regular. Definimos v_P como la valoración en $k_0(V)$ definida por el ideal $\mathfrak{m}_P$ de $\mathcal{O}_P(V)$ según [TAl 5.10].

Explícitamente, para cada función $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$ no nula tenemos que $v_P(\alpha)$ es el número natural r tal que $(\alpha) = \mathfrak{m}_P^r$. Equivalentemente $v_P(\alpha) = r$ si y sólo si $\alpha = \epsilon t^r$, donde t es un parámetro local de V en P (es decir, un generador de $\mathfrak{m}_P$, por 3.49) y ϵ es una unidad de $\mathcal{O}_P(V)$.

Es claro que $\mathcal{O}_P(V)$ es el anillo de enteros de v_P, en el sentido de [TAl 5.13].

Si $\alpha \in K$ y $v_P(\alpha) = r \geq 0$, entonces α es regular en P y se dice que tiene un *cero* de orden r en P (de modo que si α tiene un cero de orden 0 es que es regular en P pero no se anula). En cambio, si $v_P(\alpha) = -r < 0$, entonces α es singular en P y se dice que tiene un *polo* de orden r en P.

Más explícitamente, si $t \in \mathcal{O}_P(V)$ es un parámetro local, según 3.35 tenemos un monomorfismo de anillos $\tau : \mathcal{O}_P(V) \longrightarrow k[[T]]$ que a cada $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$ le asigna su serie de Taylor en P. Éste se extiende a un k_0-monomorfismo de cuerpos $\tau : k_0(V) \longrightarrow k_0((T))$ que a cada $\alpha \in k_0(V)$ le asigna un desarrollo en serie de Laurent (teorema B.10).

Si $\alpha = \epsilon t^r$ es no nulo, la serie de Taylor de ϵ es de la forma

$$\epsilon = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

donde $a_n \in k_0$ y $a_0 \neq 0$, pues $\tau(\epsilon)$ es una unidad en $k_0[[T]]$ (véase B.8), luego el desarrollo en serie de Laurent de α es de la forma

$$\alpha = \sum_{n=r}^{\infty} b_n t^n,$$

con $b_n \in k_0$, $b_r \neq 0$. Así pues, $v_P(\alpha)$ se interpreta como el menor índice correspondiente a un coeficiente no nulo del desarrollo en serie de Laurent de α. En otras palabras, v_P no es sino la restricción de la valoración natural que hemos definido en B.6 en el cuerpo $k_0((T))$.

[2] Lo hemos razonado antes del teorema 3.50.

Nota Si $k_0 = \mathbb{C}$, el concepto de orden de un cero o de un polo coincide con el usual en la teoría de funciones de variable compleja [VC A.14]. El parámetro local t es una carta alrededor de P y la lectura de $\alpha = \epsilon t^r$ en dicha carta es la función $f(z) = \epsilon(t^{-1}(z))z^r$, donde el primer factor no se anula en 0, por lo que f tiene orden r en 0. Así pues, $v_P(\alpha)$ es el orden de α en P como función meromorfa. ∎

Estos hechos nos llevan a una definición general de divisor primo en un cuerpo de funciones algebraicas:

Definición 5.6 Sea k un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0. Llamaremos *divisores primos* de k a las valoraciones en k que se anulan sobre k_0^*. Llamaremos Σ_k al conjunto de todos los divisores primos de k.

Si V es una curva cuasiproyectiva y $K = k_0(V)$, definimos $\Sigma_V = \Sigma_K$. A los divisores primos de K los llamaremos también *divisores primos*[3] de V.

Si $P \in V(k_0)$ es un punto regular, la valoración v_P se anula sobre las funciones constantes de k_0^*, luego es un divisor primo de V. Así, si V es regular tenemos una aplicación $V(k_0) \longrightarrow \Sigma_K$ dada por $P \mapsto v_P$. Enseguida veremos que si k_0 es algebraidamente cerrado se trata de una biyección.

Los divisores primos de un cuerpo de funciones algebraicas van a desempeñar un triple papel: a veces nos convendrá verlos como las valoraciones que son, a veces convendrá pensar en ellos como "puntos abstractos" y a veces los trataremos como "números primos abstractos" de una teoría aritmética que desarrollaremos después. Pensando en los dos últimos puntos de vista, los representaremos mediante letras góticas $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, etc. Cuando queramos ver un primo $\mathfrak{p}$ como valoración escribiremos $v_\mathfrak{p}$ y hablaremos de "la valoración asociada a $\mathfrak{p}$", si bien —desde un punto de vista conjuntista— tenemos la identidad $\mathfrak{p} = v_\mathfrak{p}$.

Representaremos por $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} \subset k$ al anillo de enteros de $\mathfrak{p}$ y también llamaremos $\mathfrak{p}$ a su único ideal maximal.

Así, si $P \in V(k_0)$ es un punto regular de una curva cuasiproyectiva y $\mathfrak{p}$ es su divisor primo asociado, se cumple (por definición) que $v_\mathfrak{p} = v_P$ y $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_P$. Como ideales, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_P$. Para incluir los puntos singulares en esta correspondencia hemos de debilitarla un poco:

Definición 5.7 Sea V una curva proyectiva sobre un cuerpo de constantes k_0 y $K = k_0(V)$. Diremos que un divisor primo $\mathfrak{p}$ de K *está situado sobre* un punto $P \in V(k_0)$ si $\mathcal{O}_P \subset \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{m}_P \subset \mathfrak{p}$.

Teorema 5.8 *Si V es una curva proyectiva sobre un cuerpo de constantes algebraicamente cerrado k_0 y $K = k_0(V)$, entonces cada divisor $\mathfrak{p}$ de K está situado sobre un único punto $P \in V(k_0)$. La correspondencia $\mathfrak{p} \mapsto P$ es una aplicación $\Sigma_K \longrightarrow V(k_0)$ para la cual cada punto regular $P \in V(k_0)$ tiene una única antiimagen $\mathfrak{p}$, la dada por $v_\mathfrak{p} = v_P$. En particular, si V es regular tenemos una biyección entre Σ_K y $V(k_0)$.*

[3]En geometría algebraica es más frecuente referirse a ellos como "lugares" de V.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $V \subset \mathrm{P}^n$ no está contenida en ningún hiperplano, pues un hiperplano de P^n es isomorfo a P^{n-1}, luego podemos ir rebajando n hasta que esto ocurra. En particular, ninguna de las $n+1$ funciones coordenadas x_i es idénticamente nula en V y, en consecuencia, los cocientes x_i/x_j son funciones no nulas de K. Sea $N = \max\limits_{i,j} v_\mathfrak{p}(x_i/x_j)$.

Reordenando las coordenadas podemos suponer que $N = v_\mathfrak{p}(x_1/x_{n+1})$, con lo que, para todo i,

$$v_\mathfrak{p}(x_i/x_{n+1}) = v_\mathfrak{p}\big((x_1/x_{n+1})(x_i/x_1)\big) = N - v_\mathfrak{p}(x_1/x_j) \geq 0.$$

Sea $V_* = V \cap A^n$. Acabamos de probar que las n coordenadas afines x_i están en $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, luego $k_0[V_*] = k_0[x_1, \ldots, x_n] \subset \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$.

Si $\mathfrak{p}$ es el ideal maximal de $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, entonces $I = \mathfrak{p} \cap k_0[V_*]$ es un ideal primo de $k_0[V_*]$, que será de la forma $J/I(V_*)$, para un ideal primo J de $k_0[X_1, \ldots, X_n]$. Sea $W = V(J) \subset V_*$. Si fuera $W = V_*$ entonces sería $J = I(V_*)$ y por lo tanto $I = 0$. Esto significa que todos los elementos de $k_0[V_*]$ serían unidades de $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, pero entonces todos los elementos de K serían unidades, lo cual es absurdo.

Como W es una subvariedad (cerrada) de V_*, ha de ser un punto $W = \{P\}$. Si $\alpha \in \mathcal{O}_P$, entonces $\alpha = \beta/\gamma$, donde β, $\gamma \in k_0[V_*]$ y $\gamma(P) \neq 0$. Así tenemos que β, $\gamma \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ y $\gamma \notin I$, luego $\gamma \notin \mathfrak{p}$, luego $\alpha = \beta/\gamma \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$.

Si además $\alpha \in \mathfrak{m}_P$, entonces $\beta(P) = 0$, luego $\beta \in I \subset \mathfrak{p}$ y (como γ es una unidad de $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$) $\alpha \in \mathfrak{p}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{O}_P \subset \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, $\mathcal{O}_Q \subset \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}_P \subset \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{m}_Q \subset \mathfrak{p}$. Tomando un sistema de referencia adecuado, podemos suponer que $x_1(P) = 0$, $x_1(Q) \neq 0$, $x_{n+1}(P) \neq 0$, $x_{n+1}(Q) \neq 0$, es decir, que la función coordenada afín x_1 sea regular en ambos puntos y no se anule en Q. Así, $x_1 \in \mathfrak{m}_P$, $1/x_1 \in \mathcal{O}_Q$, luego $x_1 \in \mathfrak{p}$, $1/x_1 \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, lo cual es absurdo.

Si $P \in V(k_0)$ es regular y $\mathfrak{p}$ es el divisor primo dado por $v_\mathfrak{p} = v_P$, es claro que $\mathfrak{p}$ es una antiimagen de P. Si hubiera otra $\mathfrak{q}$, tendríamos que $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_P \subset \mathfrak{o}_\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_P \subset \mathfrak{q}$, pero esto es imposible (salvo si $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$), por ejemplo por el teorema de aproximación de Artin-Whaples [TAl 5.46]. ∎

El teorema siguiente prueba que la aplicación $\Sigma_K \longrightarrow V(k_0)$ que acabamos de describir es suprayectiva aunque V no sea regular, es decir, que todo punto de $V(k_0)$ está situado bajo un primo.

Teorema 5.9 *Sea V una curva proyectiva sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k_0 y $r : V_r \longrightarrow V$ su regularización. Entonces el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{V_r} & \xrightarrow{r^*} & \Sigma_V \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_r(k_0) & \xrightarrow[r]{} & V(k_0) \end{array}$$

donde r^* es la biyección inducida por el isomorfismo $\bar{r} : k_0(V) \longrightarrow k_0(V_r)$, es decir, la biyección que cumple $v_{r^*(\mathfrak{p})}(\alpha) = v_\mathfrak{p}(\bar{r}(\alpha))$, para todo $\alpha \in k_0(V)$ y todo $\mathfrak{p} \in \Sigma_{V_r}$. En particular la aplicación $\Sigma_V \longrightarrow V(k_0)$ es suprayectiva.

DEMOSTRACIÓN: Tomamos $\mathfrak{p} \in \Sigma_{V_r}$, consideramos su imagen $P \in V_r(k_0)$ y $Q = r(P) \in V(k_0)$. Hemos de probar que Q es también la imagen de $r^*(\mathfrak{p})$, es decir, que $\mathcal{O}_Q \subset \mathfrak{o}_{r^*(\mathfrak{p})}$ y $\mathfrak{m}_Q \subset r^*(\mathfrak{p})$.

Para probarlo tomamos $\alpha \in \mathcal{O}_Q$. El teorema 2.54 nos da que $\bar{r}(\alpha) \in \mathcal{O}_P = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, luego $0 \le v_\mathfrak{p}(\bar{r}(\alpha)) = v_{r^*(\mathfrak{p})}(\alpha)$, luego $\alpha \in \mathfrak{o}_{r^*(\mathfrak{p})}$.

Si $\alpha \in \mathfrak{m}_Q$ sabemos además que $\alpha(Q) = 0$ y $\bar{r}(\alpha)(P) = \alpha(r(P)) = \alpha(Q) = 0$, luego $\bar{r}(\alpha) \in \mathfrak{m}_P$. La conclusión es análoga.

Teniendo en cuenta que las flechas horizontal superior y vertical izquierda son biyecciones, y que la horizontal inferior es suprayectiva, es claro que la vertical derecha es también suprayectiva, como afirmábamos. ∎

Si pensamos en Σ_V como una "reconstrucción abstracta" de $V_r(k_0)$, entonces la aplicación $\Sigma_V \longrightarrow V(k_0)$ es el equivalente abstracto de r.

Dejamos para más adelante la interpretación de los divisores primos de $k_0(V)$ cuando k_0 no es algebraicamente cerrado (véase la página 215). Para hacernos una primera idea de la situación vamos a describir los divisores primos de los cuerpos de fracciones algebraicas. El teorema siguiente es el análogo al teorema de Ostrowski [TAl 5.52], que nos daba todos los divisores primos de $\mathbb{Q}$:

Teorema 5.10 *Sea $k = k_0(x)$, donde x es trascendente sobre k_0. Entonces los divisores primos de k son los asociados a los ideales primos de $k_0[x]$ según* [TAl 5.10] *y el primo infinito ∞ dado por*[4] *$v_\infty(f) = -\operatorname{grad} f$. Todos ellos son distintos dos a dos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathfrak{p}$ un divisor primo de k y supongamos que $v_\mathfrak{p}(x) \ge 0$. Entonces $v_\mathfrak{p}(p(x)) \ge 0$ para todo $p(x) \in k_0[x]$. Si todos los polinomios tuvieran valor nulo, de hecho $v_\mathfrak{p}$ sería idénticamente nula, luego ha de existir un polinomio $p(x)$ tal que $v_\mathfrak{p}(p(x)) > 0$. Descomponiéndolo en primos, podemos suponer que $p(x)$ es primo. Entonces $p(x)$ es el único primo (salvo asociados) con valor positivo, pues si $q(x)$ es otro primo, entonces existen polinomios $a(x)$ y $b(x)$ tales que $a(x)p(x) + b(x)q(x) = 1$. Si $v_\mathfrak{p}(q(x)) > 0$, el miembro izquierdo tiene valor positivo, pero el derecho no, contradicción.

Ahora es claro que $v_\mathfrak{p}$ coincide con la valoración inducida por el ideal $(p(x))$ y, como ideales distintos inducen valoraciones distintas, podemos identificar cada ideal con su divisor correspondiente $\mathfrak{p} = (p(x))$.

Supongamos ahora que $v_\mathfrak{p}(x) < 0$. Entonces el valor de un monomio es $v_\mathfrak{p}(ax^n) = nv_\mathfrak{p}(x)$ y, en una suma de monomios, el monomio de mayor grado tiene menor valor. Por consiguiente $v_\mathfrak{p}(p(x)) = \operatorname{grad} p(x) v_\mathfrak{p}(x)$ para todo polinomio $p(x) \in k_0[x]$, y de aquí se sigue que la igualdad vale también para todo $p(x) \in k$. Como $v_\mathfrak{p}$ ha de ser suprayectiva, necesariamente $v_\mathfrak{p}(x) = -1$, con lo que $\mathfrak{p} = \infty$. (En realidad, para completar la prueba hay que comprobar que v_∞ es una valoración, lo cual es inmediato.)

Ciertamente v_∞ es distinta de todas las valoraciones asociadas a ideales primos, pues es la única que toma un valor negativo sobre x. ∎

[4]Definimos el grado de una fracción algebraica $f = p(x)/q(x)$ como la diferencia de los grados $\operatorname{grad} p - \operatorname{grad} q$.

Si k_0 es algebraicamente cerrado, podemos ver a $k_0(x)$ como el cuerpo de funciones racionales de P^1, y el teorema anterior muestra explícitamente la biyección $\Sigma_{\mathrm{P}^1} \longrightarrow \mathrm{P}^1(k_0)$ dada por el teorema 5.8: Los ideales primos de $k_0[x]$ son los de la forma $(x-a)$, con $a \in k_0$, y es claro que el divisor primo asociado a $(x-a)$ es el único primo situado sobre a, mientras que el primo ∞ es el único primo situado sobre el punto ∞ (es fácil ver que un polinomio —y, por consiguiente, una fracción algebraica— tiene un polo en ∞ de orden igual a su grado).

Si comparamos con el teorema de Ostrowski, debemos tener en cuenta que en un cuerpo numérico los divisores primos se definen en términos de valores absolutos, por lo que no excluimos que éstos sean arquimedianos, y así en $\mathbb{Q}$ todos los divisores primos son no arquimedianos excepto el primo infinito, determinado por el valor absoluto usual, que por consiguiente está claramente diferenciado del resto de divisores primos.[5] En cambio, los divisores primos de un cuerpo de funciones algebraicas se definen en términos de valoraciones, luego las métricas correspondientes son todas no arquimedianas. Más aún, la diferencia entre el primo infinito y los restantes es relativa a la elección de la base de trascendencia. Por ejemplo, si $k = k_0(x) = k_0(y)$, donde $y = 1/x$, entonces el primo infinito $\mathfrak{p}$ respecto de x cumple que $v_\mathfrak{p}(y) = -v_\mathfrak{p}(x) = 1$, luego $v_\mathfrak{p}$ es la valoración asociada al ideal (y) de $k_0[y]$. Vemos, pues, que un mismo divisor primo $\mathfrak{p}$ puede ser finito para una base e infinito para otra.

Definición 5.11 Si $\mathfrak{p}$ es un divisor primo de un cuerpo k de funciones algebraicas, llamaremos $k_\mathfrak{p}$ a la compleción de k respecto de cualquier valor absoluto asociado a la valoración $v_\mathfrak{p}$. El teorema [TAl 5.12] nos da que $v_\mathfrak{p}$ se extiende una valoración en $k_\mathfrak{p}$ (independiente del valor absoluto elegido), que representaremos igualmente por $v_\mathfrak{p}$.

Llamaremos $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ indistintamente al anillo de enteros de k o de $k_\mathfrak{p}$, llamaremos $\mathfrak{p}$ indistintamente al ideal primo de cualquiera de los dos anillos y $\overline{k}_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ a cualquiera de los dos cuerpos de restos. Según [TAl 5.16], el anillo $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ y el ideal $\mathfrak{p}$ de $k_\mathfrak{p}$ son las clausuras de los correspondientes en k y los dos cuerpos de restos son isomorfos a través de la aplicación inducida por la inclusión entre los anillos de enteros.

Observemos que la proyección en el cociente se restringe a un monomorfismo de cuerpos $k_0 \longrightarrow \bar{k}_\mathfrak{p}$, ya que el ideal $\mathfrak{p}$ no puede contener elementos no nulos de k_0, pues son unidades de $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. A través de este monomorfismo podemos considerar a $\bar{k}_\mathfrak{p}$ como extensión de k_0. Veremos en general que se trata de una extensión finita, pero de momento lo probamos para el caso de los cuerpos de fracciones algebraicas:

Teorema 5.12 *Sea $k = k_0(x)$ un cuerpo de fracciones algebraicas y $\mathfrak{p}$ un divisor primo de k. Entonces cuerpo de restos $\overline{k}_\mathfrak{p}$ es una extensión finita de k_0. Si $\mathfrak{p}$ es un primo finito asociado al ideal primo $\mathfrak{p} = (p(x))$ de $k_0[x]$, entonces $|\overline{k}_\mathfrak{p} : k_0| = \operatorname{grad} p$. Si $\mathfrak{p}$ es el primo infinito, entonces $|\overline{k}_\mathfrak{p} : k_0| = 1$.*

[5] El nombre de "primo infinito" en el contexto de los cuerpos numéricos procede por analogía del caso de los cuerpos de funciones algebraicas.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que $\mathfrak{p} = (p(x))$ es finito. Un elemento arbitrario de $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ es una fracción $f(x)/g(x)$ tal que $p(x) \nmid g(x)$. Existen polinomios $u(x)$ y $v(x)$ tales que $u(x)p(x) + v(x)g(x) = 1$, luego

$$f(x) = f(x)u(x)p(x) + f(x)v(x)g(x).$$

Por consiguiente

$$f(x)v(x) - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)v(x)g(x) - f(x)}{g(x)} = -\frac{f(x)u(x)}{g(x)}p(x) \in \mathfrak{p}.$$

(Aquí $\mathfrak{p}$ es el ideal de $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$.) Esto prueba que la clase de f/g en $\overline{k}_\mathfrak{p}$ es la misma que la del polinomio $f(x)v(x)$, luego el monomorfismo de cuerpos $k_0[x]/\mathfrak{p} \longrightarrow \overline{k}_\mathfrak{p}$ es un isomorfismo.

La inclusión $k_0 \longrightarrow \overline{k}_\mathfrak{p}$ factoriza como $k_0 \longrightarrow k_0[x]/\mathfrak{p} \longrightarrow \overline{k}_\mathfrak{p}$ y es bien conocido que el cuerpo intermedio es una extensión finita de k_0 cuyo grado es $\operatorname{grad} p(x)$.

Si $\mathfrak{p}$ es el primo infinito, llamando $y = 1/x$ tenemos que $\mathfrak{p}$ es el primo asociado al ideal (y) de $k_0[y]$. Como el polinomio y tiene grado 1, la parte ya probada nos da que $|\overline{k}_\mathfrak{p} : k_0| = 1$. ∎

Para generalizar este resultado y, más en general, para estudiar cuerpos de funciones algebraicas arbitrarios, necesitamos estudiar las extensiones de cuerpos de funciones algebraicas, lo que nos permitirá reducir muchos problemas al caso de las fracciones algebraicas. Nos ocupamos de ello en la sección siguiente. Terminamos esta sección con un resultado elemental del que extraeremos varias consecuencias notables:

Teorema 5.13 *Si K/k es una extensión algebraica, la única extensión a K del valor absoluto trivial de k es el valor absoluto trivial.*

DEMOSTRACIÓN: En caso contrario existe $\alpha \in K$ con $|\alpha| > 1$. Entonces

$$\alpha^n = c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_1\alpha + c_0, \quad \text{con } c_i \in k.$$

Pero de aquí se sigue que $|\alpha|^n = |\alpha|^{n-1}$, lo cual es imposible. ∎

Como primera aplicación observamos que hemos definido los divisores primos de un cuerpo k de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0 como una valoración en k que se anula en k_0^*. El teorema anterior prueba en particular que si consideramos a k como cuerpo de funciones algebraicas sobre su cuerpo exacto de constantes k_1, los divisores primos siguen siendo los mismos, pues toda valoración que se anula en k_0^* se anula también en k_1^*.

5.3 Extensiones de cuerpos de funciones

En [TAl] vimos que si K/k es una extensión de cuerpos numéricos, cada divisor primo $\mathfrak{P}$ de K divide a un único primo $\mathfrak{p}$ de k y que cada par de primos en estas condiciones tiene asociado un índice de ramificación y un grado de inercia. Vamos a probar hechos análogos para extensiones de cuerpos de funciones algebraicas.

Índices de ramificación Si K/k es una extensión de cuerpos de funciones algebraicas y $\mathfrak{P}$ es un divisor primo de K, la valoración $v_{\mathfrak{P}}$ no puede ser idénticamente nula en k^*, pues entonces cualquier valor absoluto de $v_{\mathfrak{P}}$ en K se restringiría al valor absoluto trivial en k, en contra del teorema 5.13. Como $v_{\mathfrak{P}} : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos, ha de ser $v_{\mathfrak{P}}[k^*] = e\mathbb{Z}$, para cierto $e \geq 1$. Es claro entonces que $v = (1/e)v_{\mathfrak{P}}|_k$ es una valoración en k que se anula en k_0^*, luego se corresponde con un divisor primo $\mathfrak{p}$ de k. En resumen:

Teorema 5.14 *Si K/k es una extensión de cuerpos de funciones algebraicas, para cada divisor primo $\mathfrak{P}$ de K existe un único divisor primo $\mathfrak{p}$ de k tal que $v_{\mathfrak{P}}|_k = ev_{\mathfrak{p}}$, para cierto natural $e = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$.*

Definición 5.15 En la situación del teorema anterior, diremos que el primo $\mathfrak{P}$ *divide* a $\mathfrak{p}$, y lo representaremos por $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$. El número $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ (o $e_{\mathfrak{P}}$) se llama *índice de ramificación* de $\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{P}$. Si $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) > 1$ diremos que $\mathfrak{p}$ se *ramifica* en $\mathfrak{P}$. En este caso diremos también que $\mathfrak{p}$ es un primo de k *ramificado* en K o que $\mathfrak{P}$ es un primo de K *ramificado* sobre k. Se comprueba inmediatamente que $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ si y sólo si la restricción a k biyecta los valores absolutos de $\mathfrak{P}$ con los de $\mathfrak{p}$.

Vemos así que una inclusión $k \subset K$ de cuerpos de funciones algebraicas (o, más en general, un k_0-monomorfismo entre ellos) da lugar a una aplicación $\Sigma_K \longrightarrow \Sigma_k$. Si k_0 es algebraicamente cerrado esta aplicación tiene una interpretación geométrica.

Teorema 5.16 *Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación regular no constante entre dos curvas proyectivas definidas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k_0 y sea $\overline{\phi} : k_0(W) \longrightarrow k_0(V)$ el k_0-monomorfismo que induce. Éste nos permite considerar a $k_0(V)$ como extensión de $k_0(W)$, lo que nos da una aplicación $\phi : \Sigma_V \longrightarrow \Sigma_W$. Entonces el diagrama natural conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_V & \xrightarrow{\phi} & \Sigma_W \\ \downarrow & & \downarrow \\ V(k_0) & \xrightarrow{\phi} & W(k_0) \end{array}$$

Demostración: Sea $\mathfrak{P} \in \Sigma_V$ y $\mathfrak{p}$ el primo de W que divide a $\mathfrak{P}$. Sea $P \in V$ el punto situado bajo $\mathfrak{P}$. Hemos de probar que $\phi(P)$ está situado bajo $\mathfrak{p}$. En efecto, si $f \in \mathcal{O}_{\phi(P)}(W)$, tenemos que $v_{\mathfrak{p}}(f) = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})^{-1} v_{\mathfrak{P}}(\overline{\phi}(f)) \geq 0$, pues $\overline{\phi}(f) \in \mathcal{O}_P(V) \subset \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$. Esto prueba que $\mathcal{O}_{\phi(P)}(W) \subset \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, y el mismo razonamiento nos da que $\mathfrak{m}_{\phi(P)} \subset \mathfrak{p}$, luego $\mathfrak{p}$ está sobre $\phi(P)$. ∎

A partir de aquí ya podemos identificar sin ambigüedades los puntos de una curva proyectiva regular (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado) con sus divisores primos asociados. Así, por ejemplo, si V y W son curvas proyectivas regulares, el teorema anterior afirma que (los divisores primos de) los puntos de $V(k_0)$ que dividen a (el divisor primo de) un punto $P \in W(k_0)$ son (los asociados a) las antiimágenes de P.

En particular, dada una aplicación regular no constante $\phi : V \longrightarrow W$ entre curvas proyectivas regulares, podemos hablar del índice de ramificación $e(\phi, P)$ para cada punto $P \in V(k_0)$.

Nota En el caso en que $k_0 = \mathbb{C}$, por 4.4 sabemos que una aplicación regular no constante $\phi : V \longrightarrow W$ entre curvas proyectivas regulares es en particular una función holomorfa entre superficies de Riemann compactas. (Son variedades analíticas de dimensión 1 por 4.2, son compactas por 4.1 y son conexas por 4.13.)

En [VC A.14] definimos el índice de ramificación $e(\phi, P)$ de ϕ en P como el único número natural $k \geq 1$ tal que punto en un entorno reducido suficientemente pequeño de $\phi(P)$ tiene exactamente k antiimágenes en un entorno reducido de P. Vamos a ver que[6] $e(\phi, P)$ coincide con el índice de ramificación que acabamos de definir.

Para ello usamos que el índice de ramificación en sentido analítico se caracteriza como el único k tal que existen cartas p y q definidas en entornos de P y $\phi(P)$, respectivamente, tales que $p(P) = q(\phi(P)) = 0$ y la lectura $p^{-1} \circ \phi \circ q$ es la función $z \mapsto z^k$.

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\phi} & W & & \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} & \searrow^{\alpha} & \\ U_1 & \xrightarrow[p^{-1}\phi q]{} & U_2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^\infty \end{array}$$

Ahora, si $\alpha \in \mathcal{O}_{\phi(P)}(W)$ es no nula, en la nota tras la definición 5.5 hemos visto que $v_{\phi(P)}(\alpha)$ es el orden de α en $\phi(P)$ como función meromorfa, que por definición es el orden de $f = q^{-1} \circ \alpha$ en 0. Similarmente, $o_P(\bar{\phi}(\alpha))$ es el orden en 0 de

$$p^{-1} \circ \phi \circ \alpha = (p^{-1} \circ \phi \circ q) \circ (q^{-1} \circ \alpha),$$

es decir, de la función $f(z^k)$. Es obvio entonces que $v_P(\bar{\phi}(\alpha)) = k v_{\phi(P)}(\alpha)$, por lo que k es también $e(\bar{\phi}, P)$ en el sentido algebraico. ∎

Es claro que si tenemos una cadena de extensiones $k \subset K \subset L$ con primos correspondientes $\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$, se tiene la relación multiplicativa:

$$e(\mathfrak{Q}/\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{Q}/\mathfrak{P})e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}).$$

Si K/k es una extensión de cuerpos de funciones algebraicas y $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$, la clausura de k en $K_\mathfrak{P}$ es una compleción de k respecto de $\mathfrak{p}$, luego es topológicamente isomorfa a $k_\mathfrak{p}$. De hecho, podemos tomarla como $k_\mathfrak{p}$ y así $k_\mathfrak{p} \subset K_\mathfrak{P}$. Más aún, $Kk_\mathfrak{p}$ es una extensión finita de $k_\mathfrak{p}$, luego es un cuerpo métrico completo (por el teorema [TAl 5.23]), luego es cerrado en $K_\mathfrak{P}$ y contiene a K, luego $K_\mathfrak{P} = Kk_\mathfrak{p}$.

[6] De aquí procede el nombre de "índice de ramificación". Si $(W = \mathbb{C}^\infty$ y (V, ϕ) es la configuración analítica de una función algebraica $F : \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ en el sentido de [VC 8.26], cada punto $P \in V$ con $e(\phi, P) = k > 1$ se corresponde con que en un entorno reducido de $\phi(P)$ alrededor de cada punto existen k ramas uniformes de F que se conectan por prolongación analítica a través de arcos que giran alrededor de $\phi(P)$, por lo que P "ramifica" F.

La relación $v_{\mathfrak{P}}|_k = ev_{\mathfrak{p}}$, que en principio se cumple sobre k, se cumple de hecho sobre $k_{\mathfrak{p}}$ por la densidad de k y la continuidad de las valoraciones. Esto significa que el índice de ramificación $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ es el mismo que el de $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$.

Grados de inercia Continuando el razonamiento precedente, el hecho de que K sea una extensión finita de k implica inmediatamente que $\overline{K}$ es una extensión finita de $\overline{k}$ (es la adjunción de un número finito de elementos algebraicos). Además, el hecho de que los valores absolutos de $\mathfrak{P}$ se restrinjan a los de $\mathfrak{p}$ se traduce en que $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ (vistos como anillos en K y k) y $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{P}$ (vistos como ideales en dichos anillos). Por consiguiente, la inclusión induce un monomorfismo $\overline{k}_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \overline{K}_{\mathfrak{P}}$ entre los cuerpos de restos correspondientes. Más aún, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \overline{K}_{\mathfrak{P}} & \longrightarrow & \overline{K}_{\mathfrak{P}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \overline{k}_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \overline{k}_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

donde los cuerpos de la izquierda son los de K y k, mientras que los de la derecha son los de $K_{\mathfrak{P}}$ y $k_{\mathfrak{p}}$. Por lo tanto, los cuerpos de restos de las compleciones forman una extensión finita del mismo grado que la correspondiente extensión de los cuerpos de restos de K y k.

Definición 5.17 Sea K/k una extensión de cuerpos de funciones algebraicas, sea $\mathfrak{p}$ un divisor primo en k y $\mathfrak{P}$ un divisor de $\mathfrak{p}$ en K. Llamaremos *grado de inercia* de $\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{P}$ al grado

$$f_{\mathfrak{P}} = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = |\overline{K}_{\mathfrak{P}} : \overline{k}_{\mathfrak{p}}|,$$

que coincide con el grado de inercia de la extensión local $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$.

Al igual que sucede con el índice de ramificación, si $k \subset K \subset L$ es una cadena de extensiones con primos $\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$, es claro que se cumple la relación:

$$f(\mathfrak{Q}/\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{Q}/\mathfrak{P})f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}).$$

Si definimos el *grado local* de $\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{P}$ como

$$n_{\mathfrak{P}} = n(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = |K_{\mathfrak{P}} : k_{\mathfrak{p}}|,$$

entonces el teorema [TAl 5.24] nos da la relación

$$n(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}).$$

El grado de un divisor primo Ahora ya podemos probar que los cuerpos de restos son extensiones finitas del cuerpo de constantes. En general, si K es un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0, entonces K es una extensión finita de un cuerpo de fracciones algebraicas $k = k_0(x)$. Por consiguiente si $\mathfrak{P}$ es un divisor primo de K y $\mathfrak{p}$ es el divisor primo de k que cumple $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$, la extensión $\overline{K}_{\mathfrak{P}}/\overline{k}_{\mathfrak{p}}$ es finita (de grado $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$) y la extensión $\overline{k}_{\mathfrak{p}}/k_0$ es finita por el teorema 5.12. Esto justifica la definición siguiente:

Definición 5.18 Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0 y $\mathfrak{P}$ un divisor primo de K. Llamaremos *grado* de $\mathfrak{P}$ a

$$\operatorname{grad}\mathfrak{P} = |\overline{K}_{\mathfrak{P}} : k_0|.$$

El teorema 5.12 afirma que si $\mathfrak{p} = (p(x))$ es un divisor finito de un cuerpo de fracciones algebraicas $k = k_0(x)$, entonces $\operatorname{grad}\mathfrak{p} = \operatorname{grad} p(x)$, mientras que $\operatorname{grad}\infty = 1$.

Si K/k es una extensión de cuerpos de funciones algebraicas, $\mathfrak{P}$ es un divisor primo en K y $\mathfrak{p}$ es el primo de k al cual divide, es claro que se cumple la relación

$$\operatorname{grad}\mathfrak{P} = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})\operatorname{grad}\mathfrak{p}. \tag{5.1}$$

Por otro lado, notemos que el grado de los divisores se altera si pasamos de considerar el cuerpo de constantes k_0 a considerar el cuerpo exacto k_1. La relación es

$$\operatorname{grad}_{k_0}\mathfrak{P} = |k_1 : k_0|\operatorname{grad}_{k_1}\mathfrak{P}.$$

Ahora es evidente que si K es un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes algebraicamente cerrado, entonces todos los divisores primos tienen grado 1 y los grados de inercia en todas las extensiones son 1.

Compleciones Ahora estamos en condiciones de determinar la estructura de las compleciones de los divisores primos. Todos son isomorfos a cuerpos de series formales de potencias.

Teorema 5.19 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0, sea $\mathfrak{p}$ un divisor primo de K, sea π un primo en $K_{\mathfrak{p}}$ y sea $k_{0\mathfrak{p}}$ la clausura algebraica de k_0 en $K_{\mathfrak{p}}$. Entonces $K_{\mathfrak{p}} = k_{0\mathfrak{p}}((\pi))$, es decir, todo elemento de $K_{\mathfrak{p}}$ se expresa de forma única como*

$$\alpha = \sum_{-\infty \ll n} a_n\pi^n, \qquad \text{con } a_n \in k_{0\mathfrak{p}}.$$

En particular $k_{0\mathfrak{p}} \cong \overline{K}_{\mathfrak{p}}$.

Demostración: Tenemos que $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$ es una extensión finita de k_0. Como ha de ser separable, se cumple $\overline{K}_{\mathfrak{p}} = k_0(c)$, para cierta clase c. Sea $p(x)$ el polinomio mínimo de c sobre k_0. Entonces, $p(x)$ factoriza módulo $\mathfrak{p}$ como $(x-c)q(x)$, y los factores son primos entre sí porque la extensión de cuerpos de restos es separable. Por el lema de Hensel [TAl B.3] el polinomio p tiene una raíz $\alpha \in K_{\mathfrak{p}}$, de modo que $\overline{K}_{\mathfrak{p}} = k_0([\alpha])$.

La aplicación natural $k_0(\alpha) \longrightarrow \overline{K}_{\mathfrak{p}}$ es suprayectiva, luego es un isomorfismo de cuerpos, pero lo mismo podemos decir de la aplicación natural $k_{0\mathfrak{p}} \longrightarrow \overline{K}_{\mathfrak{p}}$ (notemos que todos los elementos de $k_{0\mathfrak{p}}$ son enteros en $K_{\mathfrak{p}}$, pues la valoración es trivial en k_0 y, por 5.13, también en $k_{0\mathfrak{p}}$). Consecuentemente $k_{0\mathfrak{p}} = k_0(\alpha) \cong \overline{K}_{\mathfrak{p}}$. Ahora basta aplicar el teorema B.12. ∎

Una ligera variante del argumento que acabamos de emplear nos da el siguiente resultado:

Teorema 5.20 *Sea $k = k_0((x))$ un cuerpo de series formales de potencias sobre un cuerpo de constantes (perfecto) k_0 y sea K una extensión finita de k. Sea k_1 la clausura algebraica de k_0 en K. Entonces k_1 es una extensión finita de k_0 y $K = k_1((y))$ para cierto $y \in K$.*

El teorema 5.19 generaliza la noción de serie de Taylor al caso de funciones racionales sobre una curva algebraica. En efecto, sea V una curva algebraica sobre un cuerpo (algebraicamente cerrado) k_0, sea $K = k_0(V)$ su cuerpo de funciones racionales y sea $P \in V$ un punto regular. Si $\pi \in \mathcal{O}_P(V)$ es un parámetro local en P, esto significa que $v_P(\pi) = 1$, lo cual sigue siendo cierto en la compleción K_P. Por lo tanto π es primo en K_P y el teorema 5.19 nos da que $K_P = k_0((\pi))$. En particular, todo $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$ admite un desarrollo de la forma

$$\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \pi^m, \qquad a_m \in k_0. \tag{5.2}$$

Es inmediato que la serie de potencias

$$F(X) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m$$

es precisamente la serie de Taylor de α en P respecto al parámetro π, pues, para todo $n \geq 0$, se cumple que

$$\pi^{n+1} \mid \alpha - \sum_{m=0}^{n} a_m \pi^m,$$

luego

$$\alpha - \sum_{m=0}^{n} a_m \pi^m \in \mathfrak{m}_P^{n+1},$$

tal y como exige la definición de serie de Taylor.

En particular, si $k_0 = \mathbb{C}$, el teorema 4.5 nos da que la serie (5.2) no sólo converge a α formalmente en K_P, sino que también converge (a α) como serie funcional en un entorno de P.

Más aún, si $\alpha \in \mathbb{C}(V)$ es una función racional no nula no necesariamente regular en P, entonces $\pi^n\alpha$ es regular en P, para $n = v_P(\alpha)$, y la convergencia de la serie de Taylor de $\pi^n\alpha$ en un entorno de P implica inmediatamente que la serie de Laurent de α como elemento de K_P converge a α en un entorno de P excepto en el propio punto P si α no es regular.

Factorización de primos Para completar la teoría básica sobre la relación entre los primos en una extensión K/k de cuerpos de funciones algebraicas nos falta probar que cada primo $\mathfrak{p}$ de K tiene divisores en K, así como que el número de divisores es finito.

Sea k un cuerpo de funciones algebraicas y $\mathfrak{p}$ un divisor primo en k. Por simplificar fijaremos un valor absoluto $|\ |_{\mathfrak{p}}$ asociado a $\mathfrak{p}$ en k (aunque es fácil ver que la elección es irrelevante en todo lo que sigue). Llamaremos igual a su

extensión a la compleción $k_\mathfrak{p}$. Sea $\mathbb{K}_\mathfrak{p}$ una clausura algebraica de $k_\mathfrak{p}$. El teorema [TAl B.6] nos da que el valor absoluto de $k_\mathfrak{p}$ se extiende de forma única a cada extensión finita de $k_\mathfrak{p}$, luego se extiende a todo $\mathbb{K}_\mathfrak{p}$. Seguiremos llamando $|\ |_\mathfrak{p}$ a la extensión. Así $\mathbb{K}_\mathfrak{p}$ es un cuerpo métrico.[7] No es cierto que sea discreto o completo, pero cada subcuerpo de grado finito sobre $k_\mathfrak{p}$ sí lo es (por [TAl 5.24]).

Teorema 5.21 *Sea K/k una extensión de cuerpos de funciones algebraicas y $\mathfrak{p}$ un divisor primo de k. Entonces:*

1. *Para cada k-monomorfismo $\sigma : K \longrightarrow \mathbb{K}_\mathfrak{p}$ existe un primo $\mathfrak{P}$ en K divisor de $\mathfrak{p}$ tal que $|\alpha|_\mathfrak{P} = |\sigma(\alpha)|_\mathfrak{p}$ para todo $\alpha \in K$.*

2. *Para cada primo $\mathfrak{P}$ de K que divide a $\mathfrak{p}$, los k-monomorfismos que inducen el primo $\mathfrak{P}$ según el apartado 1) son exactamente las restricciones a K de los $k_\mathfrak{p}$-monomorfismos $\sigma : K_\mathfrak{P} \longrightarrow \mathbb{K}_\mathfrak{p}$. Además, monomorfismos distintos tienen restricciones distintas.*

Demostración: Notemos que $\sigma[K]$ es una extensión finita de k, luego $L = k_\mathfrak{p}\sigma[K]$ es una extensión finita de $k_\mathfrak{p}$. Por consiguiente, L es un cuerpo métrico discreto y completo. En particular L es cerrado, luego contiene a la clausura de $\sigma[K]$, la cual contiene a su vez a la clausura de k, que es $k_\mathfrak{p}$. Esto prueba que $\sigma[K]$ es denso en L. Sea v la valoración de L. La continuidad de v hace que $\sigma[K]$ contenga elementos de valor 1, luego $v|_{\sigma[K]}$ es una valoración en $\sigma[K]$ (que se anula sobre k_0^*). Sea $\mathfrak{P}$ el divisor de K que convierte a σ en un isomorfismo topológico. La unicidad de la compleción implica que σ se extiende a una isometría $\sigma : K_\mathfrak{P} \longrightarrow \mathbb{K}_\mathfrak{p}$. Esto significa que un valor absoluto de $\mathfrak{P}$ es el dado por

$$|\alpha|_\mathfrak{P} = |\sigma(\alpha)|_\mathfrak{p}, \qquad \text{para todo } \alpha \in K_\mathfrak{P}.$$

En particular $\mathfrak{P}$ cumple a), y también hemos visto que σ se extiende a una isometría en $K_\mathfrak{P}$. Por otra parte, si $\mathfrak{P}$ es un divisor primo de $\mathfrak{p}$ en K, el teorema [TAl B.6] implica que cada $k_\mathfrak{p}$-monomorfismo $\sigma : K_\mathfrak{P} \longrightarrow \mathbb{K}_\mathfrak{p}$ es una isometría, pues el valor absoluto en $K_\mathfrak{P}$ dado por $|\alpha| = |\sigma(\alpha)|_\mathfrak{p}$ extiende al valor absoluto de $k_\mathfrak{p}$, luego ha de ser el valor absoluto de $K_\mathfrak{P}$.

Sólo falta probar la última afirmación de 2), pero es claro que la densidad de K en $K_\mathfrak{P}$ implica que las restricciones a K de dos $k_\mathfrak{p}$-monomorfismos distintos han de ser dos k-monomorfismos distintos. ∎

Como el número de k-monomorfismos $\sigma : K \longrightarrow \mathbb{K}_\mathfrak{p}$ es finito (es el grado de separabilidad de K/k) concluimos que cada divisor primo de k tiene un número finito de divisores en K.

Con esto hemos probado que si $k \subset K$ entonces la aplicación $\Sigma_K \longrightarrow \Sigma_k$ es suprayectiva y cada punto de Σ_k tiene una cantidad finita de antiimágenes. Para analizar con más detalle esta aplicación necesitamos tratar aparte el caso en que la extensión K/k no es separable. Empezamos con un resultado técnico:

[7] Es fácil ver que si partimos de otro valor absoluto asociado a $\mathfrak{p}$, la extensión es equivalente, por lo que la estructura métrica de $\mathbb{K}_\mathfrak{p}$ sólo depende de $\mathfrak{p}$ y no del valor absoluto de partida.

Teorema 5.22 *Sea $k = k_0(x)$ un cuerpo de fracciones algebraicas sobre un cuerpo k_0 de característica prima p. Si K es una extensión finita inseparable de k, entonces $x^{1/p} \in K$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $y \in K$ un elemento no separable sobre k. Entonces $|k(y) : k| = mp$ y existe un polinomio

$$F(X,Y) = \sum_{j=0}^{m} \Big(\sum_i a_{ij} X^i\Big) Y^{jp} \in k_0[X,Y]$$

tal que $f(x,y) = 0$. Como k_0 es perfecto,[8]

$$g(X,Y) = \sum_{j=0}^{m} \Big(\sum_i a_{ij}^{1/p} X^i\Big) Y^{j} \in k_0[X,Y]$$

y $g(x^{1/p}, y) = f(x,y)^{1/p} = 0$, luego $|k_0(x^{1/p}, y) : k_0(x^{1/p})| \leq m$. Puesto que $|k_0(x^{1/p}) : k_0(x)| \leq p$, vemos que

$$mp \geq |k_0(x^{1/p}, y) : k_0(x)| \geq |k_0(x,y) : k_0(x)| = mp.$$

Por consiguiente, $k_0(x^{1/p}, y) = k(y) \subset K$, luego $x^{1/p} \in K$. ∎

Con esto podemos abordar ya el caso puramente inseparable:

Teorema 5.23 *Sea K/k una extensión puramente inseparable de grado n de cuerpos de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0. Entonces cada primo $\mathfrak{p}$ de k es divisible entre un único primo $\mathfrak{P}$ de K, el grado de inercia es $f = 1$ y el índice de ramificación es $e = n$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea p la característica de los cuerpos. La extensión puede descomponerse en una cadena de extensiones de grado p, luego podemos suponer que $|K : k| = p$. Como el único k-monomorfismo $K \longrightarrow \mathbb{K}_\mathfrak{p}$ es la identidad, el teorema 5.21 nos da que $\mathfrak{p}$ sólo tiene un divisor primo $\mathfrak{P}$ en K. Cada $y \in \mathfrak{O}_\mathfrak{P}$ cumple que $y^p \in k$, luego cada $y \in \overline{K}_\mathfrak{P}$ cumple que $y^p \in \overline{k}_\mathfrak{p}$. Ahora bien, los cuerpos de restos son extensiones finitas de k_0, luego son perfectos, de donde se sigue que $\overline{K}_\mathfrak{p} = \overline{k}_\mathfrak{p}$, es decir, que $f = 1$. Sólo falta probar que $e = p$.

Según hemos observado tras 5.17, se cumple $e = ef = |K_\mathfrak{p} : k_\mathfrak{p}| = n(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Si $K = k(y)$, entonces $y^p \in k$ y $K_\mathfrak{p} = k_\mathfrak{p}(y)$, con $y^p \in k_\mathfrak{p}$, luego el grado local $n(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ será 1 o p según si y está o no en $k_\mathfrak{p}$. Supongamos que es 1.

Sea $x = y^p \in k$. Se cumple que x es trascendente sobre k_0, pues si fuera algebraico $k_0(x)$ sería perfecto y tendríamos que $y \in k_0(x) \subset k$. Sea $k' = k_0(x)$ y $K' = k'(y)$. Vamos a ver que la extensión K'/k' también es un contraejemplo al teorema. Sea $\mathfrak{p}'$ el primo de k' al cual divide $\mathfrak{p}$ y sea $\mathfrak{P}'$ el único primo de K' que lo divide.

Como $y \notin k$, el teorema anterior nos da que k/k' es separable. Por lo tanto $k_\mathfrak{p}/k'_{\mathfrak{p}'}$ también lo es. Estamos suponiendo que $y \in k_\mathfrak{p}$ e $y^p = x \in k'_{\mathfrak{p}'}$, luego por la separabilidad de la extensión ha de ser $y \in k'_{\mathfrak{p}'}$, luego $K'_{\mathfrak{P}'} = k'_{\mathfrak{p}'}(y) = k'_{\mathfrak{p}'}$ y $n(\mathfrak{P}'/\mathfrak{p}') = 1$.

[8] Aquí usamos por primera vez en el estudio de los cuerpos de funciones algebraicas el hecho de que suponemos que los cuerpos de constantes son perfectos. Hasta ahora sólo la habíamos usado para relacionar los cuerpos de funciones algebraicas con las curvas proyectivas.

En otras palabras, si K/k es un contraejemplo, hemos encontrado otro en el que el cuerpo base es un cuerpo de fracciones algebraicas. Equivalentemente, podemos suponer que $k = k_0(x)$. Observemos que $K = k(y) = k_0(y)$ es también un cuerpo de fracciones algebraicas. Cambiando x por $1/x$ si es preciso, podemos suponer que el primo $\mathfrak{p}$ es finito, digamos el asociado a un polinomio irreducible $p(x) = \sum_i a_i x^i \in k_0[x]$. Si definimos $\mathfrak{P}$ como el divisor primo de K asociado a

$$f(y) = p(x)^{1/p} = \sum_i a_i^{1/p} y^i \in k_0[y],$$

es claro que $v_{\mathfrak{P}}(p(x)) = v_{\mathfrak{P}}(f(x)^p) = p = pv_{\mathfrak{p}}(p(x))$, de donde $v_{\mathfrak{P}}|_k = pv_{\mathfrak{p}}$, luego este $\mathfrak{P}$ es precisamente el divisor de $\mathfrak{p}$ en k y el grado de inercia es $e = p$. ∎

Y finalmente obtenemos la situación general:

Teorema 5.24 *Sea K/k una extensión de grado n de cuerpos de funciones algebraicas y $\mathfrak{p}$ un primo en k. Entonces $\mathfrak{p}$ es divisible por un número finito de primos $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ en K, de modo que*

$$n = n(\mathfrak{P}_1/\mathfrak{p}) + \cdots + n(\mathfrak{P}_r/\mathfrak{p}).$$

Equivalentemente, si $e_i = e(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p})$ y $f_i = f(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p})$, se cumple la relación

$$n = e_1 f_1 + \cdots + e_r f_r.$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que la extensión K/k es separable, con lo que también lo son todas las extensiones $K_{\mathfrak{P}_i}/k_{\mathfrak{p}}$, pues $K_{\mathfrak{P}_i} = Kk_{\mathfrak{p}}$. Por lo tanto, el número de $k_{\mathfrak{p}}$-monomorfismos $\sigma : K_{\mathfrak{P}_i} \longrightarrow \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ es exactamente $n_i = n(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p})$, los cuales se restringen a otros tantos k-monomorfismos $\sigma : K \longrightarrow \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$. Puesto que cada uno de estos monomorfismos se extiende a una única compleción $K_{\mathfrak{P}_i}$, resulta que las $n_1 + \cdots + n_r$ restricciones son todos los k-monomorfismos de K, luego son n en total.

Si la extensión no es separable, entonces los cuerpos tienen característica prima p. Sea K_s la clausura separable de k en K, de modo que la extensión K/K_s es puramente inseparable. Sea $|K : K_s| = n_p$ y $|K_s : K| = n_s$.

Si $\mathfrak{p}$ es un divisor primo de k, por la parte ya probada tiene divisores primos $\mathfrak{P}'_1, \dots, \mathfrak{P}'_r$ en K_s de modo que

$$n_s = n(\mathfrak{P}'_1/\mathfrak{p}) + \cdots + n(\mathfrak{P}'_r/\mathfrak{p}).$$

Por el teorema anterior, cada $\mathfrak{P}'_i$ es divisible por un único primo $\mathfrak{P}_i$ en K, de modo que $n(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}'_i) = n_p$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n = n_p n_s &= n(\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}'_1)\, n(\mathfrak{P}'_1/\mathfrak{p}) + \cdots + n(\mathfrak{P}_r/\mathfrak{P}'_r)\, n(\mathfrak{P}'_r/\mathfrak{p}) \\ &= n(\mathfrak{P}_1/\mathfrak{p}) + \cdots + n(\mathfrak{P}_r/\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

∎

Nota Si k_0 es algebraicamente cerrado todos los grados de inercia f_i valen 1, con lo que la relación se reduce a $e_1 + \cdots + e_r = n$.

Si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación regular entre dos curvas algebraicas proyectivas sobre $\mathbb{C}$ (que nos permite considerar a $\mathbb{C}(V)$ como extensión de $\mathbb{C}(W)$), puesto que los índices de ramificación coinciden con los que intervienen en el teorema [VC A.24], ahora podemos concluir que el grado de ϕ definido en [VC A.23] no es sino el grado $|\mathbb{C}(V) : \mathbb{C}(W)|$. ∎

Extensiones de Galois Al igual que lo que sucede en el caso de los cuerpos numéricos, las descomposiciones de primos en extensiones finitas de Galois es especialmente simple. Empezamos demostrando lo siguiente:

Teorema 5.25 *Si K/k es una extensión finita de Galois de cuerpos de funciones algebraicas, $\mathfrak{P}$ es un divisor primo en K y $\mathfrak{p}$ es el primo de k al cual divide, entonces la extensión de cuerpos de restos $\overline{K}_{\mathfrak{P}}/\overline{k}_{\mathfrak{p}}$ también es finita de Galois.*

Demostración: Como estamos suponiendo que k_0 es perfecto, es claro que la extensión es separable. Veamos que es normal.

Tomamos $[\alpha] \in \overline{K}_{\mathfrak{P}}$. Por el teorema de aproximación [TAl 5.46] podemos encontrar $\alpha' \in K$ tal que $|\alpha' - \alpha|_{\mathfrak{P}} < 1$ y $|\alpha'|_{\mathfrak{P}'} < 1$ para todo divisor $\mathfrak{P}'$ de $\mathfrak{p}$ en K distinto de $\mathfrak{P}$. La primera condición hace que $[\alpha] = [\alpha']$, luego podemos suponer que $v_{\mathfrak{P}'}(\alpha) \geq 0$ para todo $\mathfrak{P}'$. Equivalentemente, podemos suponer que $v_{\mathfrak{P}}(\sigma(\alpha)) \geq 0$ para todo $\sigma \in G$.

Si $p(x) = \operatorname{pol}\operatorname{mín}(\alpha, k)$ acabamos de probar que $p(x)$ se escinde en $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}[x]$, luego podemos tomar clases módulo $\mathfrak{p}$ y así obtenemos un polinomio $\bar{p}(x) \in \overline{k}_{\mathfrak{p}}[x]$ que tiene a $[\alpha]$ por raíz y que se escinde en $\overline{K}_{\mathfrak{P}}[x]$. De aquí se sigue que el polinomio mínimo de $[\alpha]$ se escinde también en $\overline{K}_{\mathfrak{P}}[x]$, luego la extensión es normal. ∎

El comportamiento de los divisores primos en las extensiones normales está condicionado por el siguiente hecho obvio:

Teorema 5.26 *Sea $\sigma : K \longrightarrow L$ un k-isomorfismo entre dos extensiones finitas de un cuerpo de funciones algebraicas k y sea $\mathfrak{p}$ un divisor primo de k. Entonces, para cada divisor primo $\mathfrak{P}$ de K que divide a $\mathfrak{p}$ existe un único divisor primo $\mathfrak{P}^\sigma$ de L que divide a $\mathfrak{p}$ tal que para todo $\alpha \in K$ se cumple $v_{\mathfrak{P}}(\alpha) = v_{\mathfrak{P}^\sigma}(\sigma(\alpha))$. Además $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{P}^\sigma/\mathfrak{p})$ y $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{P}^\sigma/\mathfrak{p})$.*

Demostración: Basta definir $v_{\mathfrak{P}^\sigma}(\alpha) = v_{\mathfrak{P}}(\sigma^{-1}(\alpha))$. ∎

En particular, si K/k es una extensión normal de cuerpos de funciones algebraicas y $G = G(K/k)$ es el grupo de los k-automorfismos de K, entonces G actúa (por la derecha) sobre el conjunto de los divisores primos de K que dividen a un primo dado $\mathfrak{p}$ de k, es decir, para cada uno de estos divisores $\mathfrak{P}$ y cada $\sigma \in G$ está definido $\mathfrak{P}^\sigma$ según el teorema anterior, y además $\mathfrak{P}^{\sigma\tau} = (\mathfrak{P}^\sigma)^\tau$ y $\mathfrak{P}^1 = \mathfrak{P}$. Más aún:

Teorema 5.27 *Sea K/k una extensión normal de cuerpos de funciones algebraicas y sea $G = G(K/k)$ el grupo de todos los k-automorfismos de K. Sea $\mathfrak{p}$ un divisor primo de k. Entonces G actúa transitivamente sobre los divisores primos de K que dividen a $\mathfrak{p}$, es decir, dados dos cualesquiera de ellos $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{P}'$, existe $\sigma \in G$ tal que $\mathfrak{P}^\sigma = \mathfrak{P}'$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\tau_{\mathfrak{P}} : K \longrightarrow \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ y $\tau_{\mathfrak{P}'} : K \longrightarrow \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ dos k-monomorfismos según el teorema 5.21. Podemos suponer que $K \subset \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$, y entonces, por la normalidad de K/k, se ha de cumplir que $\tau_{\mathfrak{P}}[K] = \tau_{\mathfrak{P}'}[K] = K$. Es claro entonces que $\sigma = \tau_{\mathfrak{P}} \circ \tau_{\mathfrak{P}'}^{-1} \in G$ cumple $|\alpha|_{\mathfrak{P}} = |\sigma(\alpha)|_{\mathfrak{P}'}$ (para un par de valores absolutos que extiendan a uno dado de $\mathfrak{p}$), de donde se sigue claramente que $v_{\mathfrak{P}}(\alpha) = v_{\mathfrak{P}'}(\sigma(\alpha))$ para todo $\alpha \in K$, luego $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^{\sigma}$. ∎

Combinando los dos últimos teoremas concluimos que si K/k es una extensión normal de cuerpos de funciones algebraicas y $\mathfrak{p}$ es un divisor primo en k, entonces todos sus divisores en K tienen el mismo grado de inercia y el mismo índice de ramificación (luego también el mismo grado local). En otras palabras, $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$, $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ y $n(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ no dependen de $\mathfrak{P}$. La relación del teorema 5.24 se reduce a $n = efr$.

Para el caso de una extensión finita de Galois podemos decir mucho más:

Definición 5.28 Sea K/k una extensión finita de Galois de cuerpos de funciones algebraicas, sea $\mathfrak{P}$ un divisor primo de K y sea $\mathfrak{p}$ el primo de k al cual divide. Definimos el *grupo de descomposición* de $\mathfrak{p}$ sobre $\mathfrak{P}$ como

$$G_{\mathfrak{P}} = \{\sigma \in G(K/k) \mid \mathfrak{P}^{\sigma} = \mathfrak{P}\}.$$

Claramente $G_{\mathfrak{P}}$ es un subgrupo del grupo de Galois $G = G(K/k)$. Además, para todo $\sigma \in G$ se cumple $G_{\mathfrak{P}^{\sigma}} = G_{\mathfrak{P}}^{\sigma}$. Es fácil biyectar el conjunto cociente $G/G_{\mathfrak{P}}$ con el número r de divisores primos de $\mathfrak{p}$ en K, con lo que $|G_{\mathfrak{P}}| = ef$. Más concretamente, los efr automorfismos de G se dividen en r clases de ef automorfismos cada una, de modo que los automorfismos de cada clase llevan $\mathfrak{P}$ a cada uno de sus conjugados (a cada uno de los divisores de $\mathfrak{p}$).

El cuerpo L fijado por $G_{\mathfrak{P}}$ se llama *cuerpo de descomposición* de $\mathfrak{p}$ sobre $\mathfrak{P}$. Claramente $|L : k| = r$.

Como $K_{\mathfrak{P}} = k_{\mathfrak{p}}K$, es claro que la extensión $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ también es finita de Galois. La restricción induce un monomorfismo de grupos $G(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow G_{\mathfrak{P}}$ que, de hecho, es un isomorfismo porque ambos grupos tienen el mismo orden.

Sea $\mathfrak{p}'$ el primo de L divisible entre $\mathfrak{P}$. Así $k \subset L \subset K$ y $k_{\mathfrak{p}} \subset L_{\mathfrak{p}'} \subset K_{\mathfrak{P}}$. Ahora bien, $G_{\mathfrak{P}} = G(K/L)$, y es fácil ver que $G_{\mathfrak{P}}$ es también el grupo de descomposición de $\mathfrak{P}$ sobre $\mathfrak{p}'$. Por consiguiente,

$$|K_{\mathfrak{P}} : L_{\mathfrak{p}'}| = |G_{\mathfrak{P}}| = |K_{\mathfrak{P}} : k_{\mathfrak{p}}|,$$

es decir, $L_{\mathfrak{p}'} = k_{\mathfrak{p}}$. Esto implica que $e(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}) = 1$. Como la extensión local $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ es la misma que $K_{\mathfrak{P}}/L_{\mathfrak{p}'}$, resulta que el grado de inercia y el índice de ramificación son los mismos para $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ que para $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}'$. En particular es claro que $\mathfrak{P}$ es el único primo en K que divide a $\mathfrak{p}'$ (pues $|K : L| = ef$).

Cada automorfismo $\sigma \in G_{\mathfrak{P}}$ se restringe a un automorfismo $\sigma : \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ que deja fijos a los elementos de $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, el cual induce a su vez un $\overline{k}_{\mathfrak{p}}$-automorfismo $\bar{\sigma} : \overline{K}_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \overline{K}_{\mathfrak{P}}$ de forma natural ($\bar{\sigma}([\alpha]) = [\sigma(\alpha)]$). Recogemos esto y un poco más en el teorema siguiente:

Teorema 5.29 *Sea K/k una extensión finita de Galois de cuerpos de funciones algebraicas. Sea $\mathfrak{P}$ un divisor primo en K y sea $\mathfrak{p}$ el primo de k divisible entre $\mathfrak{P}$. Entonces cada $\sigma \in G_{\mathfrak{P}}$ induce de forma natural un automorfismo $\overline{\sigma} \in G(\overline{K}_{\mathfrak{P}}/\overline{k}_{\mathfrak{p}})$ y la aplicación $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ es un epimorfismo de grupos $G_{\mathfrak{P}} \longrightarrow G(\overline{K}_{\mathfrak{P}}/\overline{k}_{\mathfrak{p}})$.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo falta probar la suprayectividad. Notemos que si L es el cuerpo de descomposición de $\mathfrak{p}$ sobre $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{p}'$ es el primo intermedio, se cumple que $\overline{L}_{\mathfrak{p}'} = \overline{k}_{\mathfrak{p}}$, luego podemos sustituir k por L y suponer, pues, que $G = G_{\mathfrak{P}}$. Como $\overline{K}_{\mathfrak{P}}/\overline{k}_{\mathfrak{p}}$ es separable, tiene un elemento primitivo, digamos $[\alpha]$. Al igual que en la prueba de 5.25, podemos suponer que $p(x) = \operatorname{pol\,mín}(\alpha, k)$ se escinde en $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}[x]$. Dado $\tau \in G(\overline{K}_{\mathfrak{P}}/\overline{k}_{\mathfrak{p}})$, tenemos que $\tau([\alpha])$ es raíz de $\bar{p}[x]$, luego $\tau([\alpha]) = [\alpha']$, donde α' es un conjugado de α. Existe $\sigma \in G = G_{\mathfrak{P}}$ tal que $\sigma(\alpha) = \alpha'$, con lo que $\bar{\sigma}([\alpha]) = [\sigma(\alpha)] = [\alpha'] = \tau([\alpha])$, luego $\tau = \bar{\sigma}$. ∎

Esto nos lleva a la definición siguiente:

Definición 5.30 Sea K/k una extensión finita de Galois de cuerpos de funciones algebraicas, sea $\mathfrak{P}$ un primo de K y $\mathfrak{p}$ el primo de k al cual divide. Llamaremos *grupo de inercia* de $\mathfrak{p}$ sobre $\mathfrak{P}$ al núcleo $T_{\mathfrak{P}} \leq G_{\mathfrak{P}}$ del epimorfismo descrito en el teorema anterior. Llamaremos *cuerpo de inercia* de $\mathfrak{p}$ sobre $\mathfrak{P}$ al cuerpo fijado por $T_{\mathfrak{P}}$.

Según el teorema anterior, tenemos un isomorfismo $G_{\mathfrak{P}}/T_{\mathfrak{P}} \cong G(\overline{K}_{\mathfrak{P}}/\overline{k}_{\mathfrak{p}})$. En particular $|T_{\mathfrak{P}}| = f$. Si L es el cuerpo de descomposición de $\mathfrak{p}$ sobre $\mathfrak{P}$ y M es el cuerpo de inercia, tenemos las inclusiones $k \subset L \subset M \subset K$. Los grados de estas extensiones son

$$|L : k| = r, \qquad |M : L| = f, \qquad |K : M| = e.$$

Como $T_{\mathfrak{P}}$ es un subgrupo normal de $G_{\mathfrak{P}}$, tenemos que la extensión M/L es de Galois. Sea $\mathfrak{p}'$ el primo intermedio en L y $\mathfrak{p}''$ el primo intermedio en M. Como $G(K/M) = T_{\mathfrak{P}}$, es claro que el epimorfismo $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ para la extensión K/M es trivial, luego $G(\overline{K}_{\mathfrak{P}}/\overline{M}_{\mathfrak{p}''}) = 1$, luego $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}'') = 1$. De aquí se sigue que $f(\mathfrak{p}''/\mathfrak{p}') = f = |M : L|$.

El teorema siguiente recoge todo lo que hemos probado:

Teorema 5.31 *Sea K/k una extensión finita de Galois de cuerpos de funciones algebraicas, sea $\mathfrak{P}$ un primo en K y $\mathfrak{p}$ el primo de k al cual divide. Sea L el cuerpo de descomposición y M el cuerpo de inercia, sean $\mathfrak{p}'$ y $\mathfrak{p}''$ los primos divisibles por $\mathfrak{P}$ en cada uno de estos cuerpos. Sea r el número de divisores primos de $\mathfrak{p}$ en K, $f = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ y $e = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Entonces se tienen los datos indicados en la tabla siguiente:*

Grado	r	f	e	
Cuerpo	k	L	M	K
Primo	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{p}'$	$\mathfrak{p}''$	$\mathfrak{P}$
Ramificación	1	1	e	
Inercia	1	f	1	

Probamos ahora un teorema sencillo sobre normas y trazas que necesitaremos más adelante:

Teorema 5.32 *Sea K/k una extensión de cuerpos de funciones algebraicas y sea $\mathfrak{p}$ un divisor primo en k. Para cada divisor primo $\mathfrak{P}$ de K que divida a $\mathfrak{p}$, sean $\mathrm{N}_\mathfrak{P} : K_\mathfrak{P} \longrightarrow k_\mathfrak{p}$ y $\mathrm{Tr}_\mathfrak{P} : K_\mathfrak{P} \longrightarrow k_\mathfrak{p}$ la norma y la traza locales. Entonces, para todo $\alpha \in K$,*

$$\mathrm{N}_k^K(\alpha) = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathrm{N}_\mathfrak{P}(\alpha), \qquad \mathrm{Tr}_k^K(\alpha) = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathrm{Tr}_\mathfrak{P}(\alpha).$$

Demostración: Supongamos primero que la extensión es separable. Entonces, $\mathrm{N}_k^K(\alpha)$ es el producto de las imágenes de α por todos los k-monomorfismos de K en una clausura algebraica de $k_\mathfrak{p}$. Al agrupar los que se extienden a cada compleción $K_\mathfrak{P}$ obtenemos la norma $\mathrm{N}_\mathfrak{P}(\alpha)$, luego se cumple la fórmula del enunciado, e igualmente con las trazas.

En el caso general, sea L la clausura puramente inseparable de k en K. Por el teorema 5.23 sabemos que $\mathfrak{p}$ tiene un único divisor $\mathfrak{p}'$ en L. Así como que $|L_{\mathfrak{p}'} : k_\mathfrak{p}| = |L : k|$. La extensión K/L es separable, luego, por la parte ya probada,

$$\mathrm{N}_L^K(\alpha) = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}'} \mathrm{N}'_\mathfrak{P}(\alpha),$$

donde $\mathrm{N}'_\mathfrak{P}$ es la norma de la extensión $K_\mathfrak{P}/L_{\mathfrak{p}'}$. Elevando ambos miembros a $|L : k|$ obtenemos la relación para K/k. El caso de las trazas es trivial, pues la traza de una extensión inseparable es nula. ∎

5.4 Divisores

Para completar la analogía con la aritmética de los cuerpos numéricos, nos gustaría expresar la conclusión del teorema 5.24 como que el divisor $\mathfrak{p}$ de k factoriza en K en la forma

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{e_r},$$

pero el producto de la derecha no tiene significado alguno en la teoría que hemos desarrollado hasta el momento. No obstante, esto tiene fácil solución.

Definición 5.33 Sea K un cuerpo de funciones algebraicas. Definimos el grupo de los *divisores* de K como el grupo abeliano libre $\mathcal{D}$ generado por los divisores primos de K. Usaremos notación multiplicativa, de modo que cada divisor de K se expresa de forma única como

$$\mathfrak{a} = \prod_\mathfrak{P} \mathfrak{P}^{n_\mathfrak{P}},$$

donde los exponentes $n_\mathfrak{P}$ son enteros y casi todos nulos.

Definimos $v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}) = n_{\mathfrak{P}}$. Un divisor es *entero* si todos sus exponentes son no negativos. Diremos que un divisor $\mathfrak{a}$ *divide* a un divisor $\mathfrak{b}$ (y lo representaremos por $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$) si $v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}) \le v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b})$ para todo divisor primo $\mathfrak{P}$ de K. Equivalentemente, si $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$, donde $\mathfrak{c}$ es un divisor entero.

Es claro que un conjunto finito de divisores tiene un máximo común divisor y un mínimo común múltiplo, que se forman elevando cada primo al menor (respectivamente, al mayor) exponente con que aparece en los divisores dados.

Si K/k es una extensión de cuerpos de funciones algebraicas, identificamos cada divisor primo $\mathfrak{p}$ de k con el divisor

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{e_r} \in \mathcal{D}_K, \tag{5.3}$$

donde $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ son los divisores de $\mathfrak{p}$ en K y $e_1, \ldots, e_r$ son los índices de ramificación correspondientes. Esta aplicación —obviamente inyectiva— se extiende de forma única por linealidad a un monomorfismo de grupos

$$\mathcal{D}_k \longrightarrow \mathcal{D}_K,$$

que nos permite identificar a cada divisor de k con un divisor de K.

La transitividad de los índices de ramificación se traduce inmediatamente en que si tenemos una cadena de extensiones $k \subset K \subset L$, entonces la composición de las identificaciones $\mathcal{D}_k \longrightarrow \mathcal{D}_K \longrightarrow \mathcal{D}_L$ es la identificación correspondiente a la extensión K/k.

La identificación (5.3) nos permite hablar de la descomposición en primos en K de un divisor primo $\mathfrak{p}$ de k, de modo que lo que hasta ahora llamábamos divisores de $\mathfrak{p}$ en K son precisamente los primos de K que aparecen en dicha factorización con exponente no nulo. Por ejemplo, el teorema 5.23 afirma que si K/k es una extensión puramente inseparable de grado n, entonces cada primo $\mathfrak{p}$ de k se descompone en la forma $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^n$, para cierto primo $\mathfrak{P}$ de K.

Similarmente, las observaciones tras el teorema 5.27 equivalen a que si K/k es una extensión normal, cada primo $\mathfrak{p}$ de k factoriza en K en la forma

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r)^e,$$

de modo que, además, todos los factores tienen el mismo grado de inercia. Conviene introducir algunas definiciones:

Definición 5.34 Sea K/k una extensión de grado n de cuerpos de funciones algebraicas. Sea $\mathfrak{P}$ un primo en K y $\mathfrak{p}$ el primo de k al cual divide. Diremos que

1. $\mathfrak{p}$ se *escinde* en $\mathfrak{P}$ si $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = 1$.
2. $\mathfrak{p}$ se *escinde completamente* en K si $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_n$ (de modo que todos los factores tienen necesariamente $e = f = 1$).
3. $\mathfrak{p}$ se *conserva primo* en K si $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}$ (de modo que $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = 1$, $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = n$).

4. $\mathfrak{p}$ se *ramifica* en $\mathfrak{P}$ si $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) > 1$.

5. $\mathfrak{p}$ se *ramifica completamente* en K si $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^n$ (de modo que $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = n$, $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = 1$).

En estos términos, el teorema 5.31 afirma que una extensión finita de Galois K/k de cuerpos de funciones algebraicas se puede descomponer en una cadena de extensiones $k \subset L \subset M \subset K$ (relativa a primos dados $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{p}$), de modo que $\mathfrak{p}$ se escinda en L en un primo $\mathfrak{p}'$, el cual a su vez se conserva primo en M y luego se ramifica completamente en K.

Un caso especialmente simple se da cuando la extensión es abeliana, pues entonces el grupo de descomposición $G_{\mathfrak{P}}$ es normal y todos los divisores de $\mathfrak{p}$ en K tienen el mismo grupo de descomposición, por lo que el cuerpo de descomposición L es el mismo para todos. En tal caso, $\mathfrak{p}$ se escinde completamente en L, en la forma $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$. Similarmente, el cuerpo de inercia M es el mismo para todos los divisores de $\mathfrak{p}$, y todos los $\mathfrak{p}_i$ se conservan primos en M, mientras que se ramifican completamente en K, en la forma $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i^e$.

Introducimos ahora la noción de norma de un divisor:

Definición 5.35 Si K/k es una extensión de cuerpos de funciones algebraicas, definimos la *norma*

$$\mathrm{N}_k^K : \mathcal{D}_K \longrightarrow \mathcal{D}_k$$

como el homomorfismo que sobre los primos viene dado por $\mathrm{N}_k^K(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^{f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})}$, donde $\mathfrak{p}$ es el primo de k divisible entre $\mathfrak{P}$.

La transitividad de grado de inercia implica la transitividad de la norma, es decir, dada una cadena $k \subset K \subset L$, se cumple que $\mathrm{N}_k^L = \mathrm{N}_K^L \circ \mathrm{N}_k^K$.

Para cada primo $\mathfrak{p}$ de k se cumple

$$\mathrm{N}_k^K(\mathfrak{p}) = \mathrm{N}(\mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{e_r}) = \mathfrak{p}^{f_1 e_1 + \cdots + f_r e_r} = \mathfrak{p}^{|K:k|}.$$

Por linealidad esto es cierto para todo divisor $\mathfrak{a} \in \mathcal{D}_k$, es decir,

$$\mathrm{N}_k^K(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^{|K:k|}.$$

Si $\mathfrak{p}$ es un divisor primo en un cuerpo de funciones algebraicas k y $\alpha \in k$ es un elemento no nulo, conviene imitar formalmente el lenguaje geométrico y decir que α *tiene un cero de orden* r en $\mathfrak{p}$ si $v_{\mathfrak{p}}(\alpha) = r > 0$, y que α *tiene un polo de orden* r en $\mathfrak{p}$ si $v_{\mathfrak{p}}(\alpha) = -r < 0$.

Los divisores de k pueden verse como distribuciones hipotéticas de ceros y polos de elementos de k. Para precisar esta idea necesitamos probar un par de hechos elementales. El primero puede verse como una generalización del principio de prolongación analítica (afirma que una función algebraica no nula tiene un número finito de ceros y polos):

Teorema 5.36 *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas y $x \in K^*$, entonces existe a lo sumo una cantidad finita de divisores primos $\mathfrak{P}$ en K tales que $v_{\mathfrak{P}}(x) \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Si x es algebraico sobre el cuerpo de constantes k_0, entonces $v_{\mathfrak{P}}(x) = 0$ para todo divisor primo $\mathfrak{P}$ (por el teorema 5.13). Si es trascendente, consideramos el cuerpo $k = k_0(x)$. Obviamente K/k es una extensión de cuerpos de funciones algebraicas. Si hay infinitos primos en K cuyas valoraciones no se anulan en x, los primos de k a los que dividen son infinitos también, y sus valoraciones no se anulan en x. Ahora bien, k es un cuerpo de funciones racionales y sólo hay dos primos cuyas valoraciones no se anulan en x, a saber, el primo infinito y el primo finito asociado al ideal (x) de $k_0[x]$. ∎

Por otra parte, es fácil caracterizar las funciones algebraicas sin ceros ni polos:

Teorema 5.37 *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0, entonces las funciones no nulas de K sin ceros ni polos son exactamente las de k_1^*. Si $\alpha, \beta \in K$ cumplen $v_{\mathfrak{P}}(\alpha) = v_{\mathfrak{P}}(\beta)$ para todo $\mathfrak{P} \in \Sigma_K$, entonces $\alpha = c\beta$, con $c \in k_1^*$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $v_{\mathfrak{P}}(x) = 0$ para todo $\mathfrak{P} \in \Sigma_K$, entonces x es algebraico sobre k_0, pues si fuera trascendente podríamos considerar $k = k_0(x)$ y el primo $\mathfrak{p} = (x)$, que cumple $v_{\mathfrak{p}}(x) = 1$. Si $\mathfrak{P}$ es un divisor de $\mathfrak{p}$ en K se cumple $v_{\mathfrak{P}}(x) \neq 0$, contradicción. Así pues, $x \in k_1$. El recíproco es obvio, por el teorema 5.13.

Para la segunda parte, es claro que si una de las dos funciones es nula la otra también lo es. En caso contrario α/β es una función sin ceros ni polos, luego es una constante de k_1. ∎

Definición 5.38 Si K es un cuerpo de funciones algebraicas, en virtud del teorema 5.36, cada cada $\alpha \in K^*$ determina un divisor, a saber,

$$(\alpha) = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{v_{\mathfrak{P}}(\alpha)}.$$

A los divisores de esta forma los llamaremos *divisores principales* de K. Notemos que, por definición, $v_{\mathfrak{P}}((\alpha)) = v_{\mathfrak{P}}(\alpha)$.

Las propiedades de las valoraciones nos dan que $(\alpha)(\beta) = (\alpha\beta)$, así como que $(\alpha^{-1}) = (\alpha)^{-1}$. En otras palabras, el conjunto P_K de los divisores principales de K es un subgrupo de $\mathcal{D}$ y tenemos un epimorfismo

$$K^* \longrightarrow P_K.$$

Según el teorema 5.37, el núcleo de este homomorfismo es k_1^*, donde k_1 es el cuerpo exacto de constantes de K. Así pues, $P_K \cong K^*/k_1^*$. Al pasar de K^* a P_K estamos identificando a dos funciones cuando se diferencian en un factor constante de k_1^*.

Como señalábamos, conviene pensar en los divisores de K como en distribuciones posibles de ceros y polos de una función algebraica. Si un divisor $\mathfrak{a}$ es principal, eso significa que la distribución asociada a $\mathfrak{a}$ se realiza en K, es decir, existe realmente una función $\alpha \in K^*$ (única salvo una constante) tal que $v_{\mathfrak{P}}(\alpha) = v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a})$ para todo divisor primo $\mathfrak{P}$ de K.

Dada una extensión K/k de cuerpos de funciones algebraicas, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} K^* & \longrightarrow & \mathcal{D}_K \\ \uparrow & & \uparrow \\ k^* & \longrightarrow & \mathcal{D}_k \end{array}$$

En efecto, si $\alpha \in k^*$ y $\mathfrak{P}$ es un primo de K, sea $\mathfrak{p}$ el primo de k divisible entre $\mathfrak{P}$ y sea $e = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Entonces

$$v_{\mathfrak{P}}((\alpha)_K) = v_{\mathfrak{P}}(\alpha) = ev_{\mathfrak{p}}(\alpha) = ev_{\mathfrak{p}}((\alpha)_k) = v_{\mathfrak{P}}((\alpha)_k),$$

luego $(\alpha)_K = (\alpha)_k$.

Más delicado es demostrar que la norma de la extensión K/k se corresponde con la norma entre los grupos de divisores:

Teorema 5.39 *Si K/k es una extensión de cuerpos de funciones algebraicas, el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} K^* & \longrightarrow & \mathcal{D}_K \\ {\scriptstyle \mathrm{N}_k^K}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{N}_k^K} \\ k^* & \longrightarrow & \mathcal{D}_k \end{array}$$

Demostración: Hemos de probar que para todo $\alpha \in K^*$ se cumple

$$(\mathrm{N}_k^K(\alpha)) = \mathrm{N}_k^K((\alpha)).$$

Sea K_s la clausura separable de k en K. Así tenemos la cadena $k \subset K_s \subset K$, de modo que la primera extensión es separable y la segunda es puramente inseparable. Teniendo en cuenta que las dos normas son transitivas, es claro que basta probar el teorema para cada una de estas extensiones por separado. Alternativamente, basta probar el teorema en el supuesto de que K/k es puramente inseparable y en el supuesto de que es separable.

Si K/k es puramente inseparable de grado n, entonces, según el teorema 5.23, cada primo $\mathfrak{p}$ de k se corresponde con un único primo $\mathfrak{P}$ de K y su factorización es $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^n$ (con $f = 1$). Por lo tanto:

$$\mathrm{N}_k^K((\alpha)) = \prod_{\mathfrak{P}} \mathrm{N}_k^K(\mathfrak{P}^{v_{\mathfrak{P}}(\alpha)}) = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{P}}(\alpha)} = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{n v_{\mathfrak{P}}(\alpha)} = (\alpha)^n = (\alpha^n) = (\mathrm{N}_k^K(\alpha)).$$

Supongamos ahora que K/k es separable de grado n. En primer lugar, consideremos el caso en que además es normal, es decir, es finita de Galois. Sea

$G = G(K/k)$ el grupo de Galois y sea $\mathfrak{p} = (\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r)^e$ un primo de k. Tenemos que

$$\mathrm{N}_k^K(\alpha) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(\alpha).$$

Puesto que $v_\mathfrak{p} = (1/e) v_{\mathfrak{P}_1}$, se cumple que

$$v_\mathfrak{p}(\mathrm{N}_k^K(\alpha)) = \frac{1}{e} \sum_{\sigma \in G} v_{\mathfrak{P}_1}(\sigma(\alpha)) = \frac{1}{e} \sum_{\sigma \in G} v_{\sigma(\mathfrak{P}_1)}(\alpha).$$

Cuando σ recorre G, tenemos que $\sigma(\mathfrak{P}_1)$ recorre ef veces cada primo $\mathfrak{P}_i$, luego

$$v_\mathfrak{p}(\mathrm{N}_k^K(\alpha)) = f \sum_{i=1}^{r} v_{\mathfrak{P}_i}(\alpha) = v_\mathfrak{p}(\mathrm{N}_k^k((\alpha))).$$

Por consiguiente, $(\mathrm{N}_k^K(\alpha)) = \mathrm{N}_k^K((\alpha))$.

Consideremos ahora el caso general en que K/k es separable. Sea L la clausura normal de K sobre k. Tenemos $k \subset K \subset L$ y la extensión L/k es de Galois, luego cumple el teorema. Si $\alpha \in K^*$, tenemos que

$$(\mathrm{N}_k^L(\alpha)) = (\mathrm{N}_k^K(\alpha)^{|L:K|}) = (\mathrm{N}_k^K(\alpha))^{|L:K|}.$$

Por otro lado,

$$(\mathrm{N}_k^L(\alpha)) = \mathrm{N}_k^L((\alpha)) = \mathrm{N}_k^K((\alpha))^{|L:K|}.$$

Así, si $\mathfrak{p}$ es un primo de k, tenemos que

$$|L:K| v_\mathfrak{p}(\mathrm{N}_k^K(\alpha)) = |L:K| v_\mathfrak{p}(\mathrm{N}_k^K((\alpha))),$$

con lo que, tras simplificar $|L:K|$, concluimos que $(\mathrm{N}_k^K(\alpha)) = \mathrm{N}_k^K((\alpha))$. ∎

En particular, si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación regular no constante entre curvas proyectivas regulares, entonces la norma de un punto $P \in V$ es simplemente $\phi(P)$, luego la aplicación norma $\phi : \mathcal{D}_V \longrightarrow \mathcal{D}_W$ es simplemente la extensión lineal de ϕ al grupo de divisores. Por ello, la seguiremos llamando ϕ.

Definición 5.40 Si K es un cuerpo de funciones algebraicas, la aplicación que a cada divisor primo le asigna su grado se extiende por linealidad a un homomorfismo

$$\mathrm{grad} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

con lo que tenemos definido el *grado* de un divisor arbitrario, de modo que

$$\mathrm{grad}\, \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathrm{grad}\, \mathfrak{a} + \mathrm{grad}\, \mathfrak{b}, \qquad \mathrm{grad}\, \mathfrak{a}^{-1} = -\mathrm{grad}\, \mathfrak{a}.$$

Si $\mathfrak{P}$ es un primo en K, la relación (5.1) puede escribirse ahora en la forma

$$\mathrm{grad}_K \mathfrak{P} = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \,\mathrm{grad}_k \mathfrak{p} = \mathrm{grad}_k \mathfrak{p}^f = \mathrm{grad}_k \mathrm{N}_k^K(\mathfrak{P}).$$

Como el primer y el último término son ambos multiplicativos, esta relación es válida por linealidad para todo divisor, es decir, para todo $\mathfrak{a} \in \mathcal{D}$ se cumple que

$$\operatorname{grad}_K \mathfrak{a} = \operatorname{grad}_k \mathrm{N}_k^K(\mathfrak{a}). \tag{5.4}$$

En particular, si $\mathfrak{a} \in \mathcal{D}_k$ tenemos que

$$\operatorname{grad}_K \mathfrak{a} = |K : k| \operatorname{grad}_k \mathfrak{a},$$

de modo que el grado de un divisor depende de la extensión en que lo consideremos.

Este concepto de grado nos permite expresar una condición necesaria para que una distribución posible de ceros y polos sea realizable en un cuerpo de funciones algebraicas, es decir, para que un divisor sea principal:

Teorema 5.41 *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas, entonces los divisores principales de K tienen grado* 0*. Si $K = k_0(x)$ es un cuerpo de fracciones algebraicas, entonces los divisores principales son exactamente los de grado* 0*.*

Demostración: Consideremos primero el caso de un cuerpo de fracciones algebraicas $k = k_0(x)$. Si $\alpha \in k^*$ es constante, entonces $(\alpha) = 1$, luego por definición $\operatorname{grad}(\alpha) = 0$. Por otra parte, todo $\alpha \in k^*$ no constante se expresa de forma única como

$$\alpha = p_1(x)^{r_1} \cdots p_n(x)^{r_n},$$

donde $p_i(x)$ son polinomios irreducibles y los exponentes son enteros no nulos. Si llamamos $\mathfrak{p}_i = (p_i(x))$, tenemos que $(\alpha) = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{r_n} \infty^r$, donde

$$r = v_\infty(\alpha) = -\operatorname{grad} \alpha = -\sum_{i=1}^n r_i \operatorname{grad} p_i(x) = -\sum_{i=1}^n r_i \operatorname{grad} \mathfrak{p}_i.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\operatorname{grad} \infty = 1$, concluimos que

$$\operatorname{grad}(\alpha) = \sum_{i=1}^n r_i \operatorname{grad} \mathfrak{p}_i + r \operatorname{grad} \infty = 0,$$

luego todos los divisores principales de k tienen grado 0.

Recíprocamente, si $\operatorname{grad} \mathfrak{a} = 0$, para cada primo finito $\mathfrak{p}$, tomamos un polinomio $p_\mathfrak{p}(x) \in k_0[x]$ tal que $\mathfrak{p} = (p_\mathfrak{p}(x))$ y definimos

$$\alpha = \prod_\mathfrak{p} p_\mathfrak{p}(x)^{v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})}.$$

El producto es finito, luego $\alpha \in k^*$. Por construcción $v_\mathfrak{p}(\alpha) = v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})$ para todo primo finito $\mathfrak{p}$ y, del hecho de que tanto (α) como $\mathfrak{a}$ tienen grado 0, se sigue fácilmente que $v_\infty(\alpha) = v_\infty(\mathfrak{a})$, luego $\mathfrak{a} = (\alpha)$. Así pues, todo divisor de grado 0 es principal.

Si K es un cuerpo arbitrario y $x \in K$ es trascendente sobre k_0, tenemos que $k = k_0(x) \subset K$ y, por la parte ya probada, todos los divisores principales de k tienen grado 0. Ahora basta aplicar la fórmula (5.4) junto con el hecho de que la norma de un divisor principal es principal. ∎

Por ejemplo, si el cuerpo de constantes es algebraicamente cerrado (y, por consiguiente, todos los divisores primos tienen grado 1), vemos que la suma de los órdenes de una función algebraica en todos los puntos ha de ser nula. Más precisamente:

Teorema 5.42 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0 algebraicamente cerrado y $x \in K$ una función no constante. Entonces el número de ceros de x es igual al número de polos (contados ambos con sus multiplicidades) y además dicho número es $|K : k_0(x)|$.*

DEMOSTRACIÓN: Teniendo en cuenta que los divisores primos de K tienen todos grado 1, el grado de (α) es precisamente el número de ceros de α menos el número de polos, luego dicha diferencia es nula.

Como elemento de $k = k_0(x)$, se cumple $(x) = \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$, donde $\mathfrak{p}$ es el divisor asociado al primo x de $k_0[x]$ y $\mathfrak{q}$ es el primo infinito. El número de ceros de x es el número de factores primos de $\mathfrak{p}$ en K, es decir, el grado de $\mathfrak{p}$ en K. Ahora basta aplicar la relación $\operatorname{grad}_K \mathfrak{p} = |K : k| \operatorname{grad}_k(\mathfrak{p}) = |K : k|$. ∎

El teorema siguiente muestra que tener grado 0 no es suficiente en general para que un divisor sea principal:

Teorema 5.43 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes algebraicamente cerrado. Si todos los divisores de grado 0 de K son principales, entonces K es un cuerpo de fracciones algebraicas.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ dos divisores primos distintos en K. Como el cuerpo de constantes k_0 es algebraicamente cerrado, $\operatorname{grad}\mathfrak{P} = \operatorname{grad}\mathfrak{Q} = 1$, luego $\operatorname{grad}\mathfrak{P}/\mathfrak{Q} = 0$ y, por hipótesis, existe $x \in K$ tal que $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q} = (x)$. La función x tiene un único cero y un único polo, luego el teorema anterior nos da que $K = k_0(x)$. ∎

Definición 5.44 Sea K un cuerpo de funciones algebraicas, sea $\mathcal{D}$ su grupo de divisores y P el grupo de los divisores principales. Llamaremos *grupo de clases* de K al grupo cociente $\mathcal{H} = \mathcal{D}/P$. Diremos que dos divisores $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{D}$ son *equivalentes* si son congruentes módulo P, es decir, si $\mathfrak{a} = (\alpha)\mathfrak{b}$, para cierto $\alpha \in K^*$. Cuando hablemos de *clases* de divisores, se entenderá que nos referimos a clases de congruencia módulo P.

Como los divisores principales tienen todos grado 0, resulta que dos divisores equivalentes tienen el mismo grado, por lo que podemos hablar del grado de una clase de divisores. En otros términos, tenemos el homomorfismo

$$\operatorname{grad} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Si K/k es una extensión de cuerpos de funciones algebraicas, la inclusión $\mathcal{D}_k \longrightarrow \mathcal{D}_K$ induce un homomorfismo de grupos $\mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_K$. Además, el teorema 5.39 nos da que la norma induce un homomorfismo $\mathrm{N}_k^K : \mathcal{H}_K \longrightarrow \mathcal{H}_k$.

El diferente de una extensión Sea K/k una extensión separable de cuerpos de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0. Sea $\mathfrak{P}$ un divisor primo de K y sea $\mathfrak{p}$ el divisor primo de k al cual divide. Como $K_{\mathfrak{P}} = Kk_{\mathfrak{p}}$, tenemos que la extensión local $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ también es separable. Por [TAl 5.24] tenemos que $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ es una extensión (separable) de dominios de Dedekind, luego está definido su diferente [TAl 9.21], que es un ideal de $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ (es decir, una potencia de $\mathfrak{P}$) que podemos identificar con un divisor entero $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}$ de K. Su propiedad más destacada es el teorema [TAl 9.29], según el cual $\mathfrak{P}$ se ramifica sobre $\mathfrak{p}$ si y sólo si $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}$.

Usando esto podemos probar:

Teorema 5.45 *El número de primos ramificados de una extensión separable de cuerpos de funciones algebraicas es finito.*

Demostración: Sea K/k una extensión separable de cuerpos de funciones algebraicas. Como k_0 es perfecto, existe $x \in k$ tal que la extensión $k/k_0(x)$ es finita separable, al igual que $K/k_0(x)$. Basta probar que el número de primos de $k_0(x)$ ramificados en K es finito. Equivalentemente, podemos suponer que $k = k_0(x)$.

Sea $K = k(\alpha)$ y sea $f(x)$ el polinomio mínimo de α en k. Por [TAl 2.16] podemos suponer que α es entero sobre $k_0[x]$. Si $\mathfrak{P}$ es un primo de K que divide a un primo finito $\mathfrak{p}$ de k, por [TAl 5.25] tenemos que $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ es una extensión (separable) de dominios de Dedekind.

En particular, α es entero sobre $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, luego $\alpha \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$. Como $K_{\mathfrak{P}} = k_{\mathfrak{p}}(\alpha)$, podemos aplicar el teorema [TAl 9.23] para concluir que $g'(\alpha) \in \mathfrak{D}_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}$, donde $g(x)$ es el polinomio mínimo de α en $k_{\mathfrak{p}}[x]$. Puesto que $g(x) \mid f(x)$, es claro que $g'(\alpha) \mid f'(\alpha)$. Así pues, $f'(\alpha) \in \mathfrak{D}_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}$. Si $\mathfrak{D}_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}} \neq 1$, esto implica que $v_{\mathfrak{P}}(f'(\alpha)) > 0$.

Teniendo en cuenta que $f'(\alpha) \in K^*$, concluimos que $\mathfrak{D}_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}} \neq 1$ a lo sumo para un número finito de primos (los divisores del primo infinito de k y los que cumplan $v_{\mathfrak{P}}(f'(\alpha)) > 0$). Por 5.36, el número de primos ramificados es finito. ∎

Notemos que la hipótesis de separabilidad no puede eliminarse, pues el teorema 5.23 implica que en una extensión puramente inseparable todos los primos se ramifican.

Señalamos también que el teorema anterior generaliza sustancialmente al hecho de que si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación regular no constante entre dos curvas proyectivas sobre $\mathbb{C}$, el número de puntos $P \in V$ tales que $e(\phi, P) > 1$ (en el sentido de [VC A.14]) es finito, pues tales puntos se corresponden con los divisores primos de $\mathbb{C}(V)$ ramificados sobre $\mathbb{C}(W)$.

Definición 5.46 Sea K/k una extensión separable de cuerpos de funciones algebraicas. Para cada primo $\mathfrak{P}$ de K definimos el *diferente local* en $\mathfrak{P}$ como el diferente $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}$ de la extensión $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$, donde $\mathfrak{p}$ es el primo de k divisible entre $\mathfrak{P}$. Podemos identificar a $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}$ con un divisor de K (potencia de $\mathfrak{P}$).

Por el teorema anterior se cumple que $\mathfrak{D}_\mathfrak{P} = 1$ salvo a lo sumo para una cantidad finita de primos, luego podemos definir el *diferente* de la extensión como el divisor

$$\mathfrak{D}_{K/k} = \prod_\mathfrak{P} \mathfrak{D}_\mathfrak{P} \in \mathcal{D}_K.$$

Se trata de un divisor entero cuyos factores primos son los primos de K ramificados sobre k. El teorema [TAl 9.24] implica inmediatamente que si $k \subset K \subset L$ es una cadena de extensiones separables de cuerpos de funciones algebraicas entonces

$$\mathfrak{D}_{L/k} = \mathfrak{D}_{L/K}\mathfrak{D}_{K/k}.$$

El teorema [TAl 9.29] nos permite calcular el discriminante de una extensión de cuerpos de funciones algebraicas bajo una restricción mínima:

Teorema 5.47 *Sea K/k una extensión separable de cuerpos de funciones algebraicas tal que* $\operatorname{car} k = 0$ *o bien* $\operatorname{car} k = p$ *es un primo que no divide al índice de ramificación de ningún divisor primo de K. Entonces*

$$\mathfrak{D}_{K/k} = \prod_\mathfrak{P} \mathfrak{P}^{e(\mathfrak{P})-1}.$$

Demostración: Sea $\mathfrak{P}$ un divisor primo de K y $\mathfrak{p}$ el primo de k al cual divide. Según la definición de diferente, basta probar que $\mathfrak{D}_\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{e(\mathfrak{P})-1}$, donde $\mathfrak{D}_\mathfrak{P}$ es el diferente de la extensión local $K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}$. Según el teorema [TAl 9.29] esto sucede si $\mathfrak{P} \nmid e(\mathfrak{P})$. Ahora bien, $e(\mathfrak{P})$ (visto como elemento de $K_\mathfrak{P}$) es una constante, luego sólo podría ser múltiplo de $\mathfrak{P}$ si fuera nula, pero esta posibilidad la excluye la hipótesis del teorema. ∎

5.5 Extensiones de constantes

Estudiamos ahora las extensiones que nos conectarán los cuerpos de funciones algebraicos arbitrarios con los cuerpos sobre cuerpos de constantes algebraicamente cerrados.

Definición 5.48 Si K es un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0, una *extensión (finita) de constantes* de K es un cuerpo L obtenido adjuntando a K un conjunto (finito) de elementos algebraicos sobre k_0.

Puesto que estamos suponiendo que k_0 es perfecto, las extensiones de constantes son separables. Comencemos estudiando las extensiones finitas. Sea, pues, $L = K(A)$, donde A es un conjunto finito de elementos algebraicos sobre k_0. Entonces $k_1 = k_0(A) = k_0(\alpha)$, para un cierto α (algebraico sobre k_0), y es claro que $L = K(\alpha)$. Tenemos que L es también un cuerpo de funciones algebraicas sobre k_0. Si éste es el cuerpo de constantes exacto de K, entonces el polinomio mínimo de α sobre K tiene sus coeficientes en k_0, pues éstos dependen polinómicamente de sus raíces, luego son algebraicos sobre k_0. Por consiguiente $|L : K| = |k_1 : k_0|$.

Más concretamente, las potencias de α son a la vez una k_0-base de k_1 y una K-base de L. De aquí se sigue fácilmente que cualquier k_0-base de k_1 es una K-base de L.

Se cumple que k_1 es el cuerpo de constantes exacto de L, pues si éste fuera un cuerpo mayor $k_2 = k_0(\beta)$, el mismo razonamiento nos daría que

$$|L : K| \geq |K(\beta) : K| = |k_2 : k_0| > |k_1 : k_0| = |L : K|,$$

lo cual es absurdo. Con esto es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 5.49 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre el cuerpo de constantes exacto k_0. Si fijamos una clausura algebraica de K y, en ella, la clausura algebraica de k_0, la correspondencia $k_1 \mapsto Kk_1$ es una biyección entre las extensiones finitas de k_0 y las extensiones finitas de constantes de K. Esta correspondencia conserva los grados de las extensiones y su inversa asigna a cada extensión finita de constantes L de K su cuerpo de constantes exacto.*

Si K es un cuerpo de funciones algebraicas y L es una extensión finita de constantes, cuando consideramos un divisor de K como divisor de L, su grado se multiplica por $|L : K|$, pero si pasamos a considerar el grado respecto al cuerpo de constantes exacto de L, éste de divide de nuevo entre $|L : K|$, luego vuelve a ser el grado inicial.

Llamaremos *grado absoluto* de un divisor en un cuerpo de funciones a su grado respecto al cuerpo de constantes exacto. Acabamos de probar que el grado absoluto de un divisor se conserva al extender las constantes.

El teorema siguiente describe las descomposiciones de los primos en las extensiones de constantes.

Teorema 5.50 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas y L una extensión finita de constantes de K. Sean k_0 y k_1 los respectivos cuerpos exactos de constantes. Entonces:*

1. *El grado absoluto de los divisores de K se conserva al considerarlos como divisores de L.*
2. *Si $\mathfrak{P}$ es un primo de L y $\mathfrak{p}$ es el primo de K divisible entre $\mathfrak{P}$, entonces $\overline{L}_{\mathfrak{P}} = \overline{K}_{\mathfrak{p}} k_1$.*
3. *Ningún primo de K se ramifica en L.*
4. *Los primos de grado 1 de K se conservan primos en L.*
5. *Si $\mathfrak{p}$ es un primo de K de grado r, existe una extensión de constantes L de K donde $\mathfrak{p}$ se descompone en r primos de grado 1.*

Demostración: Ya hemos probado que el grado absoluto se conserva. Tomemos ahora un primo $\mathfrak{P}$ de L y sea $\mathfrak{p}$ el primo de K divisible entre $\mathfrak{P}$. Si $k_1 = k_0(\alpha)$, entonces $L = K(\alpha)$ y $L_{\mathfrak{P}} = K_{\mathfrak{p}}(\alpha)$. Sea $k_{0\mathfrak{p}}$ la clausura algebraica

de k_0 en $K_\mathfrak{p}$. Según 5.19, tenemos que $k_{0\mathfrak{p}}$ es isomorfo a $\overline{K}_\mathfrak{p}$. El polinomio mínimo de α sobre $K_\mathfrak{p}$ tiene sus coeficientes en $k_{0\mathfrak{p}}$, luego

$$n_\mathfrak{P} = |L_\mathfrak{P} : K_\mathfrak{p}| \geq |\overline{L}_\mathfrak{P} : \overline{K}_\mathfrak{p}| \geq |k_{0\mathfrak{p}}(\alpha) : k_{0\mathfrak{p}}| = n_\mathfrak{P}.$$

Así pues, $n_\mathfrak{P} = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ y el índice de ramificación ha de ser trivial. Esto prueba 3). Además $\overline{L}_\mathfrak{P} = K_\mathfrak{p}(\alpha) = K_\mathfrak{p}k_1$, lo que prueba 2).

Si $\operatorname{grad}\mathfrak{p} = 1$, entonces $k_{0\mathfrak{p}} = k_0$, con lo que

$$f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = n_\mathfrak{P} = |k_0(\alpha) : k_0| = |k_1 : k_0| = |L : K|,$$

de donde se sigue que $\mathfrak{p}$ se conserva primo en L.

Por otra parte, si $\mathfrak{p}$ es un primo de K de grado r, tendremos que $k_{0\mathfrak{p}} = k_0(\beta)$, para cierto β. Adjuntándole a k_0 las raíces del polinomio mínimo de β sobre k_0 obtenemos una extensión k_1 de k_0 que a su vez determina una extensión de constantes L de K. Si $\mathfrak{P}$ es un divisor de $\mathfrak{p}$ en L entonces, por 2) tenemos que $\overline{L}_\mathfrak{P}$ es la adjunción a $\overline{K}_\mathfrak{p} = k_0(\beta)$ de las raíces del polinomio mínimo de β, o también la adjunción a k_0 de estas raíces, luego $\overline{L}_\mathfrak{P} = k_1$, de donde se sigue que los divisores de $\mathfrak{p}$ en L tienen grado (absoluto) 1. Como $\mathfrak{p}$ tiene grado r respecto de k_1, tenemos que $\mathfrak{p}$ se descompone en L en r factores de grado 1. ∎

Extensiones infinitas de constantes Veamos ahora que todos estos hechos se generalizan fácilmente a extensiones infinitas de constantes.

En primer lugar, si K es un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0 y k_1 es una extensión algebraica de k_0, la extensión de constantes $L = Kk_1$ es un cuerpo de funciones algebraicas sobre k_1. En efecto, si $K = k_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, entonces $L = k_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, luego L es finitamente generado sobre k_1 y, como las extensiones algebraicas no alteran el grado de trascendencia, tenemos que L sigue teniendo grado de trascendencia 1 sobre k_0 y también sobre k_1.

Es importante tener presente que si la extensión k_1/k_0 es infinita entonces L no es un cuerpo de funciones algebraicas sobre k_0. No obstante, es claro que L es la unión de todas las extensiones finitas de constantes de K contenidas en L, y esto es la clave para generalizar a extensiones infinitas de constantes todos los resultados que conocemos para extensiones finitas.

Por ejemplo, si k_0 es el cuerpo de constantes exacto de K, entonces k_1 es el cuerpo de constantes exacto de L. Para probarlo basta tener en cuenta que si $\alpha \in L$ es algebraico sobre k_1, entonces también lo es sobre k_0 y está en una extensión finita de constantes Kk_2, donde $k_0 \subset k_2 \subset k_1$, luego $\alpha \in k_2$ por la propiedad correspondiente para extensiones finitas.

A partir de aquí, por simplicidad, vamos a considerar únicamente el caso de más interés, a saber, cuando k_0 es el cuerpo de constantes exacto de k y $K = \bar{k}_0 k$, si bien las conclusiones que vamos a obtener se adaptan con cambios mínimos a extensiones algebraicas arbitrarias de k_0.

Para cada extensión finita de Galois k_1/k_0, por [Al 7.45], la restricción induce un isomorfismo de grupos $G(k_1k/k) \longrightarrow G(k_1/k_0)$, de donde a su vez concluimos que la restricción induce un isomorfismo $G(K/k) \longrightarrow G(\bar{k}_0/k_0)$. Equivalentemente, cada $\sigma \in G(\bar{k}_0/k_0)$ tiene una extensión única a $G(K/k)$. Esto determina una acción de $G(\bar{k}_0/k_0)$ en Σ_K mediante $v_{\mathfrak{P}}(\alpha) = v_{\mathfrak{P}^\sigma}(\sigma(\alpha))$.

Ahora, si $\mathfrak{p} \in \Sigma_k$ tiene grado r, el teorema 5.50 nos da una extensión finita k_1/k_0 (que podemos tomar de Galois) tal que en k_1k se cumple que $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_r$, con todos los factores de grado 1. Como la extensión k_1k/k también es finita de Galois, el teorema 5.27 nos da que los primos $\mathfrak{P}'_i$ forman una clase de conjugación respecto de la acción de $G(k_1k/k)$.

La ausencia de ramificación se traduce en que las valoraciones $v_{\mathfrak{P}'_i}$ extienden a $v_{\mathfrak{p}}$ (si hubiera ramificación tendríamos que $v_{\mathfrak{P}'_i}|_K = ev_{\mathfrak{p}}$) y por el mismo motivo, dado que cada $\mathfrak{P}'_i$ se conserva primo en cualquier extensión de constantes de k_1k, concluimos que cada $v_{\mathfrak{P}'_i}$ se extiende a una única valoración en K, digamos $v_{\mathfrak{P}_i}$. La unicidad hace que los primos $\mathfrak{P}_i$ formen una clase de conjugación respecto de $G(\bar{k}_0/k_0)$.

La aplicación $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$ es inyectiva y se extiende a un monomorfismo de grupos $\mathcal{D}_k \longrightarrow \mathcal{D}_K$. En total hemos probado lo siguiente:

Teorema 5.51 *Sea k un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes exacto k_0 y sea $K = \bar{k}_0k$. Entonces existe un monomorfismo de grupos $\mathcal{D}_k \longrightarrow \mathcal{D}_K$ determinado por que si $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$, entonces las valoraciones $v_{\mathfrak{P}_i}$ son las extensiones de $v_{\mathfrak{p}}$ a K, y forman una clase de conjugación respecto a la acción de $G(\bar{k}_0/k_0)$. Además r es el grado absoluto de $\mathfrak{p}$, por lo que el monomorfismo conserva el grado de los divisores.*

Más aún, es fácil ver que si $\alpha \in k \subset K$, entonces (α) como divisor en $\mathcal{D}_K$ es la imagen de (α) como divisor en $\mathcal{D}_k$.

Divisores primos en cuerpos de funciones racionales Ahora ya podemos interpretar los divisores primos del cuerpo de funciones racionales de una curva proyectiva regular $k_0(V)$ cuando el cuerpo k_0 no es algebraicamente cerrado.

En primer lugar observamos que $K = \bar{k}_0(V)$ es una extensión de constantes del cuerpo $k = k_0(V)$. Tenemos una biyección $\Sigma_K \longrightarrow V(\bar{k}_0)$, y es fácil ver que hace corresponder la acción de $G(\bar{k}_0/k_0)$ en ambos conjuntos, es decir, que si $\sigma \in G(\bar{k}_0/k_0)$ y $\mathfrak{P}$ es el divisor asociado al punto $P \in V(\bar{k}_0)$, entonces $\mathfrak{P}^\sigma$ es el divisor asociado a P^σ. En efecto, esto equivale a que una función $\alpha \in k_0(V)$ tiene en P un cero o un polo del mismo orden que α^σ en P^σ, es decir, que $v_{P^\sigma}(\alpha^\sigma) = v_P(\alpha)$.

Según el teorema anterior, cada divisor primo de k de grado r está determinado por una clase de conjugación de r divisores de K o, equivalentemente, por una clase de conjugación de r puntos de $V(\bar{k}_0)$. Así, el divisor $\mathfrak{p}$ asociado a una clase de puntos $P_1, \ldots, P_r$ es la valoración que a cada función $\alpha \in k_0(V)$ le asigna el valor $v_{P_i}(\alpha)$, que es independiente del punto P_i elegido. En particular, los divisores primos de grado 1 de k se corresponden con los puntos racionales de V, es decir, con los puntos de $V(k_0)$.

Ejemplo Consideremos (la clausura proyectiva de) la circunferencia

$$V = V(X^2 + Y^2 - 3).$$

Se trata de una curva proyectiva regular, por lo que los divisores primos de $\mathbb{C}(V)$ se corresponden con los puntos de $V(\mathbb{C})$. En cambio, el cuerpo $\mathbb{R}(V)$ tiene divisores primos de grado 1, que se corresponden con los puntos de la circunferencia "real", y también divisores primos de grado 2, cada uno de los cuales se corresponde con un par de puntos conjugados de V. Así, un divisor primo $\mathfrak{p}$ será el correspondiente al par $(2, \pm i)$, de modo que, por ejemplo, $v_\mathfrak{p}(y^2+1) = 1$, pues la función y^2+1 tiene un cero de orden 1 en cualquiera de los dos puntos. ∎

5.6 Funciones algebraicas complejas

Estudiamos ahora con más detalle el caso de los cuerpos de funciones algebraicas sobre $k_0 = \mathbb{C}$. Empezamos con una observación general:

Definición 5.52 Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes algebraicamente cerrado k_0 y sea $\alpha \in K$. Para cada $\mathfrak{P} \in \Sigma_K$, definimos $\alpha(\mathfrak{P}) \in k_0 \cup \{\infty\}$ como sigue:

1. Si $v_\mathfrak{P}(\alpha) \geq 0$, tenemos que $\alpha \in \mathcal{O}_\mathfrak{P}$ y $\mathcal{O}_\mathfrak{P}/\mathfrak{P} = \overline{K}_\mathfrak{P} \cong k_0$, luego podemos tomar como $\alpha(\mathfrak{P}) \in k_0$ el único elemento que cumple
$$\alpha \equiv \alpha(\mathfrak{P}) \text{ (mód } \mathfrak{P}).$$
2. Si $v_\mathfrak{P}(\alpha) < 0$ definimos $\alpha(\mathfrak{P}) = \infty$.

Así tenemos definida una función $\alpha : \Sigma_K \longrightarrow k_0 \cup \{\infty\}$ que podemos identificar con α, pues si α, $\beta \in K$ determinan la misma función, entonces para todos los divisores primos $\mathfrak{P}$ de K tales que $v_\mathfrak{P}(\alpha) \geq 0$ y $v_\mathfrak{P}(\beta) \geq 0$ (todos salvo una cantidad finita) se cumple $\alpha \equiv \beta$ (mód $\mathfrak{P}$), luego $v_\mathfrak{P}(\alpha - \beta) > 0$, luego $\alpha - \beta$ tiene infinitos ceros, luego $\alpha = \beta$ por 5.36.

Más aún, si $\mathfrak{P}$ no es un polo de ninguna de las dos funciones α, $\beta \in K$, entonces

$$(\alpha + \beta)(\mathfrak{P}) = \alpha(\mathfrak{P}) + \beta(\mathfrak{P}), \qquad (\alpha\beta)(\mathfrak{P}) = \alpha(\mathfrak{P})\beta(\mathfrak{P}).$$

En resumen, si el cuerpo de constantes k_0 es algebraicamente cerrado, los elementos de un cuerpo de funciones algebraicas K pueden verse como funciones sobre Σ_K con valores en $k_0 \cup \{\infty\}$ y las operaciones de K se corresponden con las definidas puntualmente.

Si V es una curva proyectiva regular, cada $\alpha \in k_0(V)$ puede verse como función sobre $V(k_0)$ o como función sobre Σ_V. Ambas funciones se corresponden a través de la biyección natural entre ambos conjuntos. En efecto, si un primo $\mathfrak{P}$ de V está situado sobre un punto $P \in V(k_0)$ y $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$, se cumple que $\alpha - \alpha(P) \in \mathfrak{m}_P \subset \mathfrak{P}$, luego $\alpha(\mathfrak{P}) = \alpha(P)$. Esto nos dice que al identificar $V(k_0)$ con Σ_V cada función $\alpha \in k_0(V)$ se identifica consigo misma. ∎

A partir de aquí consideramos exclusivamente el caso $k_0 = \mathbb{C}$. Sabemos que los cuerpos de funciones algebraicas sobre $\mathbb{C}$ pueden identificarse con los cuerpos de funciones racionales de las curvas proyectivas regulares, las cuales son superficies de Riemann. Vamos a ver que los conjuntos de divisores primos también admiten una estructura natural de superficie de Riemann.

Teorema 5.53 *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas complejas, entonces Σ_K admite una única estructura de superficie de Riemann compacta respecto a la cual $\mathcal{M}(\Sigma_K) = K$.*

Demostración: Veamos primero la existencia. Supongamos primero que $K = \mathbb{C}(V)$, donde V es una curva proyectiva regular. (Por claridad, aquí distinguiremos entre V y Σ_V.) La biyección natural $f : \Sigma_V \longrightarrow V$ permite transportar la estructura analítica de V al conjunto Σ_V, con lo que se convierte en una superficie de Riemann y f pasa a ser una aplicación biholomorfa. Además las funciones meromorfas de Σ_V pasan a ser las composiciones de f con las funciones meromorfas de V, que son las funciones de $\mathbb{C}(V)$. Ahora bien, según acabamos de observar, dichas composiciones son precisamente las funciones de $\mathbb{C}(V)$ vistas como funciones sobre Σ_V. Así, $\mathcal{M}(\Sigma_V) = \mathbb{C}(V)$.

Si K es un cuerpo arbitrario, el teorema 5.2 (y la observación posterior) nos dan una curva proyectiva regular V y un $\mathbb{C}$-isomorfismo $\overline{\phi} : \mathbb{C}(V) \longrightarrow K$. Es claro que $\overline{\phi}$ induce una biyección natural $\phi : \Sigma_K \longrightarrow \Sigma_V$, de modo que, para todo $\alpha \in \mathbb{C}(V)$ y todo $\mathfrak{P} \in \Sigma_K$, se cumple $\overline{\phi}(\alpha)(\mathfrak{P}) = \alpha(\phi(\mathfrak{P}))$.

Esta biyección nos permite a su vez transportar la estructura analítica que hemos definido en Σ_V al conjunto Σ_K, y con ello ϕ se convierte en una aplicación biholomorfa. Las funciones meromorfas de Σ_K son precisamente las composiciones con ϕ de las funciones de $\mathbb{C}(V)$, pero estas composiciones son precisamente las funciones de K. Así pues, $\mathcal{M}(\Sigma_K) = K$.

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que tenemos dos estructuras de superficie de Riemann compacta sobre Σ_K y veamos que son la misma. Basta ver que la identidad $I : \Sigma_K \longrightarrow \Sigma_K$ es una aplicación biholomorfa entre ambas estructuras. Sea $z \in K$ cualquier función no constante. Sea E el conjunto (finito) de los puntos $\mathfrak{P} \in \Sigma_K$ tales que $e(z, \mathfrak{P}) > 1$ respecto de alguna de las dos estructuras, es decir, donde z no es localmente inyectiva (definición [VC A.14]).

Así z se restringe a una carta en un entorno de cada punto de $\Sigma_K \setminus E$ (para ambas estructuras), de donde se sigue que la identidad $I : \Sigma_K \setminus E \longrightarrow \Sigma_K \setminus E$ es biholomorfa de una estructura en la otra.

Veamos ahora que I es continua en los puntos de E. Dado $\mathfrak{P} \in E$, sea $\alpha \in K$ tal que $\alpha(\mathfrak{P}) = 0$ y sean $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1, \dots \mathfrak{P}_n$ los divisores primos donde se anula α. Por el teorema de aproximación [Al 5.46] existe $\beta \in K$ tal que $\beta(\mathfrak{P}) = 0$ y $\beta(\mathfrak{P}_i) \neq 0$ para $i = 2, \dots, n$. De este modo, $\mathfrak{P}$ es el único punto de Σ_K donde $\alpha(\mathfrak{P}) = \beta(\mathfrak{P}) = 0$.

Sea $\{x_n\} \subset \Sigma_K$ una sucesión que converja a $\mathfrak{P}$ respecto de una de las topologías. Por compacidad, tomando una subsucesión si es preciso, podemos suponer que $\{x_n\}$ converge a un punto $\mathfrak{Q}$ respecto de la otra topología, pero

como α y β son continuas para ambas, tenemos que $\alpha(x_n)$ y $\beta(x_n)$ convergen a 0 y $\alpha(\mathfrak{Q}) = \beta(\mathfrak{Q}) = 0$, luego $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$. Esto prueba que la identidad es continua, luego por compacidad es un homeomorfismo. En otras palabras, ambas estructuras inducen la misma topología.

Veamos, por último, que I es holomorfa en todo punto $\mathfrak{P} \in E$. Tomamos cartas X e Y alrededor de $\mathfrak{P}$ para ambas estructuras tales que $X(\mathfrak{P}) = Y(\mathfrak{P}) = 0$ cuyos dominios no contengan otros puntos de E. Entonces $f = X^{-1} \circ Y$ es un homeomorfismo de un entorno de 0 en un entorno de 0 y, como I es holomorfa en $\Sigma_K \setminus E$, tenemos que f es holomorfa salvo a lo sumo en 0. Es claro entonces que 0 es una singularidad evitable [VC 2.27], luego, de hecho, f es holomorfa en 0 y la identidad I es holomorfa en $\mathfrak{P}$. ∎

Así pues, podemos hablar de la *superficie de Riemann* Σ_K de un cuerpo de funciones algebraicas K sobre $\mathbb{C}$. De la prueba del teorema anterior se sigue que si V es una curva proyectiva regular, entonces la identificación $\Sigma_V \longrightarrow V$ es biholomorfa, lo cual significa que la identificación entre V y Σ_V no da lugar a ninguna ambigüedad en lo referente a las estructuras analíticas.

Es claro que un $\mathbb{C}$-isomorfismo entre dos cuerpos de funciones algebraicas induce una biyección entre sus superficies de Riemann que permite traspasar la estructura analítica de una a la otra. Por la unicidad concluimos que dicha biyección ha de ser biholomorfa. Por consiguiente:

Teorema 5.54 *Dos cuerpos de funciones algebraicas complejas son $\mathbb{C}$-isomorfos si y sólo si sus superficies de Riemann son biholomorfas.*

De aquí se sigue que si V es una curva proyectiva, no necesariamente regular, la superficie de Riemann de Σ_V es conformemente equivalente a la regularización de V (pues $\mathbb{C}(V)$ es $\mathbb{C}$-isomorfo a $\mathbb{C}(V_r)$). La aplicación $\Sigma_V \longrightarrow V$ es holomorfa por el teorema 5.9.

Vamos a dar una descripción explícita de la estructura analítica de Σ_K. Teniendo en cuenta que todo cuerpo K de funciones algebraicas puede verse como el cuerpo de funciones racionales de una curva proyectiva regular V, el teorema 4.6 se traduce inmediatamente a una descripción de la topología de Σ_K:

Teorema 5.55 *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas complejas, una base de Σ_K la forman los conjuntos*

$$U(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \epsilon) = \{\mathfrak{P} \in \Sigma_K \mid \alpha_i \in \mathfrak{O}_\mathfrak{P} \ y \ |\alpha_i(\mathfrak{P})| < \epsilon\}, \quad \alpha_i \in K, \ \epsilon > 0.$$

También podemos describir explícitamente la estructura analítica:

Teorema 5.56 *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas complejas, $\mathfrak{P} \in \Sigma_K$ y $\alpha \in K$ cumple $v_\mathfrak{P}(\alpha) = 1$, entonces α se restringe a una aplicación biholomorfa de un entorno de $\mathfrak{P}$ en un entorno de 0.*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que $K = \mathbb{C}(V)$, donde V es una curva proyectiva regular. Sea P el primo de V situado bajo $\mathfrak{P}$. Basta probar que α se restringe a una carta en un entorno de P, pero la condición $v_{\mathfrak{P}}(\alpha) = 1$ equivale a que $(\alpha) = \mathfrak{m}_P$, es decir, a que α es un parámetro local en P, luego, en efecto, determina una carta. ∎

Más en general:

Teorema 5.57 *Sea K/k una extensión de cuerpos de funciones algebraicas complejas. Entonces la aplicación natural $\phi : \Sigma_K \longrightarrow \Sigma_k$ es holomorfa de grado $|K : k|$ (en el sentido de* [VC A.23]*) y para cada $\mathfrak{P} \in \Sigma_K$, el índice de ramificación $e_{\mathfrak{P}}$ coincide con el definido en* [VC A.14].

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que K y k son los cuerpos de funciones racionales de dos curvas proyectivas regulares V y W, y entonces la inclusión $k \subset K$ se traduce en la existencia de una aplicación regular suprayectiva $\phi : V \longrightarrow W$, que en virtud de 5.16 podemos identificar con la aplicación del enunciado. Así basta tener en cuenta las notas tras los teoremas 5.16 y 5.24. ∎

Ahora es inmediata la versión siguiente de la fórmula de Hurwitz [VC A.25] (véase la observación posterior):

Teorema 5.58 (Fórmula de Hurwitz) *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas, sea $z \in K$ una función no constante y $k = \mathbb{C}(z)$. Entonces el género g de la superficie de Riemann Σ_K viene determinado por la relación*

$$2 - 2g = 2|K : k| + \sum_{\mathfrak{P}} (1 - e_{\mathfrak{P}}),$$

donde $\mathfrak{P}$ recorre los divisores primos de K ramificados sobre k.

Con esta fórmula podemos calcular el género de una curva proyectiva no necesariamente regular (definido como el género de su regularización). El ejemplo siguiente es una reformulación del ejemplo final de la sección 8.6 de [VC]:

Ejemplo Consideremos ahora la curva "alfa" $V = V(Y^2 - X^2(X+1))$ y su cuerpo de funciones racionales, $K = \mathbb{C}(x, y)$. Vamos a estudiar la aplicación $x : V \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$. Su grado es $|K : \mathbb{C}(x)| = 2$, luego cada punto de $\mathbb{C}^\infty$ es divisible entre dos divisores primos de V con multiplicidad 1 o por uno solo con multiplicidad 2. Sabemos que el único punto singular de V es $(0, 0)$, sobre el cual puede haber más de un primo.

Si $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, entonces los divisores primos de a en V son los primos situados sobre las antiimágenes de a por x. Como entre dichas antiimágenes no está $(0, 0)$, se trata simplemente de las antiimágenes de a.

Si $a \neq -1$ entonces hay dos antiimágenes distintas, a saber $(a, \pm\sqrt{a^2(a+1)})$, luego son no ramificadas.

Si $a = -1$ hay una única antiimagen, a saber $(-1, 0)$, luego este punto tiene índice de ramificación igual a 2.

Por otra parte, V tiene un único punto en el infinito, donde x toma el valor ∞, luego dicho punto también tiene índice de ramificación igual a 2.

La única antiimagen de $a = 0$ es el punto $(0, 0)$, pero hay dos posibilidades: o bien está situado bajo dos primos distintos con multiplicidad 1 o bien bajo un único primo con multiplicidad 2. La fórmula de Hurwitz excluye esta última posibilidad, pues entonces sería

$$2 - 2g = 2 \cdot 2 + (1 - 2) + (1 - 2) + (1 - 2),$$

lo cual es imposible. Concluimos que sobre $(0, 0)$ hay dos divisores primos distintos y que el género de V es $g = 0$. En realidad ya habíamos obtenido esto en el último ejemplo de la página 137. (Recordemos que la aplicación $\Sigma_V \longrightarrow V$ es equivalente a la regularización de V.) ∎

El ejemplo siguiente es un caso particular del teorema [VC 8.38]:

Ejemplo *Para cada número natural $g \geq 1$, la curva V dada por*

$$Y^2 = X(X^2 - 1) \cdots (X^2 - g^2)$$

tiene género g.

En efecto, es fácil ver que V es irreducible y que todos sus puntos finitos son regulares. Su único punto infinito es $(0, 1, 0)$, que es singular si $g \geq 2$. Sea $K = \mathbb{C}(V) = \mathbb{C}(x, y)$ y consideremos la aplicación $x : V \longrightarrow \mathbb{C}$.

Como en el ejemplo anterior razonamos que los únicos puntos finitos ramificados son los puntos $(a, 0)$, con $a = 0, \pm 1, \ldots, \pm g$, cuyo índice de ramificación es $e = 2$.

La fórmula de Hurwitz implica que el número de primos ramificados ha de ser par, luego sobre el punto infinito no puede haber más que un divisor primo, también con $e = 2$, y así obtenemos que el género $\bar{g}$ de V cumple

$$2 - 2\bar{g} = 2 \cdot 2 + (2g + 2)(1 - 2) = 2 - 2g,$$

luego $\bar{g} = g$. ∎

Finalmente vamos a probar que toda superficie de Riemann compacta es conformemente equivalente a una curva proyectiva regular sobre $\mathbb{C}$. De este modo, todos los resultados que hemos visto —y que veremos— sobre curvas proyectivas se aplican en particular al estudio de las superficies de Riemann compactas.

El resultado no es trivial en absoluto, pero todo lo necesario lo hemos probado ya en [VC] y en las páginas precedentes.

La clave es que, si V es una superficie de Riemann compacta, en [VC A.68] demostramos que el cuerpo $\mathcal{M}(V)$ de las funciones meromorfas en V contiene funciones no constantes, luego su grado de trascendencia sobre $\mathbb{C}$ es ≥ 1. Por otra parte, en [VC 8.39] demostramos que si $z \in \mathcal{M}(V)$ no es constante, cualquier otra función $\alpha \in \mathcal{M}(X)$ es algebraica sobre $\mathbb{C}(z)$ de grado menor o igual que el

grado de z como función meromorfa (en el sentido de [VC A.23]). Esto implica que la extensión $\mathcal{M}(V)/\mathbb{C}(z)$ es algebraica y de grado finito, luego la extensión $\mathcal{M}(V)/\mathbb{C}$ es finitamente generada y tiene grado de trascendencia igual a 1. En otras palabras: $\mathcal{M}(V)$ es un cuerpo de funciones algebraicas sobre $\mathbb{C}$. Más aún:

Teorema 5.59 *Si V es una superficie de Riemann compacta, entonces el cuerpo de funciones meromorfas $K = \mathcal{M}(V)$ es un cuerpo de funciones algebraicas complejas y existe una aplicación $\phi : V \longrightarrow \Sigma_K$ biholomorfa tal que, para cada $f \in K$ y cada $P \in V$, se cumple que $f(P) = f(\phi(P))$.*

Demostración: Según acabamos de observar, K es un cuerpo de funciones algebraicas. Si $P \in V$, la aplicación $v_P : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ que a cada función meromorfa le asigna su orden en P es un homomorfismo de grupos no trivial, luego su imagen es un subgrupo $n\mathbb{Z}$, para cierto $n > 0$ (veremos que $n = 1$). La aplicación v_P/n es claramente una valoración en K. Llamemos $\phi(P)$ al divisor primo correspondiente.

Si $\alpha \in K$, entonces α es regular en P si y sólo si $v_P(\alpha) \geq 0$, si y sólo si $v_{\phi(P)}(\alpha) \geq 0$, si y sólo si α es regular en $\phi(P)$ y, en tal caso, si $\alpha(P) = a$, entonces $v_P(\alpha - a) > 0$, luego $v_{\phi(P)}(\alpha - a) > 0$, luego $\alpha(\phi(P)) = a = \alpha(P)$.

Ahora es claro que ϕ es continua, pues la antiimagen por ϕ de un abierto básico de los considerados en el teorema 5.55 es un conjunto de la misma forma en V, donde claramente es abierto.

Dado $P \in V$, sea $\alpha \in K$ tal que $v_{\phi(P)}(\alpha) = 1$. Esto implica que α se restringe a una carta en un entorno de $\phi(P)$, luego α es inyectiva en un entorno de P, lo cual implica que $v_P(\alpha) = 1$. Así pues, $v_P = v_{\phi(P)}$ (el n que aparecía en la definición es igual a 1, como anunciábamos). Más aún, la lectura de ϕ respecto de las cartas de V y Σ_K formadas por la restricción de α a un entorno de P es la identidad, luego ϕ es holomorfa en V. En particular es abierta y, como V es compacta, también es cerrada. Así pues ϕ es suprayectiva.

Por último, si P, Q son puntos distintos en V, por [VC A.68] existe $\alpha \in K$ tal que $\alpha(P) \neq \alpha(Q)$. Podemos suponer que $\alpha(P) \neq \infty$, con lo que $\beta = \alpha - \alpha(P)$ cumple $\beta(P) = 0$, $\beta(Q) \neq 0$ o, lo que es lo mismo, $v_P(\beta) > 0 \geq v_Q(\beta)$. Esto prueba que $v_P \neq v_Q$, es decir, $\phi(P) \neq \phi(Q)$ y así ϕ es biyectiva, luego es biholomorfa. ∎

Ahora ya es inmediata la conclusión que habíamos adelantado:

Teorema 5.60 *Toda superficie de Riemann compacta es biholomorfa a una curva proyectiva regular.*

Demostración: Si V es una superficie de Riemann compacta, por el teorema anterior $\mathcal{M}(V)$ es un cuerpo de funciones algebraicas complejas, luego, según hemos observado en la primera sección de este capítulo, $\mathcal{M}(V)$ es $\mathbb{C}$-isomorfo al cuerpo de funciones racionales de una curva proyectiva regular $\overline{V}$, luego por 5.54 tenemos que Σ_V es biholomorfa a $\Sigma_{\overline{V}}$, luego por el teorema anterior V es biholomorfa a $\overline{V}$. ∎

Como en el caso de las curvas proyectivas, si V es una superficie de Riemann compacta llamaremos *divisores primos de V* a los divisores primos de su cuerpo

de funciones meromorfas, y llamaremos Σ_V al conjunto de todos ellos, que según el teorema anterior es una superficie de Riemann biholomorfa a V. Más concretamente, la prueba del teorema nos muestra que podemos identificar cada punto $P \in V$ con la valoración v_P que a cada función meromorfa le asigna su orden en P (en el sentido de la teoría de funciones de variable compleja).

Si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación holomorfa no constante, entonces podemos definir una aplicación holomorfa suprayectiva (luego regular) $\psi : \overline{V} \longrightarrow \overline{W}$ que conmute con las transformaciones conformes entre V, $\overline{V}$ y W, $\overline{W}$. Entonces los $\mathbb{C}$-monomorfismos $\overline{\phi} : \mathcal{M}(W) \longrightarrow \mathcal{M}(V)$ y $\overline{\psi} : \mathbb{C}(\overline{W}) \longrightarrow \mathbb{C}(\overline{V})$ conmutan con los $\mathbb{C}$-isomorfismos $\mathcal{M}(V) \cong \mathbb{C}(\overline{V})$ y $\mathcal{M}(W) \cong \mathbb{C}(\overline{W})$. Esto implica la conmutatividad del cuadrado central del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \longrightarrow & \Sigma_V & \longrightarrow & \Sigma_{\overline{V}} & \longrightarrow & \overline{V} \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ W & \longrightarrow & \Sigma_W & \longrightarrow & \Sigma_{\overline{W}} & \longrightarrow & \overline{W} \end{array}$$

Todas las flechas horizontales son aplicaciones biholomorfas, el rectángulo exterior es conmutativo por definición de ψ y sabemos que el tercer cuadrado conmuta porque $\overline{V}$ y $\overline{W}$ son variedades proyectivas. Concluimos que el primer cuadrado también conmuta, es decir, que los divisores en V de un punto de W son precisamente sus antiimágenes.

A partir de aquí, todo lo que sabemos sobre ψ vale también para ϕ. Por ejemplo, el grado de ϕ en sentido analítico coincide con su grado algebraico, y lo mismo sucede con los índices de ramificación.

Similarmente, si partimos de un $\mathbb{C}$-monomorfismo $\overline{\phi} : \mathcal{M}(W) \longrightarrow \mathcal{M}(V)$, podemos construir otro $\overline{\psi} : \mathbb{C}(\overline{W}) \longrightarrow \mathbb{C}(\overline{V})$ que defina una $\psi : \overline{V} \longrightarrow \overline{W}$ y, a partir del diagrama anterior, definir $\phi : V \longrightarrow W$. La conclusión es la siguiente:

Teorema 5.61 *Las aplicaciones holomorfas no constantes $\phi : V \longrightarrow W$ entre dos superficies de Riemann se corresponden biunívocamente con los $\mathbb{C}$-monomorfismos $\overline{\phi} : \mathcal{M}(W) \longrightarrow \mathcal{M}(V)$ mediante la relación $\overline{\phi}(\alpha) = \phi \circ \alpha$. En particular, dos superficies de Riemann son biholomorfas si y sólo si sus cuerpos de funciones meromorfas son $\mathbb{C}$-isomorfos.*

5.7 La aplicación de Frobenius

Introducimos ahora una técnica para estudiar aplicaciones regulares inseparables. En lo que sigue supondremos que k es un cuerpo (perfecto) de característica prima p. Así, si $m = p^r$, la correspondencia $a \mapsto a^m$ define un automorfismo de $\overline{k}$ que se restringe a un automorfismo de k. Para cada polinomio $F \in \overline{k}[X_1, \ldots, X_n]$, representaremos por $F^{(m)}$ el polinomio que resulta de elevar a m todos los coeficientes de F. Esto define un automorfismo del anillo de polinomios que se restringe a un automorfismo de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

Si $C \subset \mathrm{P}^n$ es una curva proyectiva definida sobre k, entonces $I(C)$ es un ideal primo de $\overline{k}[X_1, \dots X_{n+1}]$ generado por formas de $k[X_1, \dots X_{n+1}]$, luego $I(C)^{(m)}$ cumple lo mismo y define una curva $C^{(m)} \subset \mathrm{P}^n$ definida sobre k. La curva $C^{(m)}$ está determinada por la relación

$$I(C^{(m)}) = \{F^{(m)} \mid F \in I(C)\}.$$

Ahora definimos la aplicación $\phi : C \longrightarrow C^{(m)}$ mediante

$$\phi([x_1, \dots, x_{n+1}]) = [x_1^m, \dots, x_{n+1}^m].$$

Esto es correcto, pues si $[x_1, \dots, x_{n+1}] \in C$ y $F \in I(C)$, entonces

$$F^{(m)}(x_1^m, \dots, x_{n+1}^m) = F(x_1, \dots, x_{n+1})^m = 0.$$

Obviamente ϕ es una aplicación regular definida sobre k, conocida como *aplicación de Frobenius de grado m*. A continuación probamos que, efectivamente, tiene grado m.

Teorema 5.62 *Sea C una curva proyectiva definida sobre un cuerpo k de característica prima p y sea $\phi : C \longrightarrow C^{(m)}$ la aplicación de Frobenius de grado $m = p^r$.*

1. *ϕ es puramente inseparable y tiene grado m.*
2. *$\overline{\phi}[k(C^{(m)})] = k(C)^m$.*
3. *Si C es regular, entonces $C^{(m)}$ también lo es.*

Demostración: 2) Fijado un sistema de referencia, toda $\alpha \in k(C^{(m)})$ es de la forma $\alpha = [F^{(m)}]/[G^{(m)}]$, donde F, $G \in k[X_1, \dots, X_{n+1}]$ son formas del mismo grado. Entonces, para $P = [x_1, \dots, x_{n+1}]$ en un abierto adecuado de C,

$$\overline{\phi}(\alpha)(P) = \frac{F^{(m)}(x_1^m, \dots, x_{n+1}^m)}{G^{(m)}(x_1^m, \dots, x_{n+1}^m)} = \frac{F(x_1, \dots, x_{n+1})^m}{G(x_1, \dots, x_{n+1})^m} = \beta^m(P),$$

donde $\beta = [F]/[G] \in k(C)$. Esto prueba la inclusión $\overline{\phi}[k(C^{(m)})] \subset k(C)^m$. Invirtiendo el razonamiento tenemos la inclusión contraria.

1) Ahora es obvio que ϕ es puramente inseparable. Falta probar que su grado es m. Sea $t \in k(C)$ tal que la extensión $k(C)/k(t)$ sea separable. Esto equivale a que $t \notin k(C)^p$. Entonces, todo elemento de $k(C)$ es separable sobre $k(t)$, luego sobre $k(C)^m(t)$ y es puramente inseparable sobre $k(C)^m$, luego sobre $k(C)^m(t)$, luego $k(C) = k(C)^m(t)$. Por consiguiente,

$$\operatorname{grad} \phi = |k(C)^m(t) : k(C)^m|.$$

Ahora bien, del hecho de que $t \notin k(C)^p$ se sigue que el polinomio mínimo de t sobre $k(C)^m$ es $x^m - t^m$, luego el grado es m.

3) Supongamos que $C \subset \mathrm{P}^n$ y que $I(C) = (F_1, \ldots, F_r)$. La regularidad de C en un punto P equivale a que el espacio tangente $T_P(C)$ tenga dimensión 1, lo cual equivale a que la matriz formada por las derivadas parciales de $F_1, \ldots, F_r$ tenga rango $n-1$ en P, lo que a su vez equivale a que cierto menor M de orden $n-1$ no se anule.

La regularidad de $C^{(m)}$ en $\phi(P)$ equivale a que la matriz de las derivadas parciales de $F_1^{(m)}, \ldots, F_r^{(m)}$ tenga rango $n-1$ en $\phi(P)$, pero es claro que

$$\left.\frac{\partial F_i^{(m)}}{\partial X_j}\right|_{\phi(P)} = \left(\left.\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right|_P\right)^m,$$

(aquí usamos que todo natural s cumple $s \equiv s^m$ (mód p)), luego el menor correspondiente a M es $M^m \neq 0$, luego $C^{(m)}$ es regular en $\phi(P)$ y, como ϕ es suprayectiva por el apartado 1), concluimos que $C^{(m)}$ es regular. ∎

Es fácil ver que las aplicaciones de Frobenius son biyectivas, pero no son isomorfismos salvo si $m = 1$ (en cuyo caso convenimos que $C^{(1)} = C$ y que ϕ es la identidad), pues las inversas no son regulares. El interés de la aplicación de Frobenius se debe al teorema siguiente:

Teorema 5.63 *Sea $\psi : C_1 \longrightarrow C_2$ una aplicación regular no constante entre curvas regulares definida sobre un cuerpo k de característica prima p y sea $m = \mathrm{grad}_i\, \psi$ (el grado de inseparabilidad). Entonces ψ es una composición*

$$C_1 \xrightarrow{\phi} C_1^{(m)} \xrightarrow{\chi} C_2,$$

donde ϕ es la aplicación de Frobenius de grado m y χ es una aplicación regular separable definida sobre k.

Demostración: Sea K la clausura separable de $\overline{\psi}[k(C_2)]$ en $k(C_1)$. Entonces $k(C_1)/K$ es puramente inseparable de grado m, luego tenemos las inclusiones

$$\overline{\psi}[k(C_2)] \subset k(C_1)^m \subset K \subset k(C_1),$$

pero por el teorema anterior $k(C_1)/k(C_1)^m$ también tiene grado m, luego

$$K = k(C_1)^m = \overline{\phi}[k(C_1^{(m)})].$$

La inclusión $\overline{\psi}[k(C_2)] \subset \overline{\phi}[k(C_1^{(m)})]$ induce una aplicación racional, luego regular (y definida sobre k), $\chi : C_1^{(m)} \longrightarrow C_2$ tal que $\overline{\chi}[k(C_2)] = \overline{\psi}[k(C_2)]$. Es obvio que χ cumple el teorema. ∎

En el caso en que el cuerpo k sea finito podemos decir algo más:

Teorema 5.64 *Si C es una curva definida sobre un cuerpo finito k de m elementos, entonces $C^{(m)} = C$ y la aplicación de Frobenius es una biyección $\phi : C \longrightarrow C$ cuyos puntos fijos son precisamente los de $C(k)$.*

DEMOSTRACIÓN: El autormorfismo $a \mapsto a^m$ es la identidad en k, luego $C^{(m)} = C$ y $\phi : C \longrightarrow C$ es biyectiva. Obviamente fija a los puntos de $C(k)$. Recíprocamente, si $a \in C$ queda fijo por ϕ y, por ejemplo, su coordenada n-sima es no nula, entonces todas las coordenadas del punto $(a_1/a_n, \ldots, a_{n-1}/a_n)$ quedan fijas por el automorfismo $x \mapsto x^m$, luego están en k, luego

$$a = [a_1/a_n, \ldots, a_{n-1}/a_n, 1] \in C(k).$$

■

Capítulo VI

Funciones algebraicas II

En el capítulo anterior hemos visto que si V es una variedad algebraica (cuasiproyectiva) sobre un cuerpo k_0, entonces el cuerpo $k_0(V)$ de funciones racionales en V es un cuerpo de funciones algebraicas, así como que en los cuerpos de funciones algebraicas existe una aritmética análoga en muchos aspectos a la aritmética ideal de los cuerpos numéricos. En este capítulo mostraremos algunas implicaciones geométricas de dicha aritmética.

6.1 Intersección de curvas

El teorema 3.16 implica en particular que dos curvas proyectivas planas se cortan necesariamente, y ahora vamos a determinar en cuántos puntos se cortan. Por ejemplo, el hecho de que el cuerpo de constantes sea algebraicamente cerrado significa que todo polinomio $Y = F(X)$ de grado n corta al eje $X = 0$ exactamente en n puntos, siempre y cuando contemos cada corte tantas veces como indica la multiplicidad de la raíz correspondiente de F. Vamos a ver que la situación general es muy parecida. En primer lugar asignaremos una "multiplicidad" a cada punto en el que se cortan dos curvas planas, y después probaremos el teorema de Bezout, según el cual, dos curvas de grados m y n respectivamente se cortan en mn puntos, contados con sus multiplicidades. A partir de aquí obtendremos numerosas consecuencias. Naturalmente, para no "perder" puntos de intersección es fundamental que el cuerpo de constantes sea algebraicamente cerrado. Por ello:

> *En esta sección supondremos tácitamente que el cuerpo de definición k_0 de las variedades que consideremos es algebraicamente cerrado.*

Números de intersección Consideremos dos curvas proyectivas planas distintas V y W y un punto $P \in V \cap W$. Fijemos un sistema de referencia proyectivo respecto al cual $W = V(G)$, donde $G \in k_0[X, Y, Z]$ es una forma de grado m. Elijamos una forma lineal L que no se anule en P y llamemos

$g = G/L^m \in \mathcal{O}_P(V)$. Notemos que $g \neq 0$, pues en caso contrario G se anularía en V y sería $V = W$. El hecho de que $P \in W$ se traduce en que $g(P) = 0$.

Definición 6.1 En las condiciones anteriores, llamaremos *número de intersección* de V y W en P al número natural

$$I_P(V \cap W) = \sum_{\mathfrak{P}} v_{\mathfrak{P}}(g),$$

donde $\mathfrak{P}$ recorre los divisores primos de V situados sobre P.

Claramente $I_P(V \cap W) > 0$, pues $g \in \mathfrak{m}_P \subset \mathfrak{P}$ para todo primo situado sobre P, luego $v_{\mathfrak{P}}(g) \geq 1$. Convenimos en definir $I_P(V \cap W) = 0$ para puntos $P \notin V \cap W$. También es útil considerar que $I_P(V \cap V) = +\infty$.

Observemos que la definición del número de intersección no depende de la elección de L, pues si tomamos otra forma lineal L' que no se anule en P, con ella obtenemos otra función $g' = (L/L')^m g$, y L/L' es una unidad de $\mathcal{O}_P(V)$, luego también de cada anillo $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$, para cada divisor primo $\mathfrak{P}$ situado sobre P, luego $v_{\mathfrak{P}}(g') = v_{\mathfrak{P}}(g)$. Una comprobación rutinaria muestra que el número de intersección tampoco depende del sistema de referencia respecto al que se calcula.

Si tomamos un sistema de referencia respecto al cual P sea finito, podemos tomar como L la recta del infinito Z, con lo que g es, en coordenadas afines, la deshomogeneización de G.

En vista de esto, definimos el número de intersección de dos curvas afines V y $W = V(G)$ (donde ahora $G \in k_0[X, Y]$) en un punto $P \in V \cap W$, como

$$I_P(V \cap W) = \sum_{\mathfrak{P}} v_{\mathfrak{P}}(g),$$

donde $g = [G] \in \mathcal{O}_P(V)$. Sucede entonces que el número de intersección en un punto de dos curvas proyectivas coincide con el de las correspondientes curvas afines según esta definición, luego en los problemas locales podemos trabajar siempre con curvas afines.

Para que la definición de número de intersección sea razonable ha de cumplir una condición que no es en absoluto evidente, pero que probamos a continuación:

Teorema 6.2 *Si V y W son dos curvas proyectivas y $P \in V \cap W$, entonces*

$$I_P(V \cap W) = I_P(W \cap V).$$

Demostración: Tomemos un sistema de referencia en el que $P = (0, 0, 1)$ y el punto $(0, 1, 0)$ no esté ni en V ni en W. Respecto a este sistema, sean $V = V(F)$ y $W = V(G)$, donde F, $G \in k_0[X, Y]$. Sean $f = [F] \in \mathcal{O}_P(W)$ y $g = [G] \in \mathcal{O}_P(V)$. Hemos de probar que

$$\sum_{\mathfrak{P}} v_{\mathfrak{P}}(g) = \sum_{\mathfrak{Q}} v_{\mathfrak{Q}}(f),$$

donde $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ recorren los primos de $k_0(V)$ y $k_0(W)$ situados sobre P.

El hecho de que el punto infinito $(0,1,0)$ no esté en las curvas se traduce en que los polinomios $F(X,Y)$ y $G(X,Y)$, como elementos de $k_0(X)[Y]$, son mónicos.

Sea $K = k_0(V) = k_0(x,y)$, donde x e y son las funciones coordenadas, y sea $k = k_0(x)$. Notemos que los primos $\mathfrak{P}$ de K situados sobre P están determinados por las condiciones $x(\mathfrak{P}) = y(\mathfrak{P}) = 0$. Además, $x(\mathfrak{P}) = 0$ equivale a $v_{\mathfrak{P}}(x) > 0$ y también a que $\mathfrak{P}$ divide al primo $\mathfrak{p}$ de k situado sobre 0. Así pues, los primos de K situados sobre P son los divisores $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{p}$ en K que cumplen $|y|_{\mathfrak{P}} < 1$.

Según 5.21, los divisores de $\mathfrak{p}$ en K se corresponden con los K-monomorfismos $\sigma : K \longrightarrow \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es una clausura algebraica de $k_{\mathfrak{p}} = k_0((X))$.

Sea $F = F_1 \cdots F_r$ la descomposición en factores irreducibles de F en $k_{\mathfrak{p}}[Y]$. Para cada i, sea $F_i = (Y - y_{i1}) \cdots (y - y_{ie_i})$ la factorización de F_i en $\mathbb{K}$ (podría haber raíces repetidas si F_i no es separable). Cada y_{ij} determina un K-monomorfismo que, a su vez, determina un divisor primo $\mathfrak{P}_i$. La j no influye, pues existe un $k_{\mathfrak{p}}$-isomorfismo (en particular, una isometría) entre cada $k_{\mathfrak{p}}(y_{ij})$ y cada $k_{\mathfrak{p}}(y_{ij'})$, por lo que ambas raíces determinan el mismo divisor. Además $e(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}) = |k_{\mathfrak{p}}(y_{ij}) : k_{\mathfrak{p}}| = e_i$.

Nos interesan los primos $\mathfrak{P}_i$ tales que $|y|_{\mathfrak{P}_i} = |y_{ij}| < 1$ (el último valor absoluto es el de $\mathbb{K}$). Observemos que, como cada F_i es mónico, las raíces y_{ij} son enteros algebraicos, luego en cualquier caso cumplen $|y_{ij}| \le 1$.

Queremos calcular $v_{\mathfrak{P}_i}(g)$. Claramente,

$$|g(x,y)|_{\mathfrak{P}_i} = |G(x,y)|_{\mathfrak{P}_i} = |G(X,y_i)| = \Big|\prod_{j=1}^{e_i} G(X,y_{ij})\Big|^{1/e_i}.$$

El producto es la norma de $G(X,y_{i1})$, luego está en $k_{\mathfrak{p}}$ y

$$v_{\mathfrak{P}_i}(g) = \frac{1}{e_i} v_{\mathfrak{P}_i}\Big(\prod_{j=1}^{e_i} G(X,y_{ij})\Big) = v_{\mathfrak{p}}\Big(\prod_{j=1}^{e_i} G(X,y_{ij})\Big) = v_{\mathfrak{p}}\Big(\prod_{ji'j'} (y_{ij} - y'_{i'j'})\Big),$$

donde hemos factorizado $G = G_1 \cdots G_s$ en $k_{\mathfrak{p}}[Y]$ y a su vez cada

$$G_{i'} = (Y - y'_{i'1}) \cdots (Y - y'_{i'e'_i})$$

en $\mathbb{K}$. Como en el caso de F, sabemos que $|y'_{i'j'}| \le 1$, y claramente el valor absoluto no depende de j'. Si $|y'_{i'j'}| = 1$ entonces $|y_{ij} - y'_{i'j'}| = 1$, luego el producto sobre j' (que está en $k_{\mathfrak{p}}$) tiene valor $v_{\mathfrak{p}}$ nulo. Al eliminar estos factores queda que

$$v_{\mathfrak{P}_i}(g) = v_{\mathfrak{p}}\Big(\prod_{j\,i'j'} (y_{ij} - y'_{i'j'})\Big), \tag{6.1}$$

donde los índices recorren sólo las raíces de F y G con valor absoluto < 1. Así pues,

$$I_P(V \cap W) = \sum_{\mathfrak{P}} v_{\mathfrak{P}}(g) = v_{\mathfrak{p}}\Big(\prod_{ij\,i'j'} (y_{ij} - y'_{i'j'})\Big).$$

El miembro derecho no se altera si intercambiamos los papeles de F y G, por lo que también es igual a $I_P(W \cap V)$. ∎

En lo sucesivo calcularemos $I_P(V \cap W)$ considerando divisores de V o de W según convenga. Por ejemplo, vamos a estudiar ahora la intersección de una curva arbitraria $V = V(F)$ con una recta L. Puesto que L es regular, es más fácil trabajar con divisores de L.

Sea $(X, Y) = (a + uT, b + vT)$ una parametrización de L, de modo que su ecuación será $v(X - a) - u(Y - b) = 0$. Los puntos (finitos) de $V \cap L$ están en correspondencia con las raíces del polinomio

$$F(T) = F(a + uT, b + vT) = c\prod_{i=1}^{r}(T - t_i)^{e_i}.$$

Concretamente, $V \cap L$ consta de los puntos $P_i = (a + ut_i, b + vt_i)$. Vamos a ver que $I_{P_i}(V \cap L) = e_i$. Para ello consideramos $f = [F] \in \mathcal{O}_{P_i}(L)$. Podemos definir

$$t = \frac{x - a}{u} = \frac{y - b}{v} \in k_0[L].$$

(Notemos que puede ser $u = 0$ o $v = 0$, pero una de las dos definiciones siempre será posible y, en cualquier caso, en $k_0[L]$ se cumple $x = a + ut$, $y = b + vt$.)

Tenemos que $f = F(a+ut, b+vt) = c\prod_{i=1}^{r}(t-t_i)^{e_i}$. Por otra parte, teniendo en cuenta la ecuación de L, es fácil ver que $d_{P_i}(t - t_i) \neq 0$, por lo que $t - t_i$ es un parámetro local en P_i y, en consecuencia,

$$I_{P_i}(V \cap L) = v_{P_i}\left(c\prod_{j=1}^{r}(t - t_j)^{e_j}\right) = \sum_{j=1}^{r} e_j v_{P_i}(t - t_j) = e_i.$$

Para probar el teorema de Bezout demostramos primero un caso particular:

Teorema 6.3 *Sea V una curva proyectiva plana de grado m y L una recta (distinta de V). Entonces*

$$\sum_{P \in \mathrm{P}^2} I_P(V \cap L) = m.$$

En otras palabras, V y L se cortan exactamente en m puntos, contados con su multiplicidad.

Demostración: Podemos tomar un sistema de referencia proyectivo en el que $L = V(Y)$ y en el que la recta $Z = 0$ no pase por ningún punto de $V \cap L$. Así, al deshomogeneizar respecto de Z tenemos que todos los puntos de $V \cap L$ son finitos.

Sea $V = V(F)$, con $F \in k_0[X, Y]$. Sea $F = F_0 + \cdots + F_m$ la descomposición de F en formas. Así, la ecuación de V en coordenadas homogéneas es

$$F_0(X, Y)Z^m + F_1(X, Y)Z^{m-1} + \cdots + F_m(X, Y) = 0.$$

El punto infinito $(1, 0, 0)$ está en L, luego no está en V, luego $F_m(1, 0) \neq 0$. De aquí se sigue que $F_m(X, 0)$ no es el polinomio nulo, luego es un polinomio de grado m y, a su vez, esto implica que $F(X, 0)$ es un polinomio de grado m.

La parametrización de L considerada en la discusión precedente es ahora $(X, Y) = (T, 0)$, luego para calcular $V \cap L$ hemos de considerar el polinomio

$$F(T, 0) = c\prod_{i=1}^{r}(T - t_i)^{e_i}.$$

Según acabamos de ver, tiene grado m, con lo que

$$\sum_{P\in \mathrm{P}^2} I_P(V \cap L) = \sum_{i=1}^{r} e_i = m.$$

■

Teorema 6.4 (Teorema de Bezout) *Sean V y W dos curvas proyectivas planas distintas de grados m y n. Entonces*

$$\sum_P I_P(V \cap W) = mn,$$

donde P recorre todos los puntos de P^2 (o, equivalentemente, todos los puntos de $V \cap W$).

Demostración: Sea $V = V(F)$, $W = V(G)$, donde F y G son formas en $k_0[X, Y, Z]$. Para cada punto $P \in V \cap W$ elegimos una forma lineal L_P tal que $L_P(P) \neq 0$, construimos $g_P = [F]/[L_P^n] \in \mathcal{O}_P$ y, por definición,

$$I_P(V \cap W) = \sum_{\mathfrak{P}} v_{\mathfrak{P}}(g_P),$$

donde $\mathfrak{P}$ recorre los primos de $K = k_0(V)$ situados sobre P.

Por lo tanto,

$$\sum_P I_P(V \cap W) = \sum_{\mathfrak{P}} v_{\mathfrak{P}}(g_P),$$

donde ahora $\mathfrak{P}$ recorre todos los primos de K y P es el punto sobre el que está situado el primo $\mathfrak{P}$ correspondiente.

Tomemos ahora una forma lineal arbitraria L y observemos que

$$g_P = \frac{[G]}{[L_P^n]} = \frac{[G]}{[L^n]}\frac{[L^n]}{[L_P^n]} = g_0\, l_P^n,$$

donde hemos llamado $g_0 = [G]/[L^n] \in K$ y $l_P = [L]/[L_P] \in \mathcal{O}_P$. Así pues,

$$\sum_P I_P(V \cap W) = \sum_{\mathfrak{P}}(v_{\mathfrak{P}}(g_0) + n v_{\mathfrak{P}}(l_P)) = \mathrm{grad}(g_0) + n I_P(V \cap L) = nm,$$

donde hemos usado que los divisores principales tienen grado 0 y el teorema anterior. ■

Tangentes y multiplicidades Observemos que las tangentes a una curva pueden caracterizarse por su número de intersección:

Teorema 6.5 *Si P es un punto regular de una curva plana V, entonces la tangente L a V en P es la única recta que cumple $I_P(V \cap L) \geq 2$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $L = V(F)$, donde F es un polinomio de grado 1 y sea $f = [F] \in \mathcal{O}_P(V)$. Es claro entonces que $d_P f = F|_{T_P V}$. Así, L es la recta tangente $T_P V$ si y sólo si $d_P f = 0$, si y sólo si f no es un parámetro local de V en P, si y sólo si $I_P(V \cap L) = v_P(f) \geq 2$. ∎

Notemos que si V es una recta, entonces su tangente en cualquier punto P es $L = V$ y, de acuerdo con el convenio que hemos adoptado, $I_P(V \cap L) = +\infty$. En lo sucesivo nunca nos detendremos en este caso particular, en el que todos los resultados que discutiremos se cumplirán trivialmente.

El teorema anterior permite extender la noción de recta tangente a los puntos singulares de una curva. En efecto, sea P un punto de una curva V. Fijemos un sistema de referencia respecto al cual $P = (0,0)$ y sea $F(X,Y) = 0$ la ecuación de V en dicho sistema de referencia. Sea

$$F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_n, \qquad 1 \leq m \leq n,$$

la descomposición de F en formas. Sea L una recta que pase por P. Su ecuación paramétrica será $(X,Y) = (uT, vT)$, con lo que

$$F(T) = F(uT, vT) = T^m F_m(u,v) + \cdots + T^n F_n(u,v).$$

Podemos descomponer $F_m = \prod_{i=0}^{r} L_i^{e_i}$ en producto de formas lineales (basta deshomogeneizar F_m a $F_m(X,1)$, factorizar el polinomio resultante y volver a homogeneizar). Es claro entonces que $F_m(u,v) = 0$ si y sólo si $L = L_i$ para algún i. Concluimos que $I_P(V,L) = m$ para todas las rectas excepto para un número finito de ellas.

Definición 6.6 Si P es un punto de una curva plana V de grado n, llamaremos *multiplicidad* de P en V al mínimo número natural $m \leq n$ tal que existen rectas L tales que $I_P(V \cap L) = m$. La representaremos por $m_P(V)$. Según acabamos de probar, la igualdad $I_P(V \cap L) = m_P(V)$ se cumple para todas las rectas que pasan por P salvo para un número finito de ellas, a las que llamaremos *rectas tangentes* a V en P. Según su multiplicidad, los puntos se clasifican en *simples dobles, triples, etc.*

Con la notación anterior, los coeficientes de F_1 son las derivadas de F en P, luego $F_1 = 0$ si y sólo si P es un punto singular de V. En otras palabras, un punto P es regular en V si y sólo si es simple. En tal caso, la única recta tangente según la definición anterior es la de ecuación $F_1 = 0$, pero ésta es la recta tangente que ya teníamos definida. Por lo tanto, la nueva definición incluye a la anterior como un caso particular.

Notemos que si V es una curva plana de grado $n > 1$, se ha de cumplir que $m_P(V) < n$, pues en caso contrario el polinomio que define a V sería la forma F_n y sería reducible. En particular, las cónicas (irreducibles) no pueden tener singularidades.

Ejemplos El punto $(0,0)$ es un punto doble de la curva "alfa", dada por la ecuación $Y^2 = X^2(X+1)$. Sus tangentes son los factores de $F_2 = X^2 - Y^2$, es decir, las rectas $Y = \pm X$.

Igualmente, $(0,0)$ es un punto doble de la curva $Y^2 = X^3$, pero ahora $F_2 = Y^2$, luego la curva tiene sólo una tangente (doble) en $(0,0)$, a saber, la recta $Y = 0$. ∎

Veamos ahora que podemos asignar una tangente a cada divisor primo de una curva. En efecto, sea $\mathfrak{P}$ un divisor primo de una curva V situado sobre un punto P. Fijemos un sistema de referencia afín en el que $P = (0,0)$. Sea $m_0 = \text{mín}\{v_\mathfrak{P}(x), v_\mathfrak{P}(y)\} > 0$. Supongamos, por ejemplo, que el mínimo se alcanza en x, es decir, $v_\mathfrak{P}(x) = m_0$. Fijado un primo π en $\mathfrak{O}_\mathfrak{P}$, tenemos que $v_\mathfrak{P}(x/\pi^{m_0}) = 0$, luego existe un $a \in k_0$ no nulo tal que $x/\pi^{m_0} \equiv a \pmod{\mathfrak{P}}$. Multiplicando π por una raíz m_0-ésima de a podemos suponer que $a = 1$. Así $x = \pi^{m_0} + \alpha\pi^{m_0+1}$, para cierto $\alpha \in \mathfrak{O}_\mathfrak{P}$. Similarmente, $y = a\pi^{m_0} + \beta\pi^{m_0+1}$, con $a \in k_0$ y $\beta \in \mathfrak{O}_\mathfrak{P}$ (tal vez $a = 0$). Si $L = uX + vY$ es cualquier recta que pasa por P y $l = ux + vy = [L] \in \mathfrak{O}_P$, tenemos que

$$v_\mathfrak{P}(l) = v_\mathfrak{P}((u+va)\pi^{m_0} + \gamma\pi^{m_0+1}).$$

Claramente, $v_\mathfrak{P}(l) = m_0$ excepto si $u + va = 0$, en cuyo caso $v_\mathfrak{P}(l) > m_0$. Esto determina una única recta L. Hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 6.7 *Sea V una curva plana y $\mathfrak{P}$ un divisor primo de V situado sobre un punto P. Si L es una recta que pasa por P y $l = [L] \in \mathfrak{O}_\mathfrak{P}$, entonces $v_\mathfrak{P}(l)$ toma el mismo valor m_0 para todas las rectas L excepto para una de ellas.*

Definición 6.8 En las condiciones del teorema anterior, diremos que m_0 es la *multiplicidad* de $\mathfrak{P}$ en V, y la representaremos por $m_\mathfrak{P}(V)$. Llamaremos *tangente* a V en $\mathfrak{P}$ a la única recta L tal que $v_\mathfrak{P}(l) > m_\mathfrak{P}(V)$.

Las tangentes que acabamos de definir son las que ya teníamos definidas:

Teorema 6.9 *Si P es un punto de una curva plana V, las tangentes a V en P son las tangentes a V en los primos situados sobre P y la multiplicidad $m_P(V)$ es la suma de las multiplicidades $m_\mathfrak{P}(V)$ de estos primos.*

Demostración: Si L es una recta que pasa por P distinta de todas las tangentes a V en P y de todas las tangentes a V en los primos situados sobre P, entonces

$$m_P(V) = I_P(V \cap L) = \sum_\mathfrak{P} v_\mathfrak{P}(l) = \sum_\mathfrak{P} m_\mathfrak{P}(V).$$

Una recta L es tangente a V en P si y sólo si

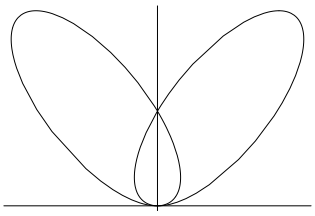
$$\sum_{\mathfrak{P}} v_{\mathfrak{P}}(l) = I_P(V \cap L) > m_P(V) = \sum_{\mathfrak{P}} m_{\mathfrak{P}}(V).$$

Como, en cualquier caso, $v_{\mathfrak{P}}(l) \geq m_{\mathfrak{P}}(V)$, la desigualdad anterior equivale a que $v_{\mathfrak{P}}(l) > m_{\mathfrak{P}}(V)$ para algún $\mathfrak{P}$, es decir, a que L sea tangente a L en un primo $\mathfrak{P}$. ∎

En particular, el teorema anterior implica que el número de primos situados sobre un punto P es mayor o igual que el número de tangentes a V en P y menor o igual que $m_P(V)$. Ninguna de estas dos desigualdades tiene por qué ser una igualdad. La curva $Y^2 = X^3$ tiene una singularidad con un solo primo y multiplicidad 2, mientras que la curva del ejemplo siguiente tiene una singularidad en $(0,0)$ con una tangente y dos primos.

Ejemplo Consideremos la curva V dada por la ecuación

$$Y^4 - 2Y^3 + Y^2 - 3X^2Y + 2X^4 = 0$$



Para probar que es irreducible homogeneizamos respecto de Z y deshomogeneizamos respecto de Y, con lo que tenemos el polinomio

$$Z^2 - (3X^2 + 2)Z + 2X^4 + 1.$$

Es fácil ver que no tiene raíces en $\mathbb{C}[X]$, luego es irreducible.

Una simple comprobación muestra que la intersección de V con la recta $X = 0$ la forman los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$. El punto $(0,0)$ es doble y tiene una única tangente, $Y = 0$. Para estudiar el punto $(0,1)$ hacemos el cambio $Y \mapsto Y + 1$, con lo que obtenemos la ecuación

$$Y^4 + 2X^4 + 2Y^3 - 3X^2 + Y^2 - 3X^2 = 0.$$

Vemos que $(0,1)$ es doble con dos tangentes distintas, $Y = \pm\sqrt{3}X$.

Sea $K = \mathbb{C}(V) = \mathbb{C}(x,y)$ y $k = \mathbb{C}(x)$. Los primos de $K = \mathbb{C}(V)$ que dividen al primo $\mathfrak{p}$ de k situado sobre 0 son los situados sobre las antiimágenes de 0 por x, es decir, sobre los puntos $(0,0)$ o $(0,1)$.

Sobre $(0,1)$ hay exactamente dos primos, pues la multiplicidad es 2 y hay dos tangentes. Sobre $(0,0)$ puede haber uno o dos primos. Esto deja dos posibilidades: $0 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ o bien $0 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3^2$. Si se da la primera — y vamos a ver que éste es el caso— entonces sobre $(0,0)$ hay exactamente dos primos y una sola tangente.

Hemos de excluir la posibilidad de que 0 se escinda completamente. Lo haremos mediante un argumento indirecto a través de la fórmula del género. En primer lugar estudiamos la ramificación en infinito.

La curva V tiene cuatro puntos distintos en el infinito, cuyas coordenadas homogéneas cumplen $Y^4 + 2X^4 = 0$. No puede ser $X = 0$, por lo que la función

x tiene un polo sobre cada uno de ellos. Así pues, todos dividen al primo infinito de k. Como éste tiene a lo sumo cuatro divisores, concluimos que, de hecho tiene cuatro, $\infty = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$, luego no hay ramificación en el infinito.

Ahora observamos que la aplicación $(X, Y) \mapsto (-X, Y)$ es un isomorfismo de V en sí misma que induce un automorfismo de K. Su restricción a k es el automorfismo inducido por el isomorfismo $X \mapsto -X$ de $\mathbb{C}^\infty$. Es claro entonces que los índices de ramificación del primo de k situado sobre un $\zeta \in \mathbb{C}$ son los mismos que los del primo situado sobre $-\zeta$. Por consiguiente, en la fórmula

$$2 - 2g = 8 - \sum_i (e_i - 1),$$

el sumatorio es de la forma $2a + b$, donde $2a$ es la aportación de los primos distintos de 0 e ∞ y b es la aportación de 0 (pues ya hemos visto que en ∞ no hay ramificación). Las posibilidades para b son $b = 0$ si 0 se escinde completamente y $b = 1$ si hay ramificación. Ahora bien, la relación $2 - 2g = 8 - 2a - b$ muestra que b ha de ser par, luego $b = 0$ y concluimos que 0 se escinde completamente. ∎

El teorema siguiente muestra que los números de intersección se reducen casi siempre a las multiplicidades:

Teorema 6.10 *Sean V y W dos curvas planas distintas y $P \in V \cap W$. Entonces*

$$I_P(V \cap W) \geq m_P(V) m_P(W).$$

La igualdad se da si y sólo si V y W no tienen tangentes comunes en P.

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un sistema de referencia tal que $P = (0, 0)$ y la recta $X = 0$ no sea tangente a V ni a W en P. Sea $V = V(F)$, $W = V(G)$. Basta probar que

$$v_{\mathfrak{P}}(g) \geq m_{\mathfrak{P}}(V) m_P(W),$$

y que se da la igualdad si y sólo si ninguna tangente a V en $\mathfrak{P}$ es tangente a W. La prueba se basa en la expresión para $v_{\mathfrak{P}}(g)$ que hemos encontrado en la demostración del teorema 6.2.

El hecho de que la recta $X = 0$ no sea tangente a V en $\mathfrak{P}$ implica que $v_{\mathfrak{P}}(x) = m_{\mathfrak{P}}(V) \leq v_{\mathfrak{P}}(y)$. Llamemos $r = m_{\mathfrak{P}}(V)$. Podemos tomar un primo π en $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ tal que $x = \pi^r + \alpha\pi^{r+1}$, con $\alpha \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$. Sea $y = a\pi^r + \beta\pi^{r+1}$, con $\beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$. Así la tangente a V en $\mathfrak{P}$ es la recta $-aX + Y$.

Similarmente, si $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_s$ son los primos de W situados sobre P, llamamos $r_i = v_{\mathfrak{Q}_i}(x)$ y elegimos un primo π_i en $\mathfrak{O}_{\mathfrak{Q}_i}$ de modo que

$$x = \pi_i^{r_i} + \alpha_i \pi_i^{r_i+1}, \qquad y = a_i \pi_i^{r_i} + \beta_i \pi_i^{r_i+1}.$$

La tangente a W en $\mathfrak{Q}_i$ es $-a_i X + Y$, luego la hipótesis de que la tangente a V en $\mathfrak{P}$ no sea tangente a W equivale a que $a \neq a_i$ para todo i. Además tenemos que

$$r_1 + \cdots + r_s = m_{\mathfrak{Q}_1}(W) + \cdots + m_{\mathfrak{Q}_s}(W) = m_P(W).$$

Sea $K = k_0(V)$, sea $k = k_0(x)$ y sea $\mathfrak{p}$ el primo de k situado sobre 0 (que es el primo al que divide $\mathfrak{P}$). Sea $k_\mathfrak{p} = k_0((X))$ y $\mathbb{K}$ una clausura algebraica de $k_\mathfrak{p}$. En el teorema 6.2 hemos obtenido la igualdad (6.1), en virtud de la cual $v_\mathfrak{P}(g)$ es el valor $v_\mathfrak{p}$ del producto de todos los $y_j - y'_{i'j'}$, donde y_{ij} varía entre las raíces de $F(X,Y)$ en $\mathbb{K}$ que inducen el primo $\mathfrak{P}$ e $y'_{i'j'}$ recorre las raíces de $G(X,Y)$ en $\mathbb{K}$ que inducen cada primo $\mathfrak{Q}_{i'}$. (Hemos suprimido el índice i porque aquí $\mathfrak{P}$ está fijo.)

Como $v_\mathfrak{p}(x) = 1$, tenemos que $r = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$, luego hay r raíces y_j, cada una de las cuales es imagen de y por un $k_\mathfrak{p}$-monomorfismo $\sigma_j : K_\mathfrak{P} \longrightarrow \mathbb{K}$. Todas las raíces que estamos considerando estarán en una extensión finita E de $k_\mathfrak{p}$, donde podemos trabajar con una valoración v. Sea $e = e(E/k_\mathfrak{p})$, de modo que $v = ev_\mathfrak{p}|_{k_\mathfrak{p}}$. Tenemos que

$$x = \sigma_j(x) = \sigma_j(\pi)^r + \sigma_j(\alpha)\sigma_j(\pi)^{r+1}, \quad y_j = \sigma_j(y) = a\sigma_i(\pi)^r + \sigma_j(\alpha)\sigma_j(\pi)^{r+1},$$

luego $y_j = ax + \delta_j\rho^{e+1}$, donde ρ es un primo en E y $v(\delta_j) \geq 0$.

Similarmente, $y'_{i'j'} = a_{i'}x + \delta_{i'j'}\rho^{e+1}$. Así pues,

$$v_\mathfrak{P}(g) = v_\mathfrak{p}\Big(\prod_{j\,i'j'}\big((a-a_{i'})x + (\delta_j - \delta_{i'j'})\rho^{e+1}\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{e}\sum_{j\,i'j'} v_\mathfrak{P}\big((a-a_{i'})x + (\delta_j - \delta_{i'j'})\rho^{e+1}\big) \geq \frac{1}{e}\sum_{j\,i'j'} e = r(r_1 + \cdots + r_s)$$

$$= m_\mathfrak{P}(V)m_P(W).$$

Se cumple que $v_\mathfrak{P}((a-a_{i'})x + (\delta_j - \delta_{i'j'}\rho^{e+1})) > e$ si y sólo si $a = a_{i'}$, luego la igualdad $v_\mathfrak{P}(g) = m_\mathfrak{P}(V)m_P(W)$ se da exactamente cuando $a \neq a_{i'}$ para todo i'. ∎

Ahora podemos dar una caracterización geométrica del grado de una curva plana:

Teorema 6.11 *Si V es una curva plana de grado n, existen infinitas rectas que cortan a V en n puntos distintos.*

Demostración: Observemos que las rectas de P^2 están en correspondencia biunívoca con los puntos de P^2 mediante $aX + bY + cZ = 0 \leftrightarrow (a,b,c)$. Sea $V = V(F)$, sea V_0 la subvariedad formada por los puntos regulares de V y consideremos la aplicación $\phi : V_0 \longrightarrow \mathrm{P}^2$ dada por

$$\phi(P) = \left(\left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_P, \left.\frac{\partial F}{\partial Y}\right|_P, \left.\frac{\partial F}{\partial Z}\right|_P\right).$$

Obviamente es regular y $\phi[V_0]$ contiene todos los puntos correspondientes a las rectas de P^2 tangentes a V en algún punto regular. Sea $W = \overline{\phi[V_0]}$ que es una subvariedad de P^2, pues si $W = C_1 \cup C_2$, con C_1 y C_2 cerrados, entonces $V_0 = \phi^{-1}[C_1] \cup \phi^{-1}[C_2]$, luego $V_0 = \phi^{-1}[C_i]$, $\phi[V_0] \subset C_i$ y $W = \overline{\phi[V_0]} \subset C_i$.

Tenemos que $\phi : V_0 \longrightarrow W$ es densa, luego podemos identificar $k_0(W)$ con un subcuerpo de $k_0(V)$ y, por lo tanto, $\dim W \leq \dim V_0 = 1$.

Fijado un punto $P \in V$ regular, el conjunto de rectas que pasan por P se corresponde con una recta L de P^2 a través de la correspondencia que hemos indicado. Cambiando P por otro punto si fuera preciso, podemos suponer que $L \neq W$. Así, $L \cap W$ es finito, luego hay infinitos puntos en $L \setminus W$, cada uno de los cuales se corresponde con una recta que pasa por P y no es tangente a V en ningún punto regular.

Eliminando las rectas que pasan por P y por un punto singular de V (que son un número finito), nos quedan todavía infinitas rectas R que pasan por P y que sólo cortan a V en puntos regulares (sin ser tangentes). Entonces $I_Q(V \cap R) = 1$ para cada $Q \in V \cap R$. Por el teorema de Bezout, R corta a V en n puntos distintos. ∎

Teniendo en cuenta el teorema de Bezout, vemos que el grado de una curva plana V es el máximo número n tal que existe una recta que corta a V en n puntos distintos.

Numeros de intersección entre formas Fijado un sistema de referencia en P^2, para cada par de formas F, $G \in k_0[X,Y,Z]$, consideramos sus descomposiciones en formas irreducibles[1] $F = F_1 \cdots F_r$, $G = G_1 \cdots G_s$ y definimos el *número de intersección*

$$I_P(F \cap G) = \sum_{ij} I_P(V_i \cap W_j),$$

donde $V_i = V(F_i)$, $W_j = V(G_j)$. Este número será infinito si y sólo si F y G tienen un factor común. Además, definimos la *multiplicidad* de P en F como

$$m_P(F) = \sum_i m_P(V_i).$$

Igualmente podemos definir multiplicidades y multiplicidades para polinomios de $k_0[X,Y]$. Incluso podemos hablar de números de intersecciones mixtos $I_P(V \cap G)$, donde $V = V(F)$ es una curva (y F es una forma irreducible) y G una forma arbitraria.

Todos los teoremas que hemos probado para curvas se generalizan trivialmente a polinomios. Por ejemplo, el teorema de Bezout para formas afirma que $I_P(F \cap G) = (\operatorname{grad} F)(\operatorname{grad} G)$. Para probarlo basta descomponer F y G y aplicar el teorema de Bezout a las curvas definidas por cada par de factores.

Notemos que si $F \in k_0[X,Y]$ es un polinomio, entonces su forma de menor grado es el producto de las formas de menor grado de sus factores, por lo que la multiplicidad en F de $(0,0)$ sigue siendo este grado mínimo. Igualmente, las tangentes a F en $(0,0)$ siguen siendo los factores de esta forma de grado mínimo. Todas las comprobaciones son inmediatas. Observemos que la relación

$$I_P(V \cap G) = \sum_{\mathfrak{P}} v_{\mathfrak{P}}(g)$$

[1] Es fácil ver que los factores irreducibles de las formas son formas: basta deshomogeneizar respecto a una variable, factorizar y volver a homogeneizar.

sigue siendo válida aunque G no sea irreducible, pues la función g es el producto de las funciones g_i asociadas a los factores de G. De aquí se sigue una propiedad adicional que simplifica mucho el cálculo de números de intersección:

$$I_P(F \cap G) = I_P(F \cap (G + HF)),$$

pues $f = 0$ en $\mathcal{O}_P(V_i)$, luego $g = g + hf$.

Puntos de inflexión Estudiamos ahora una noción relacionada con el número de intersección de una curva con su tangente. Como aplicación obtendremos algunos resultados sobre cúbicas regulares que nos harán falta más adelante.

Definición 6.12 un *punto de inflexión* de una curva plana V es un punto regular P de V tal que existe una recta L (que necesariamente ha de ser la tangente a V en P) para la cual $I_P(V \cap L) \geq 3$. La inflexión se llama *ordinaria* si $I_P(V \cap L) = 3$.

Obviamente una cónica no puede tener inflexiones. Teniendo en cuenta el ejemplo de la página 112, es fácil ver que toda cúbica singular tiene un único punto de inflexión. Vamos a probar que las cúbicas regulares también tienen inflexiones. Para ello nos basaremos en una caracterización de los puntos de inflexión.

Consideremos un punto regular P de una curva V. Podemos tomar un sistema de referencia respecto al cual $P = (0,0)$. Sea $F = F_1 + \cdots + F_n$ el polinomio que define a F.

Una recta L parametrizada por $(X,Y) = (uT, vT)$ cumplirá $I_P(V \cap L) \geq 3$ si $F_1(u,v) = F_2(u,v) = 0$. Así pues, P será un punto de inflexión de V si y sólo si existe $(u,v) \in k_0^2$, $(u,v) \neq (0,0)$, tal que $F_1(u,v) = F_2(u,v) = 0$.

En primer lugar probamos que esto equivale a que el polinomio $F_1 + F_2$ sea reducible (o bien $F_2 = 0$).

En efecto, suponiendo $v \neq 0$ y llamando $t = u/v$ tenemos que $F_1(t,1) = F_2(t,1) = 0$, luego $F_1(X,1) \mid F_2(X,1)$ y, sustituyendo X por X/Y, concluimos que $F_1(X,Y) \mid F_2(X,Y)$.

Recíprocamente, Si $F_1 + F_2 = RS$ y $F_2 \neq 0$, entonces ambos factores tienen grado 1, y uno de ellos, digamos R, ha de cumplir $R(0,0) = 0$. Entonces F_1 es R por el término independiente de S, luego $F_1 \mid F_2$ y cualquier raíz no nula (u,v) de F_1 lo es de F_2.

A partir de aquí supondremos que la característica de k_0 es distinta de 2, con lo que la forma F_2 (que, de momento, supondremos no nula) es

$$F_2(X,Y) = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right|_P X^2 + 2\left.\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}\right|_P XY + \left.\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right|_P X^2\right).$$

La condición que hemos encontrado es la reducibilidad del polinomio

$$\left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_P X + \left.\frac{\partial F}{\partial Y}\right|_P Y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right|_P X^2 + \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}\right|_P XY + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right|_P X^2.$$

Esta ecuación determina una cónica afín, que será reducible si y sólo si lo es su clausura proyectiva, determinada por la forma

$$\left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_P XZ + \left.\frac{\partial F}{\partial Y}\right|_P YZ + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right|_P X^2 + \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}\right|_P XY + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right|_P X^2.$$

Matricialmente es:

$$(X,Y,Z)\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right|_P & \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}\right|_P & \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_P \\ \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}\right|_P & \left.\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right|_P & \left.\frac{\partial F}{\partial Y}\right|_P \\ \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_P & \left.\frac{\partial F}{\partial Y}\right|_P & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Una cónica es irreducible si y sólo si el rango de su matriz es 3 (véase el ejemplo de la página 53). Así pues, P será un punto de inflexión si y sólo si

$$\begin{vmatrix} \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right|_P & \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}\right|_P & \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_P \\ \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}\right|_P & \left.\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right|_P & \left.\frac{\partial F}{\partial Y}\right|_P \\ \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_P & \left.\frac{\partial F}{\partial Y}\right|_P & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(Esta condición recoge también el caso en que $F_2 = 0$). Todavía podemos obtener una condición formalmente más simple. Llamemos $F(X,Y,Z)$ a la homogeneización de F, de modo que $F(X,Y) = F(X,Y,1)$. Es claro que ambos polinomios tienen las mismas derivadas respecto de X e Y, luego podemos considerar que la F que aparece en el determinante anterior es $F(X,Y,Z)$. Ahora usamos la relación

$$\frac{\partial F}{\partial X}X + \frac{\partial F}{\partial Y}Y + \frac{\partial F}{\partial Z}Z = nF$$

y las que resultan de aplicar esta misma propiedad a las parciales de F:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}X + \frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}Y + \frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Z}Z = (n-1)\frac{\partial F}{\partial X},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}X + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}Y + \frac{\partial^2 F}{\partial Y\partial Z}Z = (n-1)\frac{\partial F}{\partial Y}.$$

Multiplicamos la tercera columna del determinante por $n-1$ y le restamos las dos primeras (usando que $F(P) = 0$) y luego repetimos las operaciones con las filas. El determinante resulta ser igual a

$$H(F)(P) = \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right|_P & \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}\right|_P & \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Z}\right|_P \\ \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}\right|_P & \left.\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right|_P & \left.\frac{\partial^2 F}{\partial Y\partial Z}\right|_P \\ \left.\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Z}\right|_P & \left.\frac{\partial^2 F}{\partial Y\partial Z}\right|_P & \left.\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2}\right|_P \end{vmatrix}.$$

El determinante $H(F)(P)$ se llama *hessiano* de F en P y es fácil ver que la condición $H(F)(P) = 0$ no depende del sistema de referencia elegido, pues un cambio de sistema de referencia proyectivo multiplica la matriz hessiana por una matriz regular. El teorema siguiente recoge lo que hemos obtenido:

Teorema 6.13 *Un punto regular P de una curva plana $V = V(F)$ es un punto de inflexión si y sólo si $H(F)(P) = 0$.*

Notemos que si V tiene grado n entonces $H(F)(X, Y, Z)$ es una forma de grado $3(n-2)$, luego, si $n \geq 3$, define una curva proyectiva (salvo que sea la forma nula). El teorema 3.16 implica que existe un punto $P \in V$ tal que $H(F)(P) = 0$. Si P es regular será un punto de inflexión. Así pues:

Teorema 6.14 *Toda curva proyectiva plana regular de grado ≥ 3 (sobre un cuerpo de característica distinta de 2) tiene un punto de inflexión.*

Consideremos por ejemplo una cúbica regular $V = V(F)$. Podemos tomar un sistema de referencia afín en el que el punto de inflexión sea $(X, Z) = (0, 0)$. Si $F(X, Z) = F_1(X, Z) + F_2(X, Z) + F_3(X, Z)$, hemos visto que el hecho de que $(0, 0)$ sea un punto de inflexión equivale a que la cónica $F_1(X, Z) + F_2(X, Z)$ sea reducible (o bien $F_2 = 0$). Así pues,

$$F(X, Z) = (uX + vZ)(1 + aX + bZ) + cX^3 + dX^2Z + eXZ^2 + fZ^3,$$

donde $(u, v) \neq (0, 0)$, o de lo contrario $(0, 0)$ sería un punto singular. Supongamos $v \neq 0$. El cambio de coordenadas dado por $X' = X$, $Z' = uX + vZ$ nos da un polinomio de la forma

$$F(X, Z) = Z(1 + aX + bZ) + cX^3 + dX^2Z + eXZ^2 + fZ^3.$$

Si homogeneizamos con Y y deshomogeneizamos respecto de Z (con lo que el punto de inflexión pasa a estar en el infinito) obtenemos que V está determinada por la ecuación

$$Y^2 + (aX + b)Y + cX^3 + dX^2 + eX + f = 0.$$

Ahora el cambio de coordenadas $Y = Y' - (aX' + b)/2$ reduce la ecuación a

$$Y^2 = aX^3 + bX^2 + cX + d,$$

donde $a \neq 0$, pues V es una cúbica (por ejemplo, si fuera $a = 0$ no podría haber un punto de inflexión). En este cambio hemos supuesto que la característica de k_0 es distinta de 2. Si suponemos además que es distinta de 3 podemos hacer el cambio

$$X = aX' - \frac{b}{3a}, \qquad Y = \frac{a^2}{2}\, Y'$$

y la ecuación se reduce a

$$Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3, \qquad g_2,\ g_3 \in k_0.$$

Por último notamos que si a fuera una raíz múltiple del polinomio de la derecha, entonces $(a, 0)$ sería un punto singular de V. Así pues, hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 6.15 *Toda cúbica regular sobre un cuerpo k_0 de característica distinta de 2 o 3 es proyectivamente equivalente a una cúbica de ecuación*

$$Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3, \qquad g_2,\ g_3 \in k_0,$$

donde el polinomio de la derecha no tiene raíces múltiples.

Una ecuación en las condiciones del teorema anterior se llama *forma normal de Weierstrass* de la cúbica regular V. La notación g_2, g_3 para las constantes es la acostumbrada en la teoría de funciones elípticas, en la que ahora no vamos a entrar (véase la sección 6.3 de [VC]).

Es fácil probar que, recíprocamente, toda ecuación en forma normal determina una cúbica regular (la irreducibilidad se sigue del criterio de Eisenstein aplicado a un factor primo del miembro derecho).

6.2 Diferenciales de funciones algebraicas

En esta sección usaremos la teoría sobre diferenciales en cuerpos de series de potencias presentada en la sección B.3. De hecho, la teoría que vamos a desarrollar aquí puede verse como la teoría global correspondiente a la teoría local desarrollada allí.

Necesitamos un resultado previo sobre separabilidad. Si K es un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes perfecto k_0, entonces la extensión K/k_0 es separable, luego existe un $x \in K$ tal que la extensión $K/k_0(x)$ es finita separable. Vamos a dar otra prueba de este hecho que en añadidura caracteriza los x que cumplen esto:

Definición 6.16 Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0. Diremos que un elemento $x \in K$ es *separador* si la extensión $K/k_0(x)$ es separable.

Es claro que un elemento separador de K ha de ser trascendente sobre k_0 (o de lo contrario la extensión K/k_0 sería algebraica). Si los cuerpos tienen característica 0, ser separador equivale a ser trascendente. Más aún, si k_0 es el cuerpo exacto de constantes de K entonces ser separador equivale a no ser constante.

Para probar la existencia de elementos separadores en cuerpos de característica prima nos apoyaremos en el teorema siguiente:

Teorema 6.17 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0 de característica prima p. Sea $x \in K$ trascendente sobre k_0. Entonces la clausura separable de $k_0(x)$ en K es de la forma $K_s = K^{p^n}$, para cierto natural $n \geq 0$.*

Demostración: Como K/K_s es puramente inseparable, $|K : K_s| = p^n$, para cierto natural n. También es claro que $K^{p^n} \subset K_s$ pues, si $\alpha \in K$, su

polinomio mínimo sobre K_s ha de ser de la forma $x^{p^i} - \alpha^{p^i}$, con $i \le n$, luego $\alpha^{p^n} \in K_s$. Basta probar que $|K : K^{p^n}| = p^n$.

Puesto que k_0 es perfecto, tenemos que $k^{p^n} = k_0(x^{p^n})$. Llamemos $k_1 = k^{p^n}$ y $x_1 = x^{p^n}$. Así $k_1 = k_0(x_1)$, $k = k_1(x)$ y x es raíz del polinomio $t^{p^n} - x_1$, que es irreducible en $k_1[t]$, pues un factor propio sería de la forma $(t-x)^{p^i} = t^{p^i} - x^{p^i}$, para $i < n$, con lo que $x^{p^{n-1}} \in k_0(x^{p^n}) = k_0(x)^{p^n}$, de donde $x \in k_0(x)^p$, pero esto es claramente falso.

Así pues, $|k : k^{p^n}| = p^n$. Ahora basta observar que

$$\begin{aligned} |K : k^{p^n}| &= |K : K^{p^n}|\,|K^{p^n} : k^{p^n}| = |K : K^{p^n}|\,|K : k|, \\ |K : k^{p^n}| &= |K : k|\,|k : k^{p^n}| = |K : k|\,p^n, \end{aligned}$$

donde hemos usado que la aplicación $u \mapsto u^{p^n}$ es un isomorfismo entre las extensiones K/k y K^{p^n}/k^{p^n}, luego tienen el mismo grado. Igualando ambas líneas concluimos que $|K : K^{p^n}| = p^n$, como queríamos probar. ∎

Teorema 6.18 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0 de característica prima p. Un elemento $x \in K$ trascendente sobre k_0 es separador si y sólo si $x \notin K^p$.*

Demostración: Sea $x \in K$ trascendente sobre k_0. Entonces la extensión $K/k_0(x)$ es finita. Sea K_s la clausura separable de $k_0(x)$ en K. Por el teorema anterior $K_s = K^{p^n}$, para cierto $n \ge 0$.

Puesto que $x \in K_s$, tenemos que $\sqrt[p^n]{x} \in K$. La aplicación $u \mapsto u^{p^n}$ es un isomorfismo entre las extensiones $K \;/\; k_0\big(\sqrt[p^n]{x}\big)$ y $K_s/k_0(x)$, luego la primera es separable, ya que la segunda lo es.

De aquí se sigue que n es el mayor número natural tal que $\sqrt[p^n]{x} \in K$, pues si $\sqrt[p^{n+1}]{x} \in K$, éste sería puramente inseparable sobre $k_0\big(\sqrt[p^n]{x}\big)$, por lo que $\sqrt[p^{n+1}]{x} \in k_0\big(\sqrt[p^n]{x}\big)$, y esto lleva fácilmente a una contradicción.

En resumen, x es separador si y sólo si $n = 0$, si y sólo si $x \notin K^p$. ∎

Pasemos ya a investigar la noción de diferencial de una función algebraica. Si K es un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0, el teorema 5.19 afirma que para cada divisor primo $\mathfrak{P}$ de K, su compleción es de la forma $K_\mathfrak{P} = k_{0\mathfrak{P}}((\pi))$, donde π es cualquier primo de $K_\mathfrak{P}$ y $k_{0\mathfrak{p}}$ es la clausura algebraica de k_0 en $K_\mathfrak{P}$. Por consiguiente, si α y $\beta \in K$, tenemos definida la forma diferencial $(\beta\,d\alpha)_\mathfrak{P}$ de $K_\mathfrak{P}$.

Definición 6.19 Si K es un cuerpo de funciones algebraicas y α, $\beta \in K$, definimos la *forma diferencial* $\beta\,d\alpha$ de K como el elemento del producto de todos los espacios de formas diferenciales de todas las compleciones de K cuya componente $\mathfrak{P}$-ésima es $(\beta\,d\alpha)_\mathfrak{P}$.

El conjunto de las formas diferenciales de K tiene estructura de espacio vectorial (es un subespacio del espacio producto de los espacios de formas diferenciales locales), de modo que $\beta\,d\alpha$ es el producto escalar de β por $d\alpha = 1\,d\alpha$. Escribiremos $d_\mathfrak{P}\alpha$ en lugar de $(d\alpha)_\mathfrak{P}$. De este modo $(\beta\,d\alpha)_\mathfrak{P} = \beta\,d_\mathfrak{P}\alpha$.

Seguidamente determinamos las funciones con diferencial nula:

Teorema 6.20 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0 y sea $x \in K$. Entonces $dx \neq 0$ si y sólo si x es separador, y en tal caso todas las componentes de dx son no nulas.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que k_0 es el cuerpo de constantes exacto de K. Supongamos que x no es separador. Si $\operatorname{car} K = 0$, esto sólo puede ocurrir si $x \in k_0$. Si $\operatorname{car} k = p > 0$, por el teorema 6.18 puede ocurrir también que $x \in K^p$. En cualquiera de estos casos, el teorema B.22 nos da que las componentes de dx son nulas, luego $dx = 0$.

Supongamos ahora que x es separador. Sea $\mathfrak{P}$ un divisor primo de K y sea $\pi \in K$ tal que $v_{\mathfrak{P}}(\pi) = 1$. De este modo tenemos un primo π de $K_{\mathfrak{P}}$ que pertenece a K. Sea $f(x,t)$ su polinomio mínimo sobre $k_0(x)$. Por el teorema B.21 tenemos que

$$0 = \frac{df(x,\pi)}{d\pi} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\pi)\frac{dx}{d\pi} + \frac{\partial f}{\partial t}(x,\pi).$$

Ahora bien, como π es separable sobre $k_0(x)$, el último término es no nulo, luego la derivada de x tampoco puede ser nula. Por consiguiente $d_{\mathfrak{P}}x \neq 0$. ∎

Más en general, una forma diferencial $\beta\, d\alpha \neq 0$ cumple $\beta \neq 0$ y $d\alpha \neq 0$, luego tiene todas sus componentes no nulas. Como consecuencia, dos formas diferenciales de un cuerpo K de funciones algebraicas son iguales si y sólo si coinciden en una componente.

De este modo, si K es un cuerpo de funciones algebraicas, α, $x \in K$, x es separador y $\mathfrak{P}$ es un divisor primo de K, tenemos definida la derivada

$$\frac{d\alpha}{dx} \in K_{\mathfrak{P}}.$$

Si $f(x,t)$ es el polinomio mínimo de α sobre $k_0(x)$, se cumple

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\alpha) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,\alpha)\frac{d\alpha}{dx}.$$

Como f es separable, podemos despejar

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\alpha)}{\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,\alpha)} \in K. \tag{6.2}$$

Así pues, la derivada $\dfrac{d\alpha}{dx}$ es un elemento de K independiente de $\mathfrak{P}$. Además se cumple la relación

$$d\alpha = \frac{d\alpha}{dx}\, dx. \tag{6.3}$$

Esto prueba que el espacio de las formas diferenciales de K es un K-espacio vectorial de dimensión 1.

En la sección B.3 hemos definido el orden de una forma diferencial local. En el caso global tenemos un orden en cada primo. Concretamente, si $x \in K$ es un elemento separador, definimos

$$v_{\mathfrak{P}}(\beta\,dx) = v_{\mathfrak{P}}(\beta\,d_{\mathfrak{P}}x) = v_{\mathfrak{P}}\left(\beta\,\frac{dx}{d\pi}\right),$$

donde π es un primo cualquiera de $K_{\mathfrak{P}}$. Vamos a probar que $v_{\mathfrak{P}}(\beta\,dx) = 0$ para casi todo primo $\mathfrak{P}$. Esto nos permitirá asignar un divisor de K a cada diferencial.

Sea $\mathfrak{p}$ el divisor primo de $k = k_0(x)$ divisible entre $\mathfrak{P}$. Sea $p(x) \in k_0[x]$ el polinomio mónico irreducible que cumple $\mathfrak{p} = (p(x))$ si es que $\mathfrak{p} \neq \infty$ o bien $p(x) = 1/x$ si $\mathfrak{p} = \infty$. En cualquier caso $v_{\mathfrak{p}}(p(x)) = 1$, luego $p(x)$ es primo en $k_{\mathfrak{p}}$. Según el teorema 5.19, sabemos que $K_{\mathfrak{P}} = k_{0\mathfrak{P}}((\pi))$, donde $k_{0\mathfrak{P}}$ es la clausura algebraica de k_0 en $K_{\mathfrak{P}}$.

Sea $L = k_{0\mathfrak{P}}((p))$. Así el cuerpo de restos de L es el mismo que el de $K_{\mathfrak{P}}$, mientras que p sigue siendo primo en L. Esto implica que $f(L/k_{\mathfrak{p}}) = f(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$ y $e(L/k_{\mathfrak{p}}) = 1$. Concluimos que la extensión $L/k_{\mathfrak{p}}$ es no ramificada y $K_{\mathfrak{P}}/L$ es totalmente ramificada.

Por el teorema [TAl 9.9], el polinomio mínimo de π sobre L es un polinomio de Eisenstein, digamos

$$f(p,\pi) = \pi^e + pf_{e-1}(p)\pi^{e-1} + \cdots + pf_1(p)\pi + pf_0(p) = 0,$$

donde los coeficientes $f_i(p)$ son series enteras con coeficientes en $k_{0\mathfrak{P}}$ y $f_0(p)$ es una unidad. Derivando esta igualdad tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial p}(p,\pi)\frac{dp}{d\pi} + \frac{\partial f}{\partial \pi}(p,\pi) = 0.$$

Por una parte,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial p}(p,\pi) &= (f_{e-1}(p) + pf'_{e-1}(p))\pi^{e-1} + \cdots + (f_0(p) + pf'_0(p)) \\ &\equiv f_0(p) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}.\end{aligned}$$

Por otro lado, la nota tras [TAl 5.24] implica que las potencias $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}$ generan el anillo de enteros de $K_{\mathfrak{P}}$ sobre el de L, y entonces [TAl 9.23] nos da que $\dfrac{\partial f}{\partial \pi}(p,\pi)$ genera el diferente de la extensión $K_{\mathfrak{P}}/L$, que es el mismo que el de la extensión $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$, ya que el tramo inferior es no ramificado. Si llamamos $\mathfrak{D}$ al diferente de la extensión K/k, entonces el diferente de $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ es su componente $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}$, y hemos probado que

$$v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{dp}{d\pi}\right) = v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\partial f}{\partial \pi}(p,\pi)\right) = v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}) = v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}).$$

Por otra parte,

$$\frac{dp}{d\pi} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{d\pi},$$

y

$$\frac{dp}{dx} = \begin{cases} p'(x) & \text{si } \mathfrak{p} \neq \infty, \\ -1/x^2 & \text{si } \mathfrak{p} = \infty. \end{cases}$$

Si $\mathfrak{P} \mid \infty$, entonces $v_{\mathfrak{P}}(-1/x^2) = v_{\mathfrak{P}}(\infty^2)$, mientras que si $\mathfrak{P} \nmid \infty$ tenemos igualmente que $v_{\mathfrak{P}}(p'(x)) = 0 = v_{\mathfrak{P}}(\infty^2)$. En cualquier caso tenemos que

$$v_{\mathfrak{P}}(dx) = v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{dx}{d\pi}\right) = v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\mathfrak{D}}{\infty^2}\right).$$

En particular tenemos que, ciertamente, $v_{\mathfrak{P}}(dx) = 0$ para casi todo primo $\mathfrak{P}$. Lo mismo vale obviamente para cualquier forma diferencial $\alpha\,dx$ no nula. Esto justifica la definición siguiente:

Definición 6.21 Sea K un cuerpo de funciones algebraicas y $\alpha\,dx$ una forma diferencial no nula en K. Llamaremos *divisor diferencial* asociado a $\alpha\,dx$ al divisor

$$(\alpha\,dx) = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{v_{\mathfrak{P}}(\alpha\,dx)},$$

donde

$$v_{\mathfrak{P}}(\alpha\,dx) = v_{\mathfrak{P}}\left(\alpha\,\frac{dx}{d\pi}\right),$$

para cualquier primo π.

Hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 6.22 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0. Sea dx una forma diferencial no nula en K, con lo que x es un elemento separador y la extensión $K/k_0(x)$ es separable. Sea $\mathfrak{D}$ el diferente de esta extensión. Entonces*

$$(dx) = \frac{\mathfrak{D}}{\infty^2}.$$

La fórmula (6.3) muestra que todos los divisores diferenciales son equivalentes. De hecho, los divisores diferenciales constituyen una clase de equivalencia de divisores de K.

Definición 6.23 Si K es un cuerpo de funciones algebraicas, llamaremos *clase diferencial* o *clase canónica* de K a la clase de divisores de K formada por los divisores diferenciales.

Vamos a calcular el grado de la clase canónica de una curva proyectiva bajo una restricción: diremos que un punto P de una curva proyectiva V es *ordinario* si V tiene $m_P(V)$ tangentes distintas en P. El teorema 6.9 implica (véase la observación posterior) que en tal caso V tiene $m_P(V)$ primos sobre P. Es claro que todo punto regular es ordinario.

Teorema 6.24 *Sea V una curva proyectiva plana de grado n (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado) cuyas singularidades sean todas ordinarias. Entonces el grado de su clase canónica es $2g-2$, con*

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_P \frac{m_P(V)(m_P(V)-1)}{2},$$

donde P recorre los puntos (singulares) de V

Demostración: Por el teorema 6.11, podemos tomar una recta que corte a V en n puntos distintos. Podemos tomar un sistema de referencia respecto al cual esta recta sea $Z=0$. También podemos exigir que la recta $Y=0$ corte a la anterior en un punto (que tendrá coordenadas $(1,0,0)$) que no esté en V ni en ninguna de las tangentes a V por puntos singulares.

El teorema de Bezout implica que en los n puntos donde V corta a la recta infinita $Z=0$ el número de intersección es 1, luego todos estos puntos han de ser regulares. En otras palabras, V no tiene singularidades en el infinito.

Consideramos las coordenadas afines $x=X/Z$ e $y=Y/Z$. El grado de la clase canónica es, por ejemplo, el grado del divisor (dx), que es el que vamos a calcular. Sea $V=V(F)$, con $F\in k_0[X,Y]$.

Sea $P=(a,b)$ un punto finito de V. Si $\frac{\partial F}{\partial Y}\big|_P \neq 0$ entonces P es un punto regular, y ciertamente $X=a$ no es la recta tangente a V en P, luego si $\mathfrak{P}$ es el único primo de V situado sobre P, se cumple que $\pi = x-b$ es primo en $\mathfrak{O}_\mathfrak{P}$ y $dx = d(x-b) = 1d\pi$, luego $v_\mathfrak{P}(dx) = v_\mathfrak{P}(1) = 0$.

Supongamos ahora que $\frac{\partial F}{\partial Y}\big|_P = 0$. Distinguimos dos casos: si $\frac{\partial F}{\partial X}\big|_P \neq 0$ entonces P es regular e $Y=b$ no es la tangente a V en P; si $\frac{\partial F}{\partial X}\big|_P = 0$ entonces P es singular y la recta $Y=b$ tampoco es tangente a V en P porque contiene al punto $(1,0,0)$.

Así pues, en cualquier caso tenemos que la recta $Y=b$ no es tangente a V en P. Consecuentemente $I_P(V\cap Y-b) = m_P(V)$. Puesto que este número de intersección es la suma de los valores $v_\mathfrak{P}(y-b)$ para todos los primos $\mathfrak{P}$ situados sobre P y hay $m_P(V)$ tales primos (ya que P es ordinario), concluimos que $v_\mathfrak{P}(y-b)=1$ para todo primo $\mathfrak{P}$. Así pues, $\pi = y-b$ es primo en $\mathfrak{O}_\mathfrak{P}$. Además $d\pi = dy$.

Ahora usamos que $F(x,y)=0$, por lo que

$$\frac{\partial F}{\partial X}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)\,dy = 0. \tag{6.4}$$

Despejando,

$$dx = -\frac{\frac{\partial F}{\partial Y}}{\frac{\partial F}{\partial X}}\,dy = -\frac{\frac{\partial F}{\partial Y}}{\frac{\partial F}{\partial X}}\,d\pi.$$

Por consiguiente $v_\mathfrak{P}(dx) = v_\mathfrak{P}\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right) - v_\mathfrak{P}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)$. Si sumamos sobre todos los primos situados sobre P tenemos que

$$\sum_\mathfrak{P} v_\mathfrak{P}(dx) = I_P\left(V\cap\frac{\partial F}{\partial Y}\right) - I_P\left(V\cap\frac{\partial F}{\partial X}\right).$$

Vamos a calcular el segundo número de intersección. Sea

$$F = F_m(X-a, Y-b) + F_{m+1}(X-a, Y-b) + \cdots$$

la descomposición en formas de F alrededor de P, donde $m = m_P(V)$. El hecho de que $Y-b$ no sea tangente a V en P se traduce en que $Y-b \nmid F_m(X-a, Y-b)$ o, equivalentemente, en que $Y \nmid F_m(X, Y)$. En particular $F_m \neq Y^m$, luego las tangentes a V en P se corresponden con las raíces de $F_m(X, 1)$, las cuales son simples (pues P es ordinario).

Esto implica que $\frac{\partial F_m}{\partial X}(X, 1)$ sea un polinomio no nulo sin raíces en común con F_m. Dichas raíces se corresponden con las tangentes en P de $\frac{\partial F}{\partial X}$, luego concluimos que F y $\frac{\partial F}{\partial X}$ no tienen tangentes comunes en P (y además P tiene multiplicidad $m-1$ en la derivada). Esto implica que $I_P\left(V \cap \frac{\partial F}{\partial X}\right) = m_P(V)(m_P(V)-1)$. En total:

$$\sum_{\mathfrak{P}} v_{\mathfrak{P}}(dx) = I_P\left(V \cap \frac{\partial F}{\partial Y}\right) - m_P(V)(m_P(V)-1),$$

donde $\mathfrak{P}$ recorre los primos de V situados sobre P. Notemos que esta fórmula es válida incluso en el caso en que $\frac{\partial F}{\partial Y}\big|_P \neq 0$, pues entonces ambos miembros son nulos.

Supongamos ahora que P es un punto infinito. Por la elección del sistema de referencia tenemos que $P = (a, 1, 0)$, P es regular y la recta $Z = 0$ no es tangente a V en P. Sea $\mathfrak{P}$ el único primo de V situado sobre P.

Llamando $z = Z/Y$, tenemos que $1 = I_P(V \cap Z) = v_{\mathfrak{P}}(z)$, luego $\pi = z$ es primo en $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$. Además $y = 1/z$, luego $dy = (-1/z^2)dz = -\pi^{-2}\,d\pi$, luego $v_{\mathfrak{P}}(dy) = -2$. Despejando dx en (6.4) concluimos que

$$v_{\mathfrak{P}}(dx) = v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right) - v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right) - 2.$$

Ahora hemos de tener cuidado con el hecho de que las derivadas representan funciones en coordenadas afines y $\mathfrak{P}$ es un primo infinito. Para calcular las valoraciones hemos de homogeneizar las derivadas.

Sea $F(X, Y, Z)$ la homogeneización del polinomio $F(X, Y)$, de modo que $F(X, Y) = F(X, Y, 1)$. Claramente $\frac{\partial F}{\partial Y}(X, Y) = \frac{\partial F}{\partial Y}(X, Y, 1)$, y a su vez

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial Y}(x, y, 1) = \frac{\frac{\partial F}{\partial Y}(X, Y, Z)}{Z^{n-1}}.$$

Podemos hablar del número de intersección $I_P\left(V \cap \frac{\partial F}{\partial Y}(X, Y)\right)$, siendo la derivada una curva afín y P un punto infinito, entendiendo que con ello nos referimos al número de intersección en P de V con la clausura proyectiva de la curva, es decir, a $I_P(V \cap \frac{\partial F}{\partial Y}(X, Y, Z))$, pero este número de intersección no puede calcularse dividiendo $\frac{\partial F}{\partial Y}$ entre Z^{n-1}, porque Z se anula en P. Una forma que no se anula en P es Y, luego

$$v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\partial F}{\partial Y}(x, y)\right) = v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial Y}(X, Y, Z)}{Z^{n-1}}\right) = v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial Y}}{Y^{n-1}}\right) + v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{Y^{n-1}}{Z^{n-1}}\right)$$

$$= I_P\left(V \cap \frac{\partial F}{\partial Y}\right) + v_{\mathfrak{P}}(z^{-n-1}) = I_P\left(V \cap \frac{\partial F}{\partial Y}\right) - (n-1).$$

Igualmente

$$v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\partial F}{\partial X}(x,y)\right) = v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial X}(X,Y,Z)}{Z^{n-1}}\right) = v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial X}}{Y^{n-1}}\right) + v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{Y^{n-1}}{Z^{n-1}}\right),$$

pero ahora observamos que $\frac{\partial F}{\partial X}\big|_P \neq 0$, con lo que el primer término del miembro derecho es nulo. En efecto, si la derivada fuera nula, evaluando en $P = (a, 1, 0)$ la relación

$$\frac{\partial F}{\partial X}X + \frac{\partial F}{\partial Y}Y + \frac{\partial F}{\partial Z}Z = nF$$

concluiríamos que $\frac{\partial F}{\partial X}\big|_P = \frac{\partial F}{\partial Y}\big|_P = 0$ y, como P es regular, la derivada respecto de Z sería no nula, pero entonces $Z = 0$ sería tangente a V en P, lo cual es falso. Así pues, tenemos que

$$v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\partial F}{\partial X}(x,y)\right) = -(n-1).$$

En total,

$$v_{\mathfrak{P}}(dx) = I_P\left(V \cap \frac{\partial F}{\partial Y}\right) - 2.$$

Ahora sólo hemos de sumar para todos los primos y aplicar el teorema de Bezout:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(dx) &= \sum_P I_P\left(V \cap \frac{\partial F}{\partial Y}\right) - 2n - \sum_P m_P(V)(m_P(V)-1)\\ &= n(n-1) - 2n - \sum_P m_P(V)(m_P(V)-1)\\ &= (n-1)(n-2) - 2 - \sum_P m_P(V)(m_P(V)-1) = 2g-2.\end{aligned}$$

■

La razón para expresar el grado en términos de g es que g será lo que más adelante llamaremos género de V, de modo que en el caso $k_0 = \mathbb{C}$ coincidirá con el género topológico que ya tenemos definido.

Nos ocupamos ahora de los residuos de una forma diferencial. Si K es un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0, α, $\beta \in K$ y $\mathfrak{p}$ es un primo de K, tenemos definido

$$\operatorname{Res}_{\mathfrak{p}}(\beta\, d\alpha) = \operatorname{Res}_{K_{\mathfrak{p}}}(\beta\, d_{\mathfrak{p}}\alpha) \in k_{0\mathfrak{p}},$$

donde $k_{0\mathfrak{p}}$ es la clausura algebraica de k_0 en $K_{\mathfrak{p}}$. En general estos residuos no están en el cuerpo de constantes k_0. El teorema B.28 muestra que las trazas conectan bien los residuos entre extensiones, por lo que resulta conveniente definir

$$\oint_{\mathfrak{p}} \beta\, d\alpha = \operatorname{Tr}_{k_0}^{k_{0\mathfrak{p}}}(\operatorname{Res}_{\mathfrak{p}}(\beta\, d\alpha)).$$

Notemos que esto tiene sentido para todo $\alpha,\ \beta \in K_\mathfrak{p}$. Claramente esta integral es k_0-lineal en α y en β. Del teorema B.28 deducimos ahora la siguiente versión global:

Teorema 6.25 *Sea L/K una extensión separable de cuerpos de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0. Sea $\alpha \in K$ y $\beta \in L$. Entonces, para cada primo $\mathfrak{p}$ de K se cumple*

$$\oint_\mathfrak{p} \mathrm{Tr}_K^L(\beta)\,d\alpha = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \oint_\mathfrak{P} \beta\,d\alpha.$$

Demostración: Basta usar que la traza global es la suma de las trazas locales (teorema 5.32):

$$\begin{aligned}\oint_\mathfrak{p} \mathrm{Tr}_K^L(\beta)\,d\alpha &= \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \oint_\mathfrak{p} \mathrm{Tr}_{K_\mathfrak{p}}^{L_\mathfrak{P}}(\beta)\,d\alpha = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathrm{Tr}_{k_0}^{k_{0\mathfrak{p}}}(\mathrm{Res}_\mathfrak{p}(\mathrm{Tr}_{K_\mathfrak{p}}^{L_\mathfrak{P}}(\beta)\,d\alpha)\\ &= \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathrm{Tr}_{k_0}^{k_{0\mathfrak{p}}}(\mathrm{Tr}_{k_{0\mathfrak{p}}}^{k_{0\mathfrak{P}}}(\mathrm{Res}_\mathfrak{P}(\beta\,d\alpha))) = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathrm{Tr}_{k_0}^{k_{0\mathfrak{P}}}(\mathrm{Res}_\mathfrak{P}(\beta\,d\alpha))\\ &= \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \oint_\mathfrak{P} \beta\,d\alpha.\end{aligned}$$

■

Es importante observar que la integral local de una forma diferencial depende del cuerpo de constantes que estemos considerando. Concretamente, si cambiamos el cuerpo de constantes por otro mayor, la integral respecto al cuerpo menor es la traza de la integral respecto al cuerpo mayor. La igualdad del teorema anterior se cumple si las integrales de ambos miembros se calculan respecto al mismo cuerpo de constantes, al contrario de lo que ocurre en el teorema siguiente:

Teorema 6.26 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre el cuerpo exacto de constantes k_0. Sea L una extensión finita de constantes de K. Entonces, para todo $\alpha,\ \beta \in K$ y todo primo $\mathfrak{p}$ de K se cumple que*

$$\oint_\mathfrak{p} \beta\,d\alpha = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \oint_\mathfrak{P} \beta\,d\alpha,$$

donde las integrales del miembro derecho se calculan respecto al cuerpo exacto de constantes de L.

Demostración: Podemos suponer que la extensión L/K es finita de Galois y que los divisores de $\mathfrak{p}$ en L tienen grado 1. En efecto, siempre existe una extensión L' de K en estas condiciones y que contiene a L, y el teorema para L/K se sigue inmediatamente del teorema para L'/K y L'/L.

Sea k_1 el cuerpo de constantes exacto de L y sea $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$ la factorización de $\mathfrak{p}$ en L. Tomando grados en ambos miembros concluimos que $r = \mathrm{grad}\,\mathfrak{p}$.

Sea $n = |L : K| = |k_1 : k_0|$. Es fácil ver que la restricción determina un isomorfismo $G(L/K) \cong G(k_1/k_0)$. Cada $\sigma \in G(L/K)$ determina un isomorfismo topológico $\sigma : L_{\mathfrak{P}_1} \longrightarrow L_{\sigma(\mathfrak{P}_1)}$. Si $\pi \in K$ cumple $v_{\mathfrak{p}}(\pi) = 1$, entonces también $v_{\mathfrak{P}_i}(\pi) = 1$, por lo que $L_{\mathfrak{P}_i} = k_1((\pi))$. El isomorfismo inducido por σ viene dado por

$$\sigma\Big(\sum_i a_i\pi^i\Big) = \sum_i \sigma(a_i)\pi^i.$$

Fijemos automorfismos σ_i tales que $\sigma_i(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{P}_i$. Identifiquemos a $K_{\mathfrak{p}}$, como es habitual, con la clausura de K en $L_{\mathfrak{P}_1}$, de modo que $K_{\mathfrak{p}} = k_{0\mathfrak{p}}((\pi))$, donde $k_{0\mathfrak{p}}$ es un subcuerpo de k_1 de grado r sobre k_0. En este punto es crucial observar que esta representación de $k_{0\mathfrak{p}}$ como subcuerpo de k_1 depende de la elección que hemos hecho de $\mathfrak{P}_1$, en el sentido de que si queremos identificar a $K_{\mathfrak{p}}$ con un subcuerpo de otro $L_{\mathfrak{P}_i}$ tendremos que sustituir $k_{0\mathfrak{p}}$ por su imagen por σ_i.

Si un automorfismo $\sigma \in G(L/K)$ fija a $\mathfrak{P}_1$ entonces fija a $k_{0\mathfrak{p}}$. Como el número de automorfismos que cumplen una y otra condición ha de ser igual a n/r, el recíproco es cierto y, por consiguiente, las restricciones $\sigma_i|_{k_{0\mathfrak{p}}}$ son los r monomorfismos de $k_{0\mathfrak{p}}$ sobre k_0. Sea

$$\beta\,\frac{d\alpha}{d\pi} = \sum_i a_i\pi^i, \qquad a_i \in k_{0\mathfrak{p}}.$$

Entonces $\mathrm{Res}_{\mathfrak{P}_1}(\beta\,d\alpha) = a_{-1}$ y aplicando σ_i obtenemos que $\mathrm{Res}_{\mathfrak{P}_i}(\beta\,d\alpha) = \sigma_i(a_{-1})$. Por otra parte a_{-1} es también $\mathrm{Res}_{\mathfrak{p}}(\beta\,d\alpha)$, con lo que

$$\sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \oint_{\mathfrak{P}} \beta\,d\alpha = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Res}_{\mathfrak{P}_i}(\beta\,d\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i(a_{-1}) = \mathrm{Tr}_{k_0}^{k_{0\mathfrak{p}}}(\mathrm{Res}_{\mathfrak{p}}(\beta\,d\alpha)) = \oint_{\mathfrak{p}} \beta\,d\alpha.$$

■

Ejercicio: Probar que el teorema anterior es válido para extensiones infinitas de constantes.

Sabemos que el orden de una forma diferencial es nulo en todos los primos salvo a lo sumo en una cantidad finita de ellos, luego el residuo correspondiente también es nulo. Por consiguiente tiene sentido la suma

$$\sum_{\mathfrak{p}} \oint_{\mathfrak{p}} \beta\,d\alpha.$$

Ahora podemos probar otro importante teorema global:

Teorema 6.27 (Teorema de los residuos) *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0 y $\beta\,d\alpha$ una forma diferencial en K. Entonces*

$$\sum_{\mathfrak{p}} \oint_{\mathfrak{p}} \beta\,d\alpha = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in K$ un elemento separador y sea $k = k_0(x)$. Basta probar que

$$\sum_{\mathfrak{p}} \oint_{\mathfrak{p}} \beta\, dx = 0, \qquad \beta \in K,$$

pues el caso general se sigue de éste cambiando β por $\beta \dfrac{d\alpha}{dx}$. A su vez 6.25 nos da que la suma de las integrales locales de $\beta\, dx$ en K es la misma que la suma de las integrales locales de $\mathrm{Tr}_k^K(\beta)\, dx$ en k. Por consiguiente, podemos suponer que $K = k_0(x)$ es un cuerpo de funciones racionales. El teorema 6.26 nos permite sustituir k_0 por una extensión finita. Esto nos permite suponer que los divisores primos de β tienen grado 1. Entonces $\beta\, dx$ se descompone en una combinación lineal de términos de la forma

$$\frac{dx}{(x-a)^i}, \qquad x^i\, dx.$$

En efecto, si $x - a$ es un divisor del denominador de β, el desarrollo en serie de Laurent de β alrededor de este primo consta de un número finito de múltiplos de funciones $(x-a)^{-i}$ más una función racional cuyo denominador no es divisible entre $x - a$. Volviendo a aplicar este proceso de descomposición con otro primo, finalmente llegamos a una función racional cuyo denominador es constante, luego es un polinomio, luego es combinación lineal de términos x^i.

Así pues, basta probar el teorema para formas de los dos tipos indicados. Las formas $x^i\, dx$ tienen todos sus residuos nulos, al igual que las formas del primer tipo cuando $i \neq 1$. Por último,

$$\mathrm{Res}_{x-a} \frac{dx}{x-a} = 1, \qquad \mathrm{Res}_{\infty} \frac{dx}{x-a} = -1,$$

y todos los demás residuos son nulos, luego estas formas también cumplen el teorema. ∎

Observemos que si el cuerpo de constantes es algebraicamente cerrado, las integrales locales son simplemente los residuos, y el teorema anterior afirma en tal caso que la suma de los residuos de una función algebraica es nula.

Diferenciales en curvas algebraicas Terminamos la sección relacionando la noción de forma diferencial que acabamos de introducir con la usual en geometría algebraica y, en particular para curvas complejas, con la de la geometría diferencial.

Ante todo observemos que si V es una curva algebraica sobre un cuerpo (algebraicamente cerrado) k_0, $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$ y π es un parámetro local en P, tras el teorema 5.20 vimos que el desarrollo en serie de α en $k_0(V)_P$ respecto al primo π es precisamente la serie de Taylor de α respecto de π, de donde se sigue que la derivada de α respecto de π que hemos definido en este capítulo coincide con la definida en 3.42 (véanse los comentarios tras la definición).

Una *forma diferencial* en sentido amplio sobre una curva V sería cualquier aplicación ω que a cada punto P en un abierto U de V le asigne un elemento

ω_P del espacio cotangente T_PV^*. El conjunto de todas las formas diferenciales definidas sobre un mismo abierto U tiene estructura de k_0-espacio vectorial con las operaciones definidas puntualmente. Más aún, es un módulo sobre el anillo de todas las funciones de U en k_0. Si ω es una forma en un abierto U, su restricción $\omega|_{U'}$ a un abierto menor U' es una forma en U'.

Por ejemplo, si U es un abierto en V y $\alpha \in k_0[U]$, entonces podemos considerar a $d\alpha$ como una forma diferencial en U, que a cada punto $P \in U$ le asigna $d_P\alpha \in T_PV^*$.

Sea ω una forma diferencial definida en un entorno U de un punto P y sea π un parámetro local en P. Entonces el teorema 3.29 nos da que, para todo Q en un entorno $U' \subset U$ de P, la función $\pi - \pi(Q)$ es también un parámetro local en Q, por lo que $d_Q\pi$ es una base de T_QV^* y existe una función $\alpha : U' \longrightarrow k_0$ tal que $\omega|_{U'} = \alpha\, d\pi$.

Si $\pi' \in k_0(V)$ es otro parámetro local alrededor de P, entonces

$$d\pi|_{U\cap U'} = \frac{d\pi}{d\pi'}\, d\pi'|_{U\cap U'}.$$

Hemos visto que $d\pi/d\pi' \in k_0[U \cap U']$. En vista de esto, podemos definir una forma *regular* en un punto P como una forma ω tal que $\omega|_U = \alpha\, d\pi$, donde $\pi - \pi(Q)$ es un parámetro local en todos los puntos de un entorno U de P y $\alpha \in k_0[U]$, sin que importe el parámetro con que se comprueba la regularidad.

Es fácil ver que si dos formas son regulares en un abierto U y coinciden en un abierto menor, entonces coinciden en todo U. Esto nos permite definir una *forma racional* en V como una forma diferencial que es regular en un abierto U de V, no está definida fuera de U y no admite una extensión regular a ningún abierto mayor. Claramente, toda forma regular en un abierto de V se extiende a una única forma racional en V. Toda forma racional en V es (la extensión de una forma) de tipo $\alpha\, d\pi$, para una cierta función $\pi \in k_0(V)$.

Más aún, si $\alpha, \beta \in k_0(V)$ son funciones arbitrarias, entonces para cada punto P donde ambas son regulares podemos tomar un parámetro local π y expresar

$$\alpha\, d\beta = \alpha\, \frac{d\beta}{d\pi}\, d\pi,$$

lo que prueba que toda forma $\alpha\, d\beta$ es (o se extiende a) una forma diferencial racional en V. Ahora ya es fácil comprobar que las formas diferenciales del cuerpo $k_0(V)$ pueden identificarse con las formas racionales en V.

Si $k_0 = \mathbb{C}$ o, más en general, si V es una superficie de Riemann, en los razonamientos anteriores podemos cambiar "parámetro local" por "carta", "regular" por "holomorfa" y "racional" por "meromorfa" y así es fácil concluir que las formas diferenciales en $\mathcal{M}(V)$ son las formas diferenciales meromorfas en V, es decir, las formas diferenciales (en el sentido de la geometría diferencial) definidas en V salvo en un número finito de polos y de modo que en cada abierto coordenado U (dominio de una carta z) se expresan como $f\, dz$, donde f es una función meromorfa en U.

6.3 La dimensión de un divisor

En la sección siguiente demostraremos un teorema fundamental sobre curvas algebraicas, el teorema de Riemann-Roch, que es esencialmente una fórmula que relaciona el grado de un divisor con otro invariante asociado que introducimos a continuación.

Definición 6.28 Sea K un cuerpo de fracciones algebraicas y $\mathfrak{a}$ un divisor de K. Llamaremos *múltiplos* de $\mathfrak{a}$ a los elementos del conjunto

$$m(\mathfrak{a}) = \{\alpha \in K \mid v_{\mathfrak{P}}(\alpha) \geq v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}) \text{ para todo } \mathfrak{P}\}.$$

Notemos que un $\alpha \in K^*$ es múltiplo de $\mathfrak{a}$ si y sólo si $\mathfrak{a} \mid (\alpha)$, pero en la definición de $m(\mathfrak{a})$ admitimos también al 0. Así, por las propiedades de las valoraciones, los conjuntos de múltiplos son claramente k_0-espacios vectoriales.

Si $\alpha \in m(\mathfrak{a})$ es no nulo, entonces

$$0 = \operatorname{grad}(\alpha) = \sum_{\mathfrak{P}} v_{\mathfrak{P}}(\alpha) \operatorname{grad}\mathfrak{P} \geq \sum_{\mathfrak{P}} v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}) \operatorname{grad}\mathfrak{P} = \operatorname{grad}\mathfrak{a}.$$

Así pues, si $\operatorname{grad}\mathfrak{a} > 0$ necesariamente $m(\mathfrak{a}) = 0$. Para trabajar con divisores de grado positivo es costumbre definir la dimensión de un divisor como la del espacio de múltiplos de su inverso:

Definición 6.29 Sea $\mathfrak{a}$ un divisor de un cuerpo de funciones algebraicas K sobre el cuerpo de constantes k_0. Definimos la *dimensión* de $\mathfrak{a}$ como

$$\dim \mathfrak{a} = \dim_{k_0} m(\mathfrak{a}^{-1}).$$

No es evidente que la dimensión de un divisor sea finita, pero lo es:

Teorema 6.30 *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas, todos los divisores de K tienen dimensión finita.*

Demostración: Sea $\mathfrak{a}$ un divisor de K (podemos suponer $\operatorname{grad}\mathfrak{a} \geq 0$) y sea $\mathfrak{P}$ un divisor primo de K tal que $v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}) = 0$. Llamemos $g = \operatorname{grad}\mathfrak{P}$. Sea r un número natural no nulo tal que $\dim m(\mathfrak{a}^{-1}) > rg$.

Todo $\alpha \in m(\mathfrak{a}^{-1})$ cumple $v_{\mathfrak{P}}(\alpha) \geq v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}^{-1}) = 0$, luego $m(\mathfrak{a}^{-1}) \subset \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$. Observemos ahora que

$$\dim_{k_0} \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r \leq rg.$$

En efecto, consideramos la sucesión de subespacios vectoriales

$$0 = \mathfrak{P}^r/\mathfrak{P}^r \leq \mathfrak{P}^{r-1}/\mathfrak{P}^r \leq \cdots \leq \mathfrak{P}/\mathfrak{P}^r \leq \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r.$$

Basta ver que cada cociente de dos espacios consecutivos tiene dimensión g. Para el último tenemos que $(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r)/(\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^r) \cong \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P} = \overline{K}_{\mathfrak{P}}$, que ciertamente tiene dimensión g sobre k_0.

Para los restantes tenemos que $(\mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^r)/(\mathfrak{P}^{i+1}/\mathfrak{P}^r) \cong \mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{i+1}$. Tomando $\pi \in K$ tal que $v_\mathfrak{P}(\pi) = 1$, podemos definir un isomorfismo

$$\overline{K}_\mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{i+1}$$

mediante $[\alpha] \mapsto [\alpha\pi^i]$.

Así pues, si $\alpha_0, \dots, \alpha_{rg} \in m(\mathfrak{a}^{-1})$ son k_0-linealmente independientes, sus clases módulo $\mathfrak{P}^r$ no pueden serlo, luego existen constantes no todas nulas tales que

$$\theta = a_0\alpha_0 + \cdots + a_{rg}\alpha_{rg} \equiv 0 \ (\text{mód } \mathfrak{P}^r).$$

Por lo tanto, $v_\mathfrak{P}(\theta) \geq r$. Tenemos que $\theta \in m(\mathfrak{a}^{-1})$ y como los α_i son linealmente independientes, se cumple que $\theta \neq 0$. Por el teorema 5.41 resulta que

$$0 = \operatorname{grad}(\theta) = \sum_\mathfrak{Q} v_\mathfrak{Q}(\theta)\operatorname{grad}\mathfrak{Q} \geq \sum_{\mathfrak{Q}\neq\mathfrak{P}} v_\mathfrak{Q}(\mathfrak{a}^{-1})\operatorname{grad}\mathfrak{Q} + r\operatorname{grad}\mathfrak{P}.$$

Teniendo en cuenta que $v_\mathfrak{P}(\mathfrak{a}^{-1}) = 0$, podemos añadir el término que falta al sumatorio, que pasa a ser $-\operatorname{grad}\mathfrak{a}$. Concluimos que $rg \leq \operatorname{grad}\mathfrak{a}$, luego

$$r \leq \frac{\operatorname{grad}\mathfrak{a}}{g}.$$

Por consiguiente, si r es la parte entera de $g^{-1}\operatorname{grad}\mathfrak{a} + 1$, no puede cumplir la desigualdad de partida, con lo que

$$\dim\mathfrak{a} \leq \left(\frac{\operatorname{grad}\mathfrak{a}}{g} + 1\right)\operatorname{grad}\mathfrak{P} = \operatorname{grad}\mathfrak{a} + \operatorname{grad}\mathfrak{P}. \qquad \blacksquare$$

Otra propiedad relevante es que la dimensión del espacio de múltiplos es la misma para los divisores equivalentes. En efecto, de la propia definición se desprende que si $\alpha \in K^*$ entonces $m(\alpha\mathfrak{a}) = \alpha m(\mathfrak{a})$, por lo que la aplicación $u \mapsto \alpha u$ es un automorfismo de K como k_0-espacio vectorial que transforma $m(\mathfrak{a})$ en $m(\alpha\mathfrak{a})$. Por consiguiente podemos hablar de la dimensión de una clase de divisores, así como de la aplicación

$$\dim : \mathcal{D}/P \longrightarrow \mathbb{N}.$$

También hemos visto que las clases de grado negativo tienen dimensión nula. Vamos a calcular ahora la dimensión de las clases de grado 0. Suponemos que k_0 es el cuerpo exacto de constantes de K.

En general, si A es cualquier clase de divisores y $\mathfrak{a} \in A$, para cada $\alpha \in K^*$ se cumple $\alpha \in m(\mathfrak{a}^{-1})$ si y sólo si $(\alpha) = \mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ para un cierto divisor entero $\mathfrak{m}$, que de hecho pertenece a la clase A. Recíprocamente, todo divisor entero $\mathfrak{m} \in A$ da lugar a un $\alpha \in m(\mathfrak{a}^{-1})$ que satisface la relación anterior. Según 5.37, dos elementos no nulos de $m(\mathfrak{a}^{-1})$ se corresponden con un mismo divisor $\mathfrak{m}$ si y sólo si se diferencian en un elemento de k_0. (Aquí usamos que k_0 es el cuerpo exacto de constantes.)

Si $\dim A = r$, podemos tomar una k_0-base $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ de $m(\mathfrak{a}^{-1})$ y entonces sus divisores enteros correspondientes $\mathfrak{m}_i$ son distintos dos a dos. Por consiguiente, una clase de divisores A contiene al menos $\dim A$ divisores enteros distintos dos a dos.

Ahora basta tener en cuenta que 1 es el único divisor entero de grado 0, por lo que si $A \neq 1$ es una clase de grado 0, necesariamente $\dim A = 0$. Similarmente $\dim 1 \leq 1$ y, puesto que $k_0 \subset m(1)$, de hecho se da la igualdad y $\dim 1 = 1$. En resumen:

Teorema 6.31 *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas sobre el cuerpo exacto de constantes k_0 y $A \in \mathcal{D}/P$ es una clase de divisores de grado 0, entonces*

$$\dim A = \begin{cases} 0 & \text{si } A \neq 1, \\ 1 & \text{si } A = 1. \end{cases}$$

Veamos que las extensiones de constantes conservan la dimensión de los divisores (entendida, al igual que el grado, respecto al cuerpo de constantes exacto de cada cuerpo).

Teorema 6.32 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas y L una extensión finita de constantes de K. Sean k_0 y k_1 los respectivos cuerpos de constantes exactos. Entonces la dimensión (respecto a k_0) de un divisor de K coincide con su dimensión (respecto a k_1) como divisor de L. Más concretamente, si $\mathfrak{a}$ es un divisor de K, toda k_0-base de $m_K(\mathfrak{a})$ es una k_1-base de $m_L(\mathfrak{a})$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar la última afirmación. Sea $\omega_1, \ldots, \omega_m$ una k_0-base de $m_K(\mathfrak{a})$. En primer lugar, si $\mathfrak{p}$ es un primo de K, tenemos que su descomposición en L es de la forma $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$, donde los primos $\mathfrak{P}_i$ son distintos dos a dos. Por lo tanto las valoraciones $v_{\mathfrak{P}_i}$ extienden a la valoración $v_{\mathfrak{p}}$, y así, si $\alpha \in K$, la relación $v_{\mathfrak{p}}(\alpha) \geq n$ equivale a que $v_{\mathfrak{P}_i}(\alpha) \geq n$ para todo i. De aquí se sigue que $\omega_i \in m_L(\mathfrak{a})$.

Es fácil ver que $\omega_1, \ldots, \omega_m$ son linealmente independientes sobre k_1. En efecto, sea $k_1 = k_0(\alpha)$. Si $\sum_i a_i \omega_i = 0$, con $a_i \in k_1$, entonces $a_i = \sum_j b_{ij} \alpha^j$, con $b_{ij} \in k_0$, luego $\sum_{ij} b_{ij} \omega_i \alpha^j = 0$, de donde $\sum_i b_{ij} \omega_i = 0$ y por consiguiente todos los coeficientes b_{ij} son nulos.

Con esto hemos probado que $\dim_K \mathfrak{a} \leq \dim_L \mathfrak{a}$. Si llamamos k_2 a la clausura normal de k_1 sobre k_0 y L' a la extensión de constantes de K asociada a k_2, tendremos que $\dim_K \mathfrak{a} \leq \dim_L \mathfrak{a} \leq \dim_{L'} \mathfrak{a}$, y basta probar la igualdad de los extremos. Equivalentemente, podemos suponer que k_1 es normal sobre k_0.

Tomemos $\beta \in m_L(\mathfrak{a})$. Hemos de probar que es combinación lineal de los elementos ω_i. En principio $\beta = \sum_i a_i \alpha^i$, con $a_i \in K$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ los conjugados de α sobre k_0 (y también sobre K). Entonces, las imágenes de β por los K-automorfismos de L son los elementos $\beta_j = \sum_i a_i \alpha_j^i$. Es fácil ver que todos ellos pertenecen a $m_L(\mathfrak{a})$.

La matriz (α_j^i) tiene determinante no nulo (es de Vandermonde), luego podemos despejar $a_i = \sum_i b_{ij} \beta_j$, con $b_{ij} \in k_1$. Puesto que $m_L(\mathfrak{a})$ es un k_1-espacio

vectorial, concluimos que $a_i \in m_L(\mathfrak{a}) \cap K \subset m_K(\mathfrak{a})$. Consecuentemente, cada a_i es combinación lineal de los ω_i con coeficientes en k_0, y de aquí que β es combinación lineal de los ω_i con coeficientes en k_1. ∎

De aquí extraemos una consecuencia interesante:

Teorema 6.33 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas y L una extensión finita de constantes de K. Entonces un divisor de K es principal como divisor de K si y sólo si es principal como divisor de L. Por consiguiente podemos identificar el grupo de clases de K con un subgrupo del grupo de clases de L.*

Demostración: Basta probar la primera afirmación, pero, según 6.31, un divisor $\mathfrak{a}$ es principal si y sólo si $\operatorname{grad}\mathfrak{a} = 0$ y $\dim\mathfrak{a} = 1$, y estas propiedades se conservan en las extensiones finitas de constantes. ∎

Esto se generaliza inmediatamente a extensiones infinitas de constantes: todas ellas conservan la dimensión y la equivalencia de divisores, y el grupo de los divisores de una extensión es la unión de los grupos de divisores de las extensiones finitas intermedias.

6.4 El teorema de Riemann-Roch

Ya tenemos casi todos los elementos necesarios para demostrar el teorema fundamental sobre cuerpos de funciones algebraicas. Como ya hemos comentado, se trata de una fórmula que relaciona la dimensión y el grado de un divisor (o, equivalentemente, de una clase de divisores). En esta fórmula interviene una constante asociada al cuerpo que resulta ser una generalización de la noción de género que ya tenemos definida topológicamente cuando el cuerpo de constantes es $\mathbb{C}$. Vamos a seguir la prueba de André Weil, basada en el concepto de elemento ideal que introducimos a continuación.

Definición 6.34 Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0. Llamaremos *elementos ideales aditivos* de K a los elementos α del producto cartesiano de todas las compleciones $K_\mathfrak{P}$ de K que verifican $v_\mathfrak{P}(\alpha_\mathfrak{P}) \geq 0$ salvo a lo sumo para un número finito de primos $\mathfrak{P}$.

El conjunto V_K de todos los elementos ideales aditivos tiene estructura de anillo (con divisores de 0). Podemos identificar cada $\alpha \in K$ con el elemento ideal dado por $\alpha_\mathfrak{P} = \alpha$, para todo divisor primo $\mathfrak{P}$ de K. De este modo, K es un subcuerpo de V_K.

Para cada divisor $\mathfrak{a}$ de K definimos $\Lambda(\mathfrak{a})$ como el conjunto de los elementos ideales $\alpha \in V_K$ tales que $v_\mathfrak{P}(\alpha_\mathfrak{P}) \geq -v_\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ para todo divisor primo $\mathfrak{P}$ de K.

De este modo se cumple que $\Lambda(\mathfrak{a}) \cap K = m(\mathfrak{a}^{-1})$. Tanto V_K como los conjuntos $\Lambda(\mathfrak{a})$ tienen estructura de k_0-espacio vectorial y la dimensión de la intersección $\Lambda(\mathfrak{a}) \cap K$ es lo que hemos llamado $\dim\mathfrak{a}$.

En general, si B es un espacio vectorial y $A \leq B$, representaremos por $|B : A|$ a la dimensión del espacio cociente B/A.

Es claro que $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$ si y sólo si $\Lambda(\mathfrak{a}) \subset \Lambda(\mathfrak{b})$. Vamos a calcular la dimensión del cociente $|\Lambda(\mathfrak{b}) : \Lambda(\mathfrak{a})|$ (sobre k_0).

Teorema 6.35 *Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dos divisores de un cuerpo de funciones algebraicas tales que $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$. Entonces*

$$|\Lambda(\mathfrak{b}) : \Lambda(\mathfrak{a})| = \operatorname{grad}\mathfrak{b} - \operatorname{grad}\mathfrak{a}.$$

DEMOSTRACIÓN: Basta probarlo en el caso en que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{P}$, para un cierto primo $\mathfrak{P}$. Sea K el cuerpo de funciones que estamos considerando y sea $\mathfrak{O}_\mathfrak{P} \subset K$ el anillo de enteros respecto a $\mathfrak{P}$. Sea $\pi \in K$ tal que $v_\mathfrak{P}(\pi) = 1$ y sea $n = v_\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$. Consideremos la aplicación $\mathfrak{O}_\mathfrak{P} \longrightarrow \Lambda(\mathfrak{b})/\Lambda(\mathfrak{a})$ que a cada $\alpha \in \mathfrak{O}_\mathfrak{P}$ le asigna la clase del elemento ideal cuya componente $\mathfrak{P}$-ésima es $\pi^{-n-1}\alpha$ y sus otras componentes son nulas. Claramente se trata de un epimorfismo de espacios vectoriales y su núcleo es $\mathfrak{P}$. Así pues,

$$|\Lambda(\mathfrak{b}) : \Lambda(\mathfrak{a})| = \dim \mathfrak{O}_\mathfrak{P}/\mathfrak{P} = \operatorname{grad}\mathfrak{P} = \operatorname{grad}\mathfrak{b} - \operatorname{grad}\mathfrak{a}.$$

■

La siguiente fórmula que necesitamos se prueba más claramente en un contexto general: sean B y C dos subespacios vectoriales de un mismo espacio y $A \leq B$. Entonces

$$|B : A| = |B + C : A + C| + |B \cap C : A \cap C|.$$

En efecto, se cumple

$$\begin{aligned} |B : A| &= |B : A + (B \cap C)| + |A + (B \cap C) : A| \\ &= |B/(B \cap C) : (A + (B \cap C))/(B \cap C)| + |A + (B \cap C) : A|. \end{aligned}$$

La imagen del cociente $(A + (B \cap C))/(B \cap C)$ por el isomorfismo natural $B/(B \cap C) \cong (B + C)/C$ es claramente $(A + C)/C$, luego

$$|B : A| = |(B + C)/C : (A + C)/C| + |B \cap C : A \cap B \cap C|,$$

y de aquí se sigue la fórmula buscada. ■

Nos interesa el caso particular en que $A = \Lambda(\mathfrak{a})$, $B = \Lambda(\mathfrak{b})$ (con $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$) y $C = K$. Entonces tenemos

$$|\Lambda(\mathfrak{b}) : \Lambda(\mathfrak{a})| = |\Lambda(\mathfrak{b}) + K : \Lambda(\mathfrak{a}) + K| + |m(\mathfrak{b}^{-1}) : m(\mathfrak{a}^{-1})|.$$

Teniendo en cuenta el teorema anterior concluimos:

Teorema 6.36 *Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dos divisores de un cuerpo K de funciones algebraicas tales que $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$. Entonces*

$$\operatorname{grad}\mathfrak{b} - \operatorname{grad}\mathfrak{a} = |\Lambda(\mathfrak{b}) + K : \Lambda(\mathfrak{a}) + K| + \dim \mathfrak{b} - \dim \mathfrak{a}.$$

Necesitamos descomponer el índice de esta fórmula como diferencia

$$|V_K : \Lambda(\mathfrak{b}) + K| - |V_K : \Lambda(\mathfrak{a}) + K|,$$

pero para ello hemos de probar que estos índices son finitos.

Conviene introducir la función

$$r(\mathfrak{a}) = \operatorname{grad} \mathfrak{a} - \dim \mathfrak{a},$$

de modo que si $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$ se cumple

$$0 \leq |\Lambda(\mathfrak{b}) + K : \Lambda(\mathfrak{a}) + K| = r(\mathfrak{b}) - r(\mathfrak{a}). \tag{6.5}$$

Así pues, la función r es "creciente". Vamos a probar que está acotada superiormente.

Fijemos un $x \in K$ no constante. Sea $k = k_0(x)$, sea $n = |K : k_0(x)|$ y sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una k-base de K. Podemos suponer que los α_i son enteros sobre $k_0[x]$, es decir, que sus polos están en los primos infinitos. Por consiguiente existe un número natural s_0 tal que $\alpha_i \in m(\infty^{-s_0})$.

Tomemos un natural $s > s_0$. Si $0 \leq m \leq s - s_0$ entonces $x^m \alpha_i \in m(\infty^{-s})$. Puesto que estas funciones son linealmente independientes sobre k_0, esto prueba que $\dim \infty^s \geq (s - s_0 + 1)n$.

Llamemos $N_s = |\Lambda(\infty^s) + K : \Lambda(1) + K| \geq 0$. El teorema 6.36 para $\mathfrak{a} = 1$ y $\mathfrak{b} = \infty^s$ nos da

$$sn = \operatorname{grad} \infty^s = N_s + \dim \infty^s - 1 \geq N_s + (s - s_0 + 1)n - 1,$$

luego $N_s \leq s_0 n - n + 1$, para todo $s > s_0$. Por consiguiente

$$r(\infty^s) - r(1) \leq s_0 n - n + 1$$

y así $r(\infty^s) \leq r(1) + s_0 n - n + 1$ para todo $s > s_0$.

Ahora tomamos un divisor arbitrario $\mathfrak{b}$. Sea $p(x) \in k_0[x]$ un polinomio que tenga ceros adecuados en los divisores finitos de $\mathfrak{b}$, de modo que, para un s suficientemente grande, $\mathfrak{b} \mid p(x)\infty^s$. Ahora usamos que la función r es monótona y sólo depende de las clases de los divisores, con lo que

$$r(\mathfrak{b}) \leq r(p(x)\infty^s) = r(\infty^s) \leq r(1) + s_0 n - n + 1.$$

En resumen, tal y como queríamos probar, la función r está acotada superiormente.

El interés de esto se debe a lo siguiente: Si en la fórmula (6.5) fijamos $\mathfrak{a}$, tiene que haber un divisor $\mathfrak{b}$ tal que $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$ y el índice $|\Lambda(\mathfrak{b}) + K : \Lambda(\mathfrak{a}) + K|$ sea máximo (pues la función $r(\mathfrak{b})$ está acotada). Por otra parte, tomando $\mathfrak{b}$ suficientemente grande podemos hacer que $\Lambda(\mathfrak{b})$ contenga cualquier elemento prefijado de V_K, luego el grado máximo sólo puede alcanzarse si $\Lambda(\mathfrak{b}) + K = V_K$. Así pues:

Teorema 6.37 *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas, existe un divisor $\mathfrak{b}$ en K tal que $V_K = \Lambda(\mathfrak{b}) + K$.*

Más aún, lo que hemos probado es que todo divisor $\mathfrak{a}$ tiene un múltiplo $\mathfrak{b}$ que cumple el teorema anterior, con lo que la fórmula (6.5) nos da que el índice

$$\delta(\mathfrak{a}) = |V_K : \Lambda(\mathfrak{a}) + K|$$

es finito.

Ahora podemos escribir la fórmula del teorema 6.36 como

$$\operatorname{grad}\mathfrak{b} - \operatorname{grad}\mathfrak{a} = \delta(\mathfrak{a}) - \delta(\mathfrak{b}) + \dim\mathfrak{b} - \dim\mathfrak{a},$$

o mejor,

$$\dim\mathfrak{a} - \operatorname{grad}\mathfrak{a} - \delta(\mathfrak{a}) = \dim\mathfrak{b} - \operatorname{grad}\mathfrak{b} - \delta(\mathfrak{b}).$$

En principio, esto se cumple si $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$, pero como todo par de divisores tiene un múltiplo común, de hecho vale para todo $\mathfrak{a}$ y todo $\mathfrak{b}$. En definitiva, hemos encontrado un invariante de K, que conviene representar de la forma siguiente:

Definición 6.38 Llamaremos *género* de un cuerpo de funciones algebraicas K al número natural g que cumple

$$\dim\mathfrak{a} - \operatorname{grad}\mathfrak{a} - \delta(\mathfrak{a}) = 1 - g,$$

para todo divisor $\mathfrak{a}$ de K.

Más adelante veremos que si el cuerpo de constantes es $k_0 = \mathbb{C}$, entonces el género que acabamos de definir coincide con el género topológico de Σ_K. De momento observemos que se trata ciertamente de un número natural, pues si tomamos $\mathfrak{a} = 1$ queda

$$g = \delta(1) = |V_K : \Lambda(1) + K|.$$

La ecuación que define a g es, equivalentemente,

$$\dim\mathfrak{a} = \operatorname{grad}\mathfrak{a} - (g-1) + \delta(\mathfrak{a}),$$

donde $\delta(\mathfrak{a}) \geq 0$. Esta fórmula es casi el teorema de Riemann-Roch. Sólo falta sustituir $\delta(\mathfrak{a})$ por una expresión que no involucre elementos ideales.

Definición 6.39 Si K es un cuerpo de funciones algebraicas, una *diferencial* de V_K es una aplicación lineal $\lambda : V_K \longrightarrow k_0$ que se anula en un conjunto de la forma $\Lambda(\mathfrak{a}) + K$, para cierto divisor $\mathfrak{a}$ de K.

Veremos enseguida que estas diferenciales pueden identificarse con las formas diferenciales de K definidas anteriormente. Para ello necesitamos algunos hechos básicos sobre ellas que ya conocemos para formas diferenciales.

El conjunto de las diferenciales de V_K tiene estructura de k_0-espacio vectorial. El conjunto de aquellas que se anulan en un conjunto $\Lambda(\mathfrak{a}) + K$ fijo es un subespacio vectorial, isomorfo al dual del espacio cociente $V_K/(\Lambda(\mathfrak{a}) + K)$, luego su dimensión es $\delta(\mathfrak{a})$.

Podemos dotar al espacio de las diferenciales de estructura de K-espacio vectorial. Para ello, si λ es una diferencial que se anula en $\Lambda(\mathfrak{a}) + K$ y $x \in K$, definimos $x\lambda$ mediante $(x\lambda)(\alpha) = \lambda(x\alpha)$. Ciertamente $x\lambda$ es k_0-lineal y se anula en $\Lambda((x)\mathfrak{a}) + K$.

Teorema 6.40 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas y λ una diferencial no nula de su espacio de elementos ideales. Entonces la familia de los conjuntos $\Lambda(\mathfrak{a})$ donde se anula λ tiene un máximo respecto a la inclusión.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar observamos que si λ se anula en $\Lambda(\mathfrak{a}_1)$ y en $\Lambda(\mathfrak{a}_2)$, entonces también se anula en

$$\Lambda(\mathfrak{a}_1) + \Lambda(\mathfrak{a}_2) = \Lambda(\mathrm{mcm}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)).$$

Esta igualdad se prueba fácilmente a partir de la relación (en $K_{\mathfrak{P}}$)

$$\mathfrak{P}^m + \mathfrak{P}^n = \mathfrak{P}^{\min\{m,n\}}.$$

En vista de esto basta demostrar que el grado de los divisores $\mathfrak{a}$ tales que λ se anula en $\Lambda(\mathfrak{a})$ está acotado, pues si $\mathfrak{a}$ tiene grado máximo, entonces $\Lambda(\mathfrak{a})$ cumple lo pedido.

Sea, pues, $\mathfrak{a}$ un divisor tal que λ se anula en $\Lambda(\mathfrak{a})$ y sea $\mathfrak{b}$ un divisor arbitrario. Tomemos $x \in m(\mathfrak{b}^{-1})$. Entonces $x\lambda$ se anula en $\Lambda((x)\mathfrak{a})$ y, como $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \mid (x)\mathfrak{a}$, también en $\Lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})$. Si $x_1, \ldots, x_n \in m(\mathfrak{b}^{-1})$ son linealmente independientes sobre k_0, lo mismo les sucede a $x_1\lambda, \ldots, x_n\lambda$ (ya que por hipótesis $\lambda \neq 0$), luego $\delta(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) \geq \dim \mathfrak{b}$.

La definición del género de K nos da que

$$\dim(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) - \operatorname{grad}\mathfrak{a} + \operatorname{grad}\mathfrak{b} + (g-1) = \delta(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) \geq \dim \mathfrak{b}$$

$$= \operatorname{grad}\mathfrak{b} - (g-1) + \delta(\mathfrak{b}),$$

luego

$$\operatorname{grad}\mathfrak{a} \leq \dim(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) + 2g - 2 - \delta(\mathfrak{b}) \leq \dim(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) + 2g - 2.$$

Ahora basta tomar un divisor $\mathfrak{b}$ de grado suficientemente grande como para que $\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) \leq 0$, con lo que $\dim(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) = 0$ y concluimos que $\operatorname{grad}\mathfrak{a} \leq 2g-2$. ∎

En las condiciones de este teorema, es claro que el divisor $\mathfrak{a}$ está completamente determinado por $\Lambda(\mathfrak{a})$ y por lo tanto por λ.

Definición 6.41 Sea K un cuerpo de funciones algebraicas y λ una diferencial no nula de V_K. Llamaremos *divisor asociado* a λ al mayor divisor $\mathfrak{a}$ de K tal que λ se anula en $\Lambda(\mathfrak{a})$. Lo representaremos por (λ).

Teorema 6.42 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas. El espacio de las diferenciales de V_K tiene dimensión 1 sobre K.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que λ y μ son dos diferenciales linealmente independientes sobre K. Entonces, si $x_1, \dots, x_n \in K$ son linealmente independientes sobre el cuerpo de constantes k_0, se cumple que $x_1\lambda, \dots, x_n\lambda, x_1\mu, \dots, x_n\mu$ son linealmente independientes sobre k_0, pues si

$$\sum a_i x_i \lambda + \sum b_i x_i \mu = 0, \qquad \text{con } a_i, b_i \in k_0,$$

la independencia de λ y μ obliga a que $\sum a_i x_i = \sum b_i x_i = 0$, luego $a_i = b_i = 0$ para todo i.

Sea $\mathfrak{a}$ un divisor tal que λ y μ se anulen en $\Lambda(\mathfrak{a})$. Podemos tomar el mismo pues, claramente, $\Lambda(\mathfrak{a}) \cap \Lambda(\mathfrak{b}) = \Lambda(\mathrm{mcd}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$.

Sea $\mathfrak{b}$ un divisor arbitrario. Si $x \in m(\mathfrak{b}^{-1})$ entonces $x\lambda$ se anula en $\Lambda((x)\mathfrak{a})$, que contiene a $\Lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})$. Similarmente, $x\mu$ se anula en $\Lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})$, luego podemos concluir que $\delta(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) \geq 2\dim \mathfrak{b}$. Ahora la definición de género nos da que

$$\dim(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) - \operatorname{grad}\mathfrak{a} + \operatorname{grad}\mathfrak{b} + (g-1) \geq 2\dim\mathfrak{b}$$

$$= 2(\operatorname{grad}\mathfrak{b} - (g-1) + \delta(\mathfrak{b})) \geq 2\operatorname{grad}\mathfrak{b} - 2(g-1).$$

Tomamos $\mathfrak{b}$ de grado suficientemente grande como para que $\dim(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) = 0$, la fórmula anterior nos da que el grado de $\mathfrak{b}$ está acotado superiormente, lo cual es absurdo, pues $\mathfrak{b}$ es arbitrario. ∎

Ahora ya podemos interpretar las diferenciales de V_K en términos de formas diferenciales de K. Para ello observemos que si ω es una forma diferencial de K, para cada elemento ideal $\alpha \in V_K$ podemos definir

$$\int \alpha\omega = \sum_{\mathfrak{P}} \oint_{\mathfrak{P}} \alpha_{\mathfrak{P}}\omega_{\mathfrak{P}}.$$

Este operador integral es claramente k_0-lineal. Por el teorema de los residuos se anula en K y claramente también se anula en $\Lambda(\omega)$. Por consiguiente este operador integral es una diferencial de V_K en el sentido de 6.39. La aplicación que a cada forma ω le asigna su operador integral en V_K es K-lineal y no nula. Como el espacio de formas diferenciales de K y el de diferenciales de V_K tienen ambos dimensión 1, de hecho tenemos un isomorfismo entre ellos.

Más aún, se cumple que (ω) es el mayor divisor $\mathfrak{a}$ tal que la diferencial asociada a ω se anula en $\Lambda(\mathfrak{a})$, pues si $(\omega) \mid \mathfrak{a}$ y $v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}) > v_{\mathfrak{P}}(\omega)$ para un primo $\mathfrak{P}$, podemos tomar $\alpha \in \Lambda(\mathfrak{a})$ de modo que $v_{\mathfrak{P}}(\alpha) = -v_{\mathfrak{P}}(\omega) - 1$ y $v_{\mathfrak{Q}}(\alpha) = -v_{\mathfrak{Q}}(\omega)$ para $\mathfrak{Q} \neq \mathfrak{P}$ y entonces

$$\int \alpha\omega = \oint_{\mathfrak{P}} \alpha_{\mathfrak{P}}\omega_{\mathfrak{P}} = \mathrm{Tr}_{k_0}^{k_0\mathfrak{P}}(\mathrm{Res}_{\mathfrak{P}}(\alpha_{\mathfrak{P}}\omega_{\mathfrak{P}})).$$

Como $v_{\mathfrak{P}}(\alpha_{\mathfrak{P}}\omega_{\mathfrak{P}}) = -1$, se cumple que $\mathrm{Res}_{\mathfrak{P}}(\alpha_{\mathfrak{P}}\omega_{\mathfrak{P}}) \neq 0$ y multiplicando $\alpha_{\mathfrak{P}}$ por un elemento adecuado de $k_{0\mathfrak{P}}$ podemos exigir que la traza sea también no nula (porque la traza de una extensión separable no puede ser nula).

Esto prueba que el divisor asociado a una forma diferencial es el mismo que el asociado a su operador integral. Por consiguiente, los divisores asociados a las diferenciales de V_K son precisamente los divisores de la clase canónica de K.

Finalmente podemos probar:

Teorema 6.43 (Riemann-Roch) *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas y A es una clase de divisores de K, entonces*

$$\dim A = \operatorname{grad} A - (g-1) + \dim(W/A),$$

donde W es la clase canónica y g es el género de K.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathfrak{c}$ un divisor de la clase canónica. Sólo hemos de probar que, para todo divisor $\mathfrak{a}$ de K, se cumple $\delta(\mathfrak{a}) = \dim(\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1})$. Sea λ una diferencial tal que $(\lambda) = \mathfrak{c}$.

Si $\mathfrak{b}$ es un divisor arbitrario y $x \in m(\mathfrak{b}^{-1})$, entonces $(x\lambda) = (\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-1})$, es decir, $x\lambda$ se anula en $\Lambda(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-1})$. Recíprocamente, si $x\lambda$ es una diferencial que se anula en $\Lambda(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-1})$ entonces $\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-1} \mid (x\lambda) = (x)\mathfrak{c}$, luego $x \in m(\mathfrak{b}^{-1})$.

Hemos probado que $\delta(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-1}) = \dim \mathfrak{b}$. Esto vale para todo divisor $\mathfrak{b}$. Tomando $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}$ resulta $\delta(\mathfrak{a}) = \dim(\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1})$. ∎

Es imposible explicar aquí la trascendencia de este teorema. Ésta empezará a ponerse de manifiesto en el capítulo siguiente, dedicado por completo a mostrar sus consecuencias más destacadas. Ahora veremos únicamente las más inmediatas, que nos terminan de perfilar el concepto de género.

El género y la clase canónica En primer lugar veamos que el teorema de Riemann-Roch nos permite caracterizar el género de un cuerpo de funciones en términos más naturales y operativos que la definición que hemos dado. Así, el teorema siguiente muestra que el género puede definirse como la dimensión de la clase canónica, o también en función de su grado. Recíprocamente, la clase canónica puede caracterizarse en términos del género:

Teorema 6.44 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas de género g. Entonces la clase canónica de K es la única clase W que cumple*

$$\dim W = g, \qquad \operatorname{grad} W = 2g - 2.$$

DEMOSTRACIÓN: La primera igualdad se obtiene haciendo $A = 1$ en el teorema de Riemann-Roch. La segunda con $A = W$. Si otra clase W' cumple esto mismo, entonces el teorema de Riemann-Roch nos da que $\dim(W/W') = 1$ y, por otra parte, $\operatorname{grad}(W/W') = 0$, luego 6.31 implica que $W/W' = 1$, y así $W' = W$. ∎

También podemos caracterizar el género en términos de la dimensión y el grado de divisores sin involucrar la clase canónica. Para ello observamos que si $\operatorname{grad} A > 2g - 2$, entonces $\operatorname{grad}(W/A) < 0$, luego $\dim(W/A) = 0$ y así, el teorema de Riemann-Roch se reduce a

$$\dim A = \operatorname{grad} A - (g-1), \qquad (\text{si } \operatorname{grad} A > 2g-2).$$

Esto se conoce como la *parte de Riemann* del teorema de Riemann-Roch, y permite definir el género de un cuerpo de funciones algebraicas como el valor

$$g = \operatorname{grad} A - \dim A + 1,$$

para cualquier clase A de grado suficientemente grande.

Por ejemplo, de aquí se sigue que el género se conserva en las extensiones de constantes (calculado respecto al cuerpo exacto de constantes de cada cuerpo). Basta tener el cuenta que las extensiones de constantes conservan la dimensión y el grado de los divisores. Más en general, ahora vemos la forma en que el género depende del cuerpo de constantes:

Teorema 6.45 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0 y sea $k_1 \subset K$ una extensión finita de k_0. Sean g_0 y g_1 el género de K respecto a k_0 y k_1 respectivamente, entonces*

$$2g_0 - 2 = |k_1 : k_0|(2g_1 - 2).$$

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que $2g - 2 = 2\operatorname{grad} A - 2\dim A$ para toda clase de grado suficientemente grande. ∎

Otra consecuencia sencilla es que los cuerpos de fracciones algebraicas tienen género 0. En efecto, según el teorema 6.22, la clase canónica es $W = [\infty^{-2}]$, luego $\dim W = -2$, y el teorema 6.44 implica entonces que el género es $g = 0$.

Relación entre el grado y la dimensión La importancia del teorema de Riemann-Roch reside esencialmente en que permite expresar explícitamente la dimensión de una clase de divisores en función de su grado, salvo para las clases con grado $0 < n < 2g - 2$. Basta tener presente que $\dim A = 0$ si $\operatorname{grad} A < 0$ (y por lo tanto $\dim(W/A) = 0$ si $\operatorname{grad} A > 2g - 2$), así como el teorema 6.31 para las clases de grado 0. El teorema siguiente es una comprobación rutinaria:

Teorema 6.46 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas de género g. Sea W su clase canónica y sea A_n una clase de divisores de K de grado n. Entonces*

- *Si $g = 0$,*
$$\dim A_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ n+1 & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$
- *Si $g = 1$,*
$$\dim A_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ n & \text{si } n > 0, \end{cases} \qquad \dim A_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } A_0 = 1, \\ 0 & \text{si } A_0 \neq 1. \end{cases}$$
- *Si $g \geq 2$,*
$$\dim A_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ n-(g-1) & \text{si } n > 2g-2, \end{cases}$$
$$\dim A_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } A_0 = 1, \\ 0 & \text{si } A_0 \neq 1, \end{cases} \qquad \dim A_{2g-2} = \begin{cases} g & \text{si } A_{2g-2} = W, \\ g-1 & \text{si } A_{2g-2} \neq W. \end{cases}$$

La fórmula del género de Hurwitz Para terminar probaremos que el género de un cuerpo de funciones algebraicas sobre $\mathbb{C}$ coincide con el que ya teníamos definido. Para ello probaremos una fórmula general que se particulariza a la que ya conocíamos para calcular el género en el caso complejo.

Teorema 6.47 (Fórmula de Hurwitz) *Sea K/k una extensión separable de cuerpos de funciones algebraicas. Sean g_K y g_k los géneros respectivos y sea $\mathfrak{D}_{K/k}$ el diferente de la extensión. Entonces*

$$2g_K - 2 = |K:k|(2g_k - 2) + \operatorname{grad}_K \mathfrak{D}_{K/k}.$$

Demostración: Sea $\mathfrak{c}$ un divisor de la clase canónica de k. De 6.22 se sigue que $\mathfrak{D}_{K/k}\mathfrak{c}$ está en la clase canónica de K. Así,

$$\begin{aligned} 2g_K - 2 &= \operatorname{grad}_K(\mathfrak{D}_{K/k}\mathfrak{c}) = \operatorname{grad}_K \mathfrak{D}_{K/k} + \operatorname{grad}_K \mathfrak{c} \\ &= \operatorname{grad}_K \mathfrak{D}_{K/k} + |K:k|(2g_k - 2). \end{aligned}$$

■

Teniendo en cuenta el teorema 5.47 (y la forma en que [TAl 9.29] se usa en la prueba) podemos dar una versión más explícita de la fórmula de Hurwitz:

Teorema 6.48 (Fórmula de Hurwitz) *Sea K/k una extensión separable de cuerpos de funciones algebraicas y sean g_K, g_k sus géneros respectivos. Entonces*

$$2g_K - 2 \geq |K:k|(2g_k - 2) + \sum_{\mathfrak{P}} (e_{\mathfrak{P}} - 1) \operatorname{grad}_K \mathfrak{P},$$

y la igualdad se da exactamente si $\operatorname{car} k = 0$ *o bien* $\operatorname{car} k = p$ *es un primo que no divide a ningún índice de ramificación $e_{\mathfrak{P}}$.*

En particular, si k_0 es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 y $k = k_0(x)$, la fórmula de Hurwitz se reduce a

$$2 - 2g = 2|K:k| - \sum_{\mathfrak{P}} (e_{\mathfrak{P}} - 1),$$

Comparando con 5.58 podemos concluir lo que ya habíamos anunciado:

Teorema 6.49 *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas sobre $\mathbb{C}$, entonces el género definido en* 6.38 *coincide con el género topológico de la superficie de Riemann Σ_K.*

En particular, si definimos el género de una curva cuasiproyectiva como el de su cuerpo de funciones racionales, tenemos que esta definición extiende a la que ya teníamos para el caso complejo.

Ejercicio: Sea $\phi : S \longrightarrow T$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann (compactas). Demostrar que el género de T es menor o igual que el de S. Si S y T tienen el mismo género $g \geq 2$, entonces ϕ es biyectiva. Si ambas tienen género $g = 1$, entonces ϕ es localmente inyectiva (no tiene puntos de ramificación).

Capítulo VII

Consecuencias del teorema de Riemann-Roch

En el capítulo anterior hemos demostrado el teorema de Riemann-Roch, que a primera vista es una fórmula técnica no muy sugerente. No obstante, ya hemos podido vislumbrar su importancia en cuanto que nos ha permitido dar una definición puramente algebraica del género de un cuerpo de funciones, con lo cual hemos caracterizado y generalizado la noción topológica de género que conocíamos para curvas algebraicas complejas. Aunque esta noción algebraica de género va a ser fundamental en el estudio de los cuerpos de funciones algebraicas, lo cierto es que con ello no hemos visto más que una mínima parte de las posibilidades que ofrece el teorema de Riemann-Roch.

7.1 Consecuencias inmediatas

Recogemos en esta primera sección algunas aplicaciones variadas del teorema de Riemann-Roch.

El grado mínimo En el capítulo anterior hemos visto que los cuerpos de fracciones algebraicas tienen género 0. El recíproco es cierto casi siempre, pero no siempre. Para entender la situación definimos el *grado mínimo* f_0 de un cuerpo de funciones algebraicas K como el menor grado positivo de un divisor de K.

Puesto que el grado es un homomorfismo de grupos, el grado de todo divisor es múltiplo de f_0 y todo múltiplo de f_0 es el grado de un divisor. Si g es el género de K, la clase canónica tiene grado $2g-2$, luego $f_0 \mid 2g-2$. Esto limita las posibilidades para el grado mínimo de un cuerpo de género g excepto si $g = 1$. Puede probarse que existen cuerpos de género $g = 1$ con grado mínimo arbitrariamente grande.

Si K es un cuerpo de fracciones algebraicas o el cuerpo de constantes es algebraicamente cerrado, se cumple trivialmente que $f_0 = 1$. El teorema 7.29 (más abajo) prueba que también es éste el caso si el cuerpo de constantes es finito.

El teorema siguiente muestra que el género y el grado mínimo determinan lo "lejos" que está un cuerpo de funciones algebraicas de ser un cuerpo de fracciones:

Teorema 7.1 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes exacto k_0, sea g su género y f_0 su grado mínimo. Entonces existe un $x \in K$ separador tal que $|K : k_0(x)| \leq g + f_0$.*

Demostración: Del teorema de Riemann-Roch se sigue que toda clase A con $\operatorname{grad} A \geq g+1$ cumple $\dim A \geq 2$. Podemos tomar, pues, una clase A de grado mínimo rf_0 tal que $\dim A \geq 2$. Ciertamente $r > 0$ y por la minimalidad, una clase B con $\operatorname{grad} B = (r-1)f_0$ cumple $\dim B < 2$, luego $(r-1)f_0 < g+1$, luego $(r-1)f_0 \leq g$ y así $rf_0 \leq g + f_0$.

Sea $\mathfrak{b}$ un divisor entero contenido en la clase A (véanse las observaciones previas al teorema 6.31). Tomamos $x \in m(\mathfrak{b}^{-1})$ no constante. Entonces $(x) = \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$, donde $\mathfrak{a}$ es un divisor entero en A. Además $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$. Simplificando divisores comunes llegamos a $(x) = \mathfrak{a}'/\mathfrak{b}'$, donde $\operatorname{grad}\mathfrak{a}' = \operatorname{grad}\mathfrak{b}' \leq rf_0 \leq g + f_0$.

Respecto al cuerpo $k = k_0(x)$, el divisor $\mathfrak{b}'$ es ∞, luego es un divisor de k de grado 1. Por consiguiente

$$|K : k_0(x)| = \operatorname{grad}_K \mathfrak{b}' \leq g + f_0.$$

Falta probar que x es separador. Si no lo fuera, según el teorema 6.18 podríamos expresarlo como $x = t^p$, donde p es la característica de K. Entonces $(t) = \mathfrak{a}''/\mathfrak{b}''$, donde $\operatorname{grad}\mathfrak{b}'' < \operatorname{grad}\mathfrak{b} \leq rf_0$, pero entonces $t \in m(\mathfrak{b}''^{-1})$, y también $1 \in m(\mathfrak{b}''^{-1})$, pues $(1) = \mathfrak{b}''/\mathfrak{b}''$, luego $\dim \mathfrak{b}'' \geq 2$, en contradicción con la minimalidad de r. ∎

En particular tenemos la siguiente caracterización de los cuerpos de fracciones algebraicas:

Teorema 7.2 *Un cuerpo de funciones algebraicas K sobre un cuerpo de constantes exacto k_0 es un cuerpo de fracciones algebraicas si y sólo si tiene género 0 y tiene un divisor de grado 1 (es decir, si $f_0 = 1$).*

En particular, sobre un cuerpo de constantes algebraicamente cerrado o finito los cuerpos de fracciones algebraicas son exactamente los de género 0.

Una cota para el género Vamos a estimar el género de un cuerpo de funciones algebraicas en términos del grado de una ecuación entre sus generadores.

Teorema 7.3 *Sea $K = k_0(x, y)$ un cuerpo de funciones algebraicas tal que sus generadores satisfagan una ecuación polinómica irreducible $F(x, y) = 0$ de grado n. Entonces el género g de K satisface la desigualdad*

$$g \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

En particular, el género de una curva plana de grado n satisface esta relación.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que k_0 es algebraicamente cerrado, pues las extensiones de constantes conservan el género. Es fácil ver que el polinomio F sigue siendo irreducible tras la extensión, aunque no necesitamos este hecho, pues si F fuera reducible, pasaríamos a un factor de menor grado.

También podemos suponer que el coeficiente de y^n en $F(x,y)$ es 1. En caso contrario, sea F_n la forma de grado n de F. El cambio $x = x' + ay'$, $y = y'$ nos da un nuevo polinomio $F(x' + ay', y')$ en el que el coeficiente de y'^n es $F_n(a,1)$. El polinomio $F_n(x,1)$ no puede ser idénticamente nulo, luego existe $a \in k_0$ tal que $F_n(a,1) \neq 0$ y así los nuevos generadores x', y' cumplen que el coeficiente de y'^n es no nulo. Dividiendo la ecuación entre este coeficiente lo convertimos en 1.

Sea ∞ el primo infinito de $k = k_0(x)$. Dividiendo $F(x,y) = 0$ entre x^n obtenemos un polinomio mónico con coeficientes en $\mathfrak{o}_\infty$ con raíz y/x. Así pues, y/x es entero sobre $\mathfrak{o}_\infty$, luego el teorema [TAl 5.24] (junto con [TAl B.6]) implica que $v_\mathfrak{P}(y/x) \geq 0$, para todo primo $\mathfrak{P}$ de K que divida a ∞ (pues $\mathfrak{O}_\mathfrak{P}$ es la clausura entera de $\mathfrak{o}_\infty$). Equivalentemente, $v_\mathfrak{P}(y) \geq v_\mathfrak{P}(x)$.

Similarmente, $F(x,t)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ para todo primo finito $\mathfrak{p}$ de k y tiene a y por raíz, luego $v_\mathfrak{P}(y) \geq 0$ para todo primo $\mathfrak{P}$ de K que divida a un primo finito de k.

Ahora es claro que $m(\infty^{-s})$ contiene todas las funciones de la forma

$$f_s(x), \quad yf_{s-1}(x), \quad \ldots, \quad y^{n-1}f_{s-n+1}(x),$$

donde $f_i(x)$ es cualquier polinomio en x de grado i. Por consiguiente,

$$\dim \infty^s \geq (s+1) + s + \cdots + (s-n+2) = ns + 1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Por otro lado, $\operatorname{grad} \infty^s = ns$ y, para s suficientemente grande,

$$g = \operatorname{grad} \infty^s - \dim \infty^s + 1 \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

■

En particular vemos que las rectas y las cónicas tienen género 0, mientras que las cúbicas tienen género ≤ 1. El teorema del apartado siguiente muestra que las cúbicas regulares tienen, de hecho, género 1.

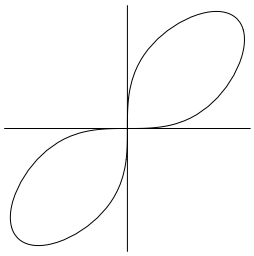
Curvas algebraicas El teorema 6.24 nos proporciona un refinamiento del teorema anterior que nos proporciona el valor exacto del género de muchas curvas planas:

Teorema 7.4 *Sea V una curva proyectiva plana de grado n cuyas singularidades sean todas ordinarias. Entonces su género es*

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_P \frac{m_P(V)(m_P(V)-1)}{2},$$

donde P recorre los puntos (singulares) de V.

Ejemplo *La curva $X^4 + Y^4 = XY$ tiene género 2, luego no es birracionalmente equivalente a ninguna curva plana regular.*



En efecto, es fácil ver que su única singularidad es el punto $P = (0, 0)$, que es un punto doble ordinario con tangentes $X = 0$ e $Y = 0$. Podemos aplicar el teorema anterior y concluir que el género es

$$g = \frac{(4-1)(4-2)}{2} - \frac{2(2-1)}{2} = 2.$$

El teorema implica también que el género de una curva plana regular ha de ser $g = 0, 1, 3, 6, \ldots$ luego la regularización de esta curva no puede sumergirse en P^2. ∎

Por otra parte, el ejemplo de la página 220 se generaliza trivialmente a cuerpos de constantes arbitrarios, por lo que existen curvas (planas) de todos los géneros:

Teorema 7.5 *Si $g \geq 0$, las curvas $Y^2 = F(X)$, donde $F(X) \in k_0[X]$ es un polinomio de grado $2g + 1$ o $2g + 2$ sin raíces múltiples, tienen género g.*

Observemos de paso que la fórmula del teorema 7.4 no es aplicable a curvas con singularidades no ordinarias. Por ejemplo, la curva

$$Y^2 = (X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$$

tiene una única singularidad en el infinito (no ordinaria) de orden 2. El teorema anterior implica que tiene género $g = 1$, mientras que la fórmula del teorema 7.4 daría $g = 2$.

Cuerpos elípticos e hiperelípticos Las curvas del teorema anterior constituyen una familia un poco más general de lo que podría parecer: sus cuerpos de funciones se caracterizan por ser extensiones cuadráticas de un cuerpo de fracciones algebraicas. Antes de probarlo conviene introducir algunos conceptos:

Definición 7.6 Un cuerpo K de funciones algebraicas es *elíptico* (resp. *hiperelíptico*) si tiene género $g = 1$ (resp. $g \geq 2$) y es una extensión cuadrática de un cuerpo de fracciones algebraicas. Una curva proyectiva regular es *elíptica* o *hiperelíptica* si lo es su cuerpo de funciones racionales.

Equivalentemente, un cuerpo K de género $g > 0$ es elíptico o hiperelíptico si y sólo si tiene una función x cuyos polos formen un divisor de grado 2. En efecto, si existe tal x, consideramos $k = k_0(x)$ y llamamos ∞ al primo infinito de k. Entonces ∞ es el único polo de x en k, luego sus polos en K son los divisores de ∞. La hipótesis es, pues, que ∞ tiene grado 2 en K, luego ha de ser $|K : k| = 2$. Esto implica que K es elíptico o hiperelíptico, según su género. Recíprocamente, si $|K : k| = 2$, donde $k = k_0(x)$, entonces la función x tiene por polos en K a los divisores de ∞, el cual tiene grado 2 en K.

Observemos que este mismo razonamiento prueba que un cuerpo que contenga una función con un único polo de grado 1 ha de ser un cuerpo de fracciones algebraicas.

Teorema 7.7 *Todo cuerpo de género $g = 1$ y grado mínimo $f_0 = 1$ es elíptico. Todo cuerpo de género $g = 2$ es hiperelíptico.*

DEMOSTRACIÓN: Si K es un cuerpo de género 1 y tiene un divisor $\mathfrak{a}$ de grado 1, entonces el teorema de Riemann-Roch implica que $\dim \mathfrak{a} = 1$, luego $\mathfrak{a}$ es equivalente a un divisor entero $\mathfrak{P}$ también de grado 1, luego $\mathfrak{P}$ es primo.

Por otra parte $\dim \mathfrak{P}^2 = 2$, luego existe una función $x \in m(\mathfrak{P}^{-2})$ no constante. Esto significa que x tiene a lo sumo un polo doble en $\mathfrak{P}$, pero no puede tener un polo simple porque entonces K tendría género 0, luego, en efecto, K es elíptico.

Supongamos ahora que K tiene género $g = 2$. Podemos tomar un divisor entero $\mathfrak{a}$ en la clase canónica W. Entonces $\operatorname{grad} \mathfrak{a} = 2g - 2 = 2$ y $\dim \mathfrak{a} = g = 2$. Tomamos una función $x \in m(\mathfrak{a}^{-1})$ no constante y llamamos $k = k_0(x)$. Es claro que $\mathfrak{a}$ es el primo infinito de k, luego $|K : k| = 2$ y así K es hiperelíptico. ∎

Más adelante veremos que hay cuerpos de género 3 que no son hiperelípticos.

Supongamos ahora que el cuerpo k_0 es algebraicamente cerrado y sea K un cuerpo elíptico o hiperelíptico. Entonces $K = k_0(x, u)$, donde u satisface una ecuación

$$u^2 + R(x)u + S(x) = 0, \qquad R(x),\ S(x) \in k_0(x).$$

Cambiando u por $u' = u + R(x)/2$ tenemos igualmente $K = k_0(x, u')$ pero ahora u' satisface una ecuación

$$u'^2 = T(x), \qquad T(x) \in k_0(x).$$

Digamos que

$$T(x) = \frac{a_0(x - a_1)\cdots(x - a_m)}{(x - b_1)\cdots(x - b_n)}, \qquad a_i,\ b_i \in k_0.$$

Cambiando u' por $u'' = u'(x - b_1)\cdots(x - b_m)$ tenemos igualmente que $K = k_0(x, u'')$ y ahora

$$u''^2 = a_0(x - a_1)\cdots(x - a_m)(x - b_1)\cdots(x - b_n).$$

Dividiendo u'' entre una raíz cuadrada de a_0 podemos suponer $a_0 = 1$. Si dos raíces del polinomio de la derecha son iguales, digamos $a_1 = a_2$, sustituimos u'' por $u''/(x - a_1)$, con lo que se sigue cumpliendo $K = k_0(x, u'')$ y la raíz doble desaparece de la ecuación. Repitiendo este proceso llegamos a que $K = k_0(x, y)$, donde y satisface una ecuación $y^2 = F(x)$ y $F(X) \in k_0[X]$ es un polinomio mónico sin raíces múltiples.

Más aún, podemos exigir que F tenga grado impar, pues si

$$y^2 = (x - a_1)\cdots(x - a_k),$$

con $k = 2m + 2$, cambiamos x por $x' = 1/(x - a_k)$ e y por

$$y' = \frac{x'^{m+1} y}{\sqrt{\prod_{i=1}^{k-1} (a_i - a_k)}},$$

de modo que se sigue cumpliendo $K = k_0(x', y')$ y además

$$y'^2 = (x' - b_1) \cdots (x' - b_{k-1}),$$

donde los $b_i \in k_0$ son distintos dos a dos. Con esto hemos probado:

Teorema 7.8 *Si K es un cuerpo elíptico o hiperelíptico de género g sobre un cuerpo de constantes k_0 algebraicamente cerrado, entonces $K = k_0(x, y)$, donde x, y satisfacen una ecuación de la forma $y^2 = F(x)$, para un cierto polinomio $F[X] \in k_0[X]$ mónico con raíces distintas dos a dos. Más aún, podemos exigir que F tenga grado impar.*

El teorema 7.5 nos da que si F tiene grado $2g + 1$ o $2g + 2$, entonces un cuerpo K en las condiciones del teorema anterior tiene género g, luego si $g > 0$ es elíptico o hiperelíptico. Vemos así que hay cuerpos hiperelípticos de todos los géneros $g \geq 2$.

7.2 Cuerpos de funciones elípticas

En la sección anterior hemos definido los cuerpos elípticos como los cuerpos de género 1 que son extensiones cuadráticas de cuerpos de fracciones algebraicas. El teorema 7.7 afirma que todo cuerpo de género 1 y grado mínimo 1 es elíptico. La condición sobre el grado mínimo se puede conseguir siempre mediante una extensión finita de constantes, pero es habitual incluirla en la definición:

Definición 7.9 Un *cuerpo de funciones elípticas* es un cuerpo de funciones algebraicas de género $g = 1$ y grado mínimo $f_0 = 1$. Una curva proyectiva regular V definida sobre un cuerpo (perfecto) k_0 es *elíptica* (sobre k_0) si tiene género $g = 1$ y $V(k_0) \neq \varnothing$, es decir, si tiene al menos un punto racional.

Enseguida veremos que una curva proyectiva regular V definida sobre k_0 es elíptica (sobre k_0) si y sólo si su cuerpo de funciones racionales $k_0(V)$ es un cuerpo de funciones elípticas.

Lo primero que obtenemos del teorema de Riemann-Roch para los cuerpos de funciones elípticas es que la clase canónica cumple $\operatorname{grad} W = 0$, $\dim W = 1$, luego 6.31 nos da:

> *En un cuerpo de funciones elípticas la clase canónica es la clase principal.*

Por otra parte, el teorema de Riemann-Roch implica también que, para divisores de grado positivo, la dimensión es igual al grado. En particular, en la clase de un divisor de grado 1 podemos tomar un representante entero, que por consiguiente será primo. En definitiva:

Todo cuerpo de funciones elípticas tiene un primo de grado 1.

Por lo tanto, si V es una curva proyectiva regular definida sobre un cuerpo (perfecto) k_0 y el cuerpo $k_0(V)$ es un cuerpo de funciones elípticas, esto significa que $k_0(V)$ tiene género 1 (luego también la extensión de constantes $\bar{k}_0(V)$, luego también V, por definición) y, como $k_0(V)$ tiene un primo $\mathfrak{P}$ de grado 1, éste sigue teniendo grado 1 en $\bar{k}_0(V)$, luego se corresponde con un punto $P \in V$ que, por 5.51, constituye una clase de conjugación respecto de $G(\bar{k}_0/k_0)$, luego $P \in V(k_0)$. Esto prueba que V es una curva elíptica sobre k_0, y el recíproco es inmediato.

Otra consecuencia notable del teorema de Riemann-Roch es que los cuerpos de funciones elípticas son definibles mediante ecuaciones cúbicas en forma normal de Weierstrass. En primer lugar, el teorema siguiente nos da que son definibles por cúbicas:

Teorema 7.10 *Sea K un cuerpo de funciones elípticas. Entonces $K = k_0(x, y)$ donde x, y satisfacen una ecuación (no nula) con coeficientes en k_0 de la forma*

$$y^2 + (ax + b)y + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0.$$

Demostración: Sea $\mathfrak{p}$ un divisor primo de grado 1 (cuya existencia acabamos de justificar). Entonces $\dim \mathfrak{p}^2 = \operatorname{grad} \mathfrak{p}^2 = 2$, luego $m(\mathfrak{p}^{-2})$ contiene dos funciones linealmente independientes 1, x. Tenemos que $(x) = \mathfrak{a}/\mathfrak{p}^2$, donde $\mathfrak{a}$ es un divisor entero. Así $\mathfrak{p}^2$ es el primo infinito de $k = k_0(x)$, luego $|K : k| = \operatorname{grad} \mathfrak{p}^2 = 2$. (Notemos que x no puede tener un polo simple en $\mathfrak{p}$, pues entonces 1, $x \in m(\mathfrak{p}^{-1})$, cuando $\dim \mathfrak{p} = 1$.)

Como $\dim \mathfrak{p}^3 = \operatorname{grad} \mathfrak{p}^3 = 3$, tenemos que $m(\mathfrak{p}^{-3})$ contiene tres funciones linealmente independientes 1, x, y. No puede ser que $y \in k_0(x)$, pues entonces 1, x, $y \in m_k(\mathfrak{p}^{-2})$, mientras que $\dim_k(\mathfrak{p}^2) = \operatorname{grad}_k(\mathfrak{p}^2) + 1 = 2$ (ya que k tiene género 0). Así pues, $K = k_0(x, y)$.

Ahora observamos que 1, x, x^2, x^3, xy, y, $y^2 \in m(\mathfrak{p}^{-6})$, pero $\dim \mathfrak{p}^6 = 6$, luego estas siete funciones son linealmente dependientes sobre k_0, lo que nos da una ecuación como indica el enunciado. (El coeficiente de y^2 ha de ser no nulo, o cada sumando tendría un polo de orden distinto en $\mathfrak{p}$, lo cual es imposible.) ∎

Para pasar a una ecuación de Weierstrass hemos de suponer que la característica del cuerpo de constantes k_0 es distinta de 2 y 3 (comparar con la prueba del teorema 6.15). Cambiando y por $y - (ax + b)/2$ obtenemos una ecuación de la forma

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Ha de ser $a \neq 0$ o, de lo contrario, K tendría género 0 por el teorema 7.3. Ahora sustituimos

$$x \mapsto ax - \frac{b}{3a}, \qquad y \mapsto \frac{a^2}{2}\, y$$

y la ecuación se reduce a

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \qquad g_2,\ g_3 \in k_0. \tag{7.1}$$

El polinomio $4x^3 - g_2x - g_3$ no puede tener raíces múltiples (en una clausura algebraica de k_0), pues si a fuera una raíz múltiple, el cuerpo $K(a)$ sería también un cuerpo elíptico (pues las extensiones de constantes no alteran el género) y su grado mínimo seguiría siendo 1. Además estaría generado por elementos x e y que cumplirían la misma ecuación, pero ahora podríamos cambiar x por $x - a$, con lo que la ecuación pasaría a ser $y^2 = 4x^3 + cx^2$ (pues el miembro izquierdo ha de tener a 0 como raíz doble). Ahora bien, esto implica que $4x = (y/x)^2 - c$, de donde $K(a) = k_0(y/x)$ sería un cuerpo de fracciones algebraicas, luego tendría género 0, contradicción.

Una forma conveniente de expresar que un polinomio no tiene raíces múltiples es a través de su discriminante. Para un polinomio de grado 3

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$

el *discriminante* se define como

$$\Delta = \big(a(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\big)^2.$$

La definición para un polinomio de grado arbitrario [Al 9.9] es la generalización obvia de ésta. La teoría de Galois muestra fácilmente que Δ pertenece al mismo cuerpo que los coeficientes del polinomio, y es claro que un polinomio tiene raíces simples si y sólo si su discriminante es no nulo. Un cálculo laborioso muestra que, para un polinomio de grado 3,

$$\Delta = -\frac{4db^3}{a^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + 18\frac{bcd}{a} - \frac{4c^3}{a} - 27d^2.$$

En particular, el discriminante del miembro derecho de (7.1) resulta ser $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. El teorema siguiente recoge lo que hemos probado:

Teorema 7.11 *Sea K un cuerpo de funciones elípticas sobre un cuerpo de constantes k_0 de característica distinta de 2 y 3. Entonces $K = k_0(x, y)$, donde x, y satisfacen una ecuación de la forma*

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \qquad g_2,\ g_3 \in k_0, \qquad g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

Recordemos que las ecuaciones de este tipo son las que hemos llamado ecuaciones en forma normal de Weierstrass. En particular, del teorema anterior se desprende que toda curva elíptica sobre un cuerpo perfecto k_0 es birracionalmente equivalente —y, por lo tanto, isomorfa— a una cúbica (plana) regular definida sobre k_0. Recíprocamente, el teorema 7.4 implica que toda cúbica regular (sobre un cuerpo de constantes suficientemente grande como para que haya un punto racional) es una curva elíptica.

En las condiciones del teorema anterior, si tomamos $x' = t^2x$, $y' = t^3y$, con $t \in k_0^*$, obtenemos dos nuevos generadores que satisfacen una ecuación de Weierstrass con coeficientes $g_2' = t^4g_2$ y $g_3' = t^6g_3$. Recíprocamente, vamos a probar que si $K = k_0(x, y) = k_0(x', y')$ y ambos pares de generadores satisfacen sendas ecuaciones de Weierstrass, entonces los coeficientes de éstas están relacionados en la forma $g_2' = t^4g_2$ y $g_3' = t^6g_3$, para cierto $t \in k_0^*$. Para ello necesitamos el teorema siguiente:

Teorema 7.12 *Si K es un cuerpo de funciones elípticas y $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ son dos divisores primos de grado 1, entonces existe un k_0-automorfismo σ de K que cumple $\sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}'$.*

DEMOSTRACIÓN: La clase $[\mathfrak{p}\mathfrak{p}']$ tiene grado 2, luego también tiene dimensión 2, luego contiene un divisor entero $\mathfrak{a}$ distinto de $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$. Así, $\mathfrak{a}/\mathfrak{p}\mathfrak{p}' = (x)$, donde $x \in K$ no es constante. Es claro entonces que $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ es el primo infinito del cuerpo $k = k_0(x)$.

Comparando el grado de $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ en k y en K concluimos que $|K : k| = 2$. Si la característica de k_0 no es 2, es claro que la extensión ha de ser separable y, por tener grado 2, también normal. Esto también es cierto si la característica es 2. Si la extensión fuera inseparable sería $K = k_0(x, \sqrt{\alpha}\,)$, donde $\alpha \in k_0(x)$. Usando que k_0 es perfecto, concluimos que $\sqrt{\alpha} \in k_0(\sqrt{x})$, luego $k_0(x) \subset K \subset k_0(\sqrt{x}\,)$. Teniendo en cuenta los grados, resulta que $K = k_0(\sqrt{x}\,)$ y llegamos a que K tiene género 0, contradicción.

Así pues, en cualquier caso K/k es una extensión de Galois de grado 2 y $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ son los divisores en K del primo infinito de k. Ahora basta aplicar 5.27. ∎

Teorema 7.13 *Sea K un cuerpo de funciones elípticas sobre un cuerpo de constantes k_0 de característica distinta de 2 y 3. Si $K = k_0(x, y) = k_0(x', y')$ y los generadores satisfacen ecuaciones*

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \qquad y'^2 = 4x'^3 - g_2'x' - g_3',$$

entonces existe un $t \in k_0^*$ tal que $g_2' = t^4g_2$ y $g_3' = t^6g_3$.

DEMOSTRACIÓN: Si ∞ es el primo infinito de $k = k_0(x)$ y $\mathfrak{p}$ es un divisor primo de ∞ en K, entonces

$$2v_{\mathfrak{p}}(y) = v_{\mathfrak{p}}(y^2) = e(\mathfrak{p}/\infty)v_\infty(4x^3 - g_2x - g_3) = -3e(\mathfrak{p}/\infty).$$

Por consiguiente, $2 \mid e(\mathfrak{p}/\infty)$ y, como $|K : k| = 2$, ha de ser $e(\mathfrak{p}/\infty) = 2$. Así pues, $\infty = \mathfrak{p}^2$. Es claro también que $\mathfrak{p}$ tiene grado 1. Por otra parte, $1, x, x^3 \in m(\mathfrak{p}^{-6})$, luego la ecuación de Weierstrass implica que $y^2 \in m(\mathfrak{p}^{-6})$ y así $y \in m(\mathfrak{p}^{-3})$.

Todo esto lo hemos deducido del mero hecho de que x e y satisfacen una ecuación en forma normal. Por lo tanto, lo mismo es válido para x', y' con otro divisor primo $\mathfrak{p}'$ de grado 1.

Por el teorema anterior existe un k_0-automorfismo de K que transforma $\mathfrak{p}'$ en $\mathfrak{p}$. Al aplicarlo sobre los generadores x', y' obtenemos dos nuevos generadores que satisfacen la misma ecuación, pero ahora $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$.

Así pues, 1, x, $x' \in m(\mathfrak{p}^{-2})$. Como $\dim \mathfrak{p}^2 = 2$, ha de ser $x' = a + bx$, para ciertos a, $b \in k_0$, $b \neq 0$. Por otra parte, 1, x, y, $y' \in m(\mathfrak{p}^{-3})$ y, como $\dim \mathfrak{p}^3 = 3$, ha de ser $y' = c + dx + ey$, para ciertas constantes c, d, $e \in k_0$, $e \neq 0$. Sustituyendo en la ecuación de x', y' obtenemos la igualdad de polinomios

$$(c + dx + ey)^2 - 4(a + bx)^3 + g_2'(a + bx) + g_3' = f(y^2 - 4x^3 + g_2 x + g_3),$$

para cierta constante $f \in k_0$.

Igualando los términos en x^3 vemos que $f = b^3$. Igualando los términos en y^2 sale que $f = e^2$. Igualando los términos en xy concluimos que $d = 0$. Los términos en x^2 nos dan $a = 0$. De los términos en y sale $c = 0$, luego tenemos que $x' = bx$, $y' = ey$ con $b^3 = e^2$. Llamando $t = e/b \in k_0^*$ tenemos que $x' = t^2 x$, $y' = t^3 y$, de donde $g_2' = t^4 g_2$ y $g_3' = t^6 g_3$. ∎

Así pues, no podemos asociar unívocamente a cada cuerpo K de funciones elípticas unos coeficientes g_2, g_3, pero el teorema anterior muestra que de ellos sí se deriva un invariante:

Teorema 7.14 *Sea K un cuerpo de funciones elípticas y sobre un cuerpo de constantes k_0 de característica distinta de 2 o 3. Entonces, el elemento*

$$J(K) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} \in k_0,$$

donde $K = k_0(x, y)$ con $y^2 = 4x^4 - g_2 x - g_3$, es independiente de la elección de los generadores x, y.

Es claro que cuerpos k_0-isomorfos han de tener el mismo invariante $J(K)$. El recíproco es casi cierto, salvo por el hecho de que, obviamente, $J(K)$ se conserva por extensiones de constantes.

Teorema 7.15 *Sean K y K' dos cuerpos elípticos sobre un cuerpo de constantes k_0 de característica distinta de 2 o 3 y tales que $J(K) = J(K')$. Entonces existe una extensión finita k_1 de k_0 tal que las extensiones $K_1 = Kk_1$ y $K_1' = K'k_1$ son k_1-isomorfas. Más aún, la extensión k_1 puede elegirse tal que $|k_1 : k_0| \leq 2, 4, 6$ según si $1 \neq J \neq 0$, $J = 1$ o $J = 0$, respectivamente.*

Demostración: Fijemos generadores de K y K' que satisfagan ecuaciones en forma normal de Weierstrass con coeficientes g_2, g_3 y g_2', g_3' respectivamente. Se cumple que g_2 y g_2' son ambos nulos o ambos no nulos según si J es nulo o no. Si $J \neq 0$, tomamos $t = (g_2'/g_2)^{1/4}$ en una extensión de k_0 y así, mediante el cambio de generadores $x \mapsto t^2 x$, $y \mapsto t^3 y$ obtenemos generadores (en una extensión de constantes de K) que cumplen una ecuación en forma normal con $g_2 = g_2'$. La igualdad de los invariantes implica entonces que $g_3 = \pm g_3'$. Si se da el signo negativo tomamos $t' = \sqrt{-1}$ y al cambiar de nuevo los generadores, obtenemos $g_2 = g_2'$, $g_3 = g_3'$.

Así pues, hemos encontrado una extensión finita k_1 de k tal que los cuerpos K_1 y K_1' admiten pares de generadores que satisfacen la misma ecuación en forma normal, con lo que ciertamente son k_1-isomorfos. En definitiva, hemos encontrado un cuerpo k_1 en el cual tienen solución las ecuaciones $g_2' = t^4 g_2$, $g_3' = t^6 g_3$. Podemos suponer que $k_1 = k_0(t)$. Ahora bien, si $J \neq 0$, 1, entonces g_2, g_2', g_3, g_3' son todos no nulos y $t^2 = t^6/t^2 = g_3' g_2/g_3 g_2'$, luego $|k_1 : k_0| \leq 2$. Si $J = 1$ entonces $g_3 = g_3' = 0$ y $t^4 = g_2'/g_2$, luego $|k_1 : k_0| \leq 4$. Finalmente, si $J = 0$ entonces $g_2 = g_2' = 0$ y $t^6 = g_3'/g_3$, luego $|k_1 : k_0| \leq 6$. ∎

En particular, si k_0 es algebraicamente cerrado, dos cuerpos de funciones elípticas son k_0-isomorfos si y sólo si tienen el mismo invariante. Igualmente, si definimos el invariante de una curva elíptica como el de su cuerpo de funciones racionales, tenemos que dos curvas elípticas tienen el mismo invariante si y sólo si son isomorfas sobre una extensión finita de k_0 (de grado a lo sumo 6).

Ahora probaremos que existen cuerpos elípticos con cualquier invariante prefijado. Primeramente demostramos que las ecuaciones en forma canónica siempre definen cuerpos elípticos:

Teorema 7.16 *Sea $K = k_0(x, y)$ un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes k_0 de característica distinta de 2 y 3 cuyos generadores satisfagan una ecuación en forma normal de Weierstrass. Entonces K es un cuerpo de funciones elípticas.*

Demostración: En la prueba de 7.13 hemos visto que el primo infinito de $k = k_0(x)$ se descompone como $\infty = \mathfrak{p}^2$ en K, donde $\mathfrak{p}$ es un primo de grado 1. Así pues, el grado mínimo de K es $f_0 = 1$. Sólo hemos de probar que el género de K es igual a 1. Extendiendo el cuerpo de constantes podemos suponerlo algebraicamente cerrado, pues esto no altera el género de K. Entonces podemos ver a K como el cuerpo de funciones racionales de la cúbica proyectiva V determinada por la ecuación $Y^2 = 4X^3 - g_2 X - g_3$. Se trata de una cúbica regular y, por el teorema 7.4, tiene género 1. ∎

Ahora es fácil probar:

Teorema 7.17 *Si la característica de k_0 es distinta de 2 y 3 y $c \in k_0$, entonces existe un cuerpo K de funciones elípticas sobre k_0 con invariante $J(K) = c$.*

Demostración: Si $c = 1$ sirve el cuerpo definido por $y^2 = 4(x^3 - x)$. Para $c = 0$ tomamos $y^2 = 4(x^3 - 1)$ y para $c \neq 0$, 1 tomamos

$$y^2 = 4x^3 - 3c(c-1)x - c(c-1)^2.$$

∎

En particular vemos que existen infinitas cúbicas regulares no isomorfas dos a dos (una para cada invariante posible). Si $k_0 = \mathbb{C}$, esto nos lleva a que existen curvas regulares homeomorfas (es decir, del mismo género) que no son isomorfas.

Ya sabemos que un cuerpo de funciones elípticas tiene necesariamente primos de grado 1. El teorema siguiente precisa notablemente este hecho:

Teorema 7.18 *Sea K un cuerpo de funciones elípticas y sea $\mathfrak{p}$ un divisor primo de grado 1 en K. Entonces la aplicación que a cada divisor primo $\mathfrak{P}$ de grado 1 de K le asigna la clase de divisores $[\mathfrak{P}/\mathfrak{p}]$ es una biyección entre el conjunto de los primos de grado 1 y el grupo de las clases de grado 0 de K.*

DEMOSTRACIÓN: Si $[\mathfrak{P}/\mathfrak{p}] = [\mathfrak{P}'/\mathfrak{p}]$, entonces $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}'$ es principal. Si fuera $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}'$, entonces $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}' = (x)$, donde $x \in K$ sería no constante. Así $\mathfrak{P}'$ sería el primo infinito de $k = k_0(x)$, pero como el grado de $\mathfrak{P}'$ sería 1 tanto respecto de k como respecto de K, concluiríamos que $K = k$, pero entonces K tendría género 0. Así pues, la correspondencia es inyectiva.

Dada una clase C de grado 0, tenemos que $\dim C[\mathfrak{p}] = \operatorname{grad} C[\mathfrak{p}] = 1$, luego la clase $C[\mathfrak{p}]$ contiene un divisor entero $\mathfrak{P}$, que será primo por tener grado 1, y así $\mathfrak{P}/\mathfrak{p} \in C$, luego la correspondencia es también suprayectiva. ∎

La biyección del teorema anterior nos permite trasladar la estructura de grupo de las clases de grado 0 al conjunto de los primos de grado 1:

Definición 7.19 Sea K un cuerpo de funciones elípticas y sea $\mathfrak{p}$ un divisor primo de K de grado 1. Para cada par $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ de divisores primos de grado 1 definimos $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = \mathfrak{R}$ como el divisor primo de grado 1 que cumple

$$[\mathfrak{P}/\mathfrak{p}][\mathfrak{Q}/\mathfrak{p}] = [\mathfrak{R}/\mathfrak{p}].$$

Es claro que esta operación convierte al conjunto de los divisores de grado 1 de K en un grupo abeliano, de modo que la aplicación $\mathfrak{P} \mapsto [\mathfrak{P}/\mathfrak{p}]$ es un isomorfismo de grupos. Notemos que la definición depende de la elección de $\mathfrak{p}$, que resulta ser el elemento neutro, pero dos elecciones distintas dan lugar a grupos isomorfos, pues ambos son isomorfos al grupo de clases de grado 0 de K.

En particular, si V es una curva elíptica sobre un cuerpo de constantes k_0, los divisores primos de grado 1 de $K = k_0(V)$ se corresponden con los puntos de $V(k_0)$, luego tenemos definida una estructura de grupo sobre $V(k_0)$. En el caso concreto de una cúbica regular $V \subset \mathrm{P}^2$ esta estructura de grupo tiene una interpretación geométrica sencilla.

Como el grupo de clases de divisores de grado 0 de $k_0(V)$ es un subgrupo del de $\bar{k}_0(V)$, el grupo $V(k_0)$ es un subgrupo de $V(\bar{k}_0)$, luego para interpretar esta estructura de grupo no perdemos generalidad si suponemos que k_0 es algebraicamente cerrado.

Consideremos un sistema de referencia proyectivo respecto al cual la ecuación de V esté en forma normal de Weierstrass. Esto significa que las funciones coordenadas afines x, $y \in K$ satisfacen la ecuación y, por supuesto, generan K.

En la prueba del teorema 7.13 hemos visto que el primo infinito de $k_0(x)$ es de la forma $\mathfrak{p}^2$, y se cumple $x \in m(\mathfrak{p}^{-2})$, $y \in m(\mathfrak{p}^{-3})$. Más precisamente, las funciones 1, x, y forman una base de $m(\mathfrak{p}^{-3})$. Notemos que $\mathfrak{p}$ se corresponde con el único punto de V donde x e y tienen polos, es decir, el único punto infinito de V, de coordenadas homogéneas $(0, 1, 0)$, que además es un punto de inflexión. Su recta tangente es la recta del infinito. Con la representación geométrica usual, las rectas que pasan por $\mathfrak{p}$ son las rectas verticales.

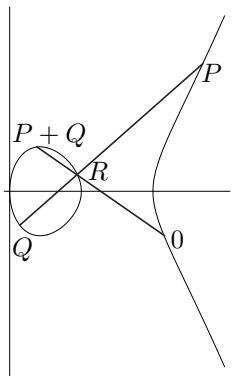
Consideremos una recta en P^2 determinada por la forma $L = aX + bY + cZ$, con coeficientes en k_0. Sea $l = L/Z = ax + by + c \in K$. Claramente $l \in m(\mathfrak{p}^{-3})$, luego $(l) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3/\mathfrak{p}^3$, para ciertos divisores primos (no necesariamente distintos) $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$. Es fácil ver que se corresponden con los tres puntos (no necesariamente distintos) en que L corta a V según el teorema de Bezout.

En efecto, si $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ entonces Z no se anula en $\mathfrak{q}$, luego $I_\mathfrak{q}(V \cap L) = v_\mathfrak{q}(l)$ es el número de veces que $\mathfrak{q}$ figura entre los $\mathfrak{p}_i$. Para calcular $I_\mathfrak{p}(V \cap L)$ no hemos de dividir L entre Z, sino entre Y, con lo que $I_\mathfrak{p}(V \cap L) = v_\mathfrak{p}(l(Z/Y)) = v_\mathfrak{p}(ly^{-1})$. Como $y \in m(\mathfrak{p}^{-3})$, es $(y) = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_3/\mathfrak{p}^3$, donde los $\mathfrak{q}_i$ son los puntos (finitos) donde $Y = 0$ corta a V. Concluimos que $I_\mathfrak{p}(V \cap L) = v_\mathfrak{p}(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3/\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_3)$ es el número de veces que $\mathfrak{p}$ aparece entre los $\mathfrak{p}_i$.

En resumen, hemos probado que si tres puntos de V (no necesariamente distintos) $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ y $\mathfrak{p}_3$ están alineados (en el sentido de que hay una recta que corta a V en tales puntos contando multiplicidades) entonces el divisor $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3/\mathfrak{p}^3$ es principal. Aquí hay que entender que $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{r}$ están alineados si la tangente a V por $\mathfrak{q}$ pasa por $\mathfrak{r}$, así como que $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{q}$ están alineados si la tangente a V por $\mathfrak{q}$ no corta a V en más puntos, es decir, si $\mathfrak{q}$ es un punto de inflexión de L.

Recíprocamente, si $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3/\mathfrak{p}^3 = (l)$ es un divisor principal, entonces tenemos que $l \in m(\mathfrak{p}^{-3}) = \langle 1, x, y\rangle$, luego $l = ax + by + c$ y los cálculos precedentes muestran que la recta $L = aX + bY + cZ$ pasa por los tres puntos.

Consideremos ahora la estructura de grupo en V que resulta de elegir arbitrariamente un primo 0 como elemento neutro. Dados puntos $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$ de V, no necesariamente distintos, consideramos la recta L que pasa por ellos y sea $\mathfrak{p}_3$ el tercer punto donde esta recta corta a V, es decir, el punto para el cual se cumple $(l) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3/\mathfrak{p}^3$. Sea L' la recta que une 0 con $\mathfrak{p}_3$ y sea $\mathfrak{s}$ su tercer punto de corte. Tenemos entonces que $0\,\mathfrak{p}_3\,\mathfrak{s}/\mathfrak{p}^3 = (l')$. Por consiguiente: $[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2] = [\mathfrak{p}^3/\mathfrak{p}_3] = [0\mathfrak{s}]$, de donde $[(\mathfrak{p}_1/0)(\mathfrak{p}_2/0)] = [\mathfrak{s}/0]$, luego $\mathfrak{s} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$. En resumen:



Teorema 7.20 *Sea $V \subset \mathrm{P}^2$ una cúbica regular sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y 3. Entonces, la suma de dos puntos P y Q de $V(k_0)$ respecto de un punto racional 0 elegido como neutro se calcula como sigue: se traza la recta que pasa por P y Q y se toma el tercer punto R donde esta recta corta a V, luego se traza la recta que une R con 0 y la suma es el tercer punto donde ésta corta a V.*

Notemos que hemos razonado bajo el supuesto de que el cuerpo k_0 es algebraicamente cerrado, pero que, tal y como hemos señalado, dado que $V(k_0)$ es un subgrupo de $V(\bar{k}_0)$, sabemos que cuando operamos de este modo dos puntos racionales obtenemos de nuevo un punto racional.

La situación es especialmente simple si tomamos como neutro un punto de inflexión. En tal caso, $-P$ es el único punto Q que cumple que el tercer punto

de la recta que pasa por R y 0 es 0, luego dicha recta es la tangente a V por 0, pero dicha tangente sólo corta a V en 0, luego $R = 0$. En definitiva, $-P$ es el tercer punto en que la recta que une P con 0 corta a V. Por consiguiente, el punto R intermedio que calculamos para obtener $P + Q$ es $-P - Q$. De aquí se sigue fácilmente que $P + Q + R = 0$ equivale a que los puntos P, Q y R están alineados.

La relación entre dos sumas respecto a neutros distintos es ahora fácil de expresar: si 0 es un punto de inflexión y $0'$ es un punto arbitrario, para sumar $P +_{0'} Q$ calculamos la recta que pasa por P y Q, que corta a V en $R = -P - Q$, y luego la recta que une R con $0'$, que corta a V en $P +_{0'} Q$, de modo que $(P +_{0'} Q) + 0' - P - Q = 0$. Así pues,

$$P +_{0'} Q = P + Q - 0'.$$

Si consideramos el sistema de coordenadas en que la ecuación de la cúbica está en forma normal, entonces las rectas que pasan por 0 son las rectas verticales, luego la aplicación $P \mapsto -P$ es simplemente $(X, Y) \mapsto (X, -Y)$.

El teorema siguiente prueba que las cúbicas regulares son que se conoce como *variedades abelianas* (variedades proyectivas con una estructura de grupo compatible con su estructura algebraica).

Teorema 7.21 *Si V es una cúbica regular sobre un cuerpo de característica distinta de 2 o 3, entonces las aplicaciones $\phi : V \times V \longrightarrow V$ y $\psi : V \longrightarrow V$ dadas por $\phi(P, Q) = P + Q$ y $\psi(P) = -P$ son regulares.*

Demostración: Tomamos un sistema de referencia en el que la ecuación de V esté en forma normal de Weierstrass. Podemos suponer que el neutro 0 es el punto del infinito, pues para otra elección $0'$ tenemos que $P +_{0'} Q = P + Q - 0'$, luego $\phi_{0'}(P, Q) = \phi(\phi(P, Q), -0')$. Similarmente, $-P_{0'} = 0' + 0' - P$, luego $\psi_{0'}(P) = \phi(0' + 0', \psi(P))$.

La aplicación ψ es obviamente regular pues, según hemos visto, se cumple $\psi(X, Y) = (X, -Y)$. Respecto a ϕ, consideremos dos puntos (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) tales que $X_1 \neq X_2$. Esto significa que no son opuestos. La recta que los une es

$$Y - Y_1 = \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right)(X - X_1),$$

y esta recta corta a la cúbica en los puntos cuya coordenada X cumple

$$\left(Y_1 + \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right)(X - X_1)\right)^2 = 4X^3 - g_2 X - g_3.$$

Puesto que dos de ellos son X_1 y X_2 y la suma de las tres raíces es el coeficiente de X^2 cambiado de signo, vemos que la tercera raíz es

$$X_3 = \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right)^2 - X_1 - X_2.$$

La ecuación de la recta nos da Y_3, y entonces la suma es el punto de coordenadas $(X_3, -Y_3)$. Ahora es claro que ϕ es una función racional regular en el abierto de $V \times V$ determinado por $X_1 \neq X_2$. Hemos de probar que es regular en un punto arbitrario $(P, Q) \in V \times V$.

Para cada $P \in V$ sea $\tau_P : V \longrightarrow V$ la traslación dada por $\tau_P(Q) = P + Q$. Es claro que τ_P es una aplicación racional, luego por la regularidad de V es —de hecho— regular. Además su inversa es τ_{-P}, que también es regular, pues es otra traslación. Concluimos que las traslaciones son isomorfismos.

Ahora observamos que si (P, Q), $(P', Q') \in V^2$, se cumple

$$\phi(P, Q) = (P + P') + (Q + Q') - (P' + Q') = \tau_{-P'-Q'}(\phi(\tau_{P'}(P), \tau_{Q'}(Q))),$$

luego $\phi = (\tau_{P'} \times \tau_{Q'}) \circ \phi \circ \tau_{-P'-Q'}$.

Así, para probar que ϕ es regular en un par (P, Q) tomamos un par (P_0, Q_0) donde sí lo sea (un par que cumpla $X_1 \neq X_1'$) y llamamos $P' = P_0 - P$, $Q' = Q_0 - Q$, con lo que $(\tau_{P'} \times \tau_{Q'})$ es regular en (P, Q) (es un isomorfismo), ϕ es regular en (P_0, Q_0) y $\tau_{-P'-Q'}$ es regular en $P_0 + Q_0$, luego la composición es regular en (P, Q). ∎

Nota En los teoremas precedentes sobre curvas elípticas la hipótesis sobre la característica del cuerpo de constantes puede suprimirse, pero ello requiere trabajar con ecuaciones de Weierstrass más generales que las que estamos considerando y no vamos a entrar en ello. ∎

7.3 Formas diferenciales

Si K es un cuerpo de funciones algebraicas, el término $\dim W/A$ en la fórmula del teorema de Riemann-Roch está estrechamente relacionado con las formas diferenciales de K. Esto está implícito en la demostración, pero es más fácil verlo directamente:

Definición 7.22 Si K es un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes (exacto) k_0 y $\mathfrak{a}$ es un divisor en K, llamaremos $\Omega(\mathfrak{a})$ al k_0-espacio vectorial de todas las formas diferenciales ω en K tales que $v_{\mathfrak{P}}(\omega) \geq v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a})$, para todo primo $\mathfrak{P}$ de K.

Teorema 7.23 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes (exacto) k_0. Sea W la clase canónica y $A = [\mathfrak{a}]$ una clase de divisores arbitraria. Entonces*

$$\dim \Omega(\mathfrak{a}) = \dim(W/A).$$

Demostración: Sea ω una forma diferencial no nula en K. Entonces, cualquier otra forma diferencial en K es de la forma $\alpha\omega$, con $\alpha \in K$. Se cumplirá que $\alpha\omega \in \Omega(\mathfrak{a})$ si y sólo si $v_{\mathfrak{P}}(\alpha) + v_{\mathfrak{P}}(\omega) \geq v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a})$ para todo primo $\mathfrak{P}$ de K. Si llamamos $\mathfrak{c}$ al divisor de ω, tenemos que $[\mathfrak{c}] = W$ y $\alpha\omega \in \Omega(\mathfrak{a})$ si y sólo si $v_{\mathfrak{P}}(\alpha) \geq v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}/\mathfrak{c})$ para todo primo $\mathfrak{P}$, lo cual equivale a que $\alpha \in m(\mathfrak{a}/\mathfrak{c})$.

Es claro entonces que la aplicación $m(\mathfrak{a}/\mathfrak{c}) \longrightarrow \Omega(\mathfrak{a})$ dada por $\alpha \mapsto \alpha\omega$ es un k_0-isomorfismo, luego $\dim \Omega(\mathfrak{a}) = \dim(W/A)$. ∎

A partir de aquí podemos usar el teorema de Riemann-Roch para justificar la existencia de formas diferenciales con ciertas propiedades sobre sus ceros y polos. Antes conviene introducir una clasificación que resultará natural en el capítulo siguiente, cuando nos ocupemos de la integración en superficies de Riemann.

Definición 7.24 Si K es un cuerpo de funciones algebraicas, llamaremos *diferenciales de primera clase* en K a las formas diferenciales en K que no tienen polos, las *diferenciales de segunda clase* son las formas diferenciales cuyos residuos son todos nulos y las *diferenciales de tercera clase* son las formas diferenciales que tienen a lo sumo polos de orden 1.

Es claro que una forma diferencial es de primera clase si y sólo si es a la vez de segunda y tercera clase. Lo más notable sobre las diferenciales de primera clase es que existen. Recordemos que las únicas funciones algebraicas sin polos son las constantes. Por el contrario, (salvo en los cuerpos de fracciones algebraicas) siempre existen diferenciales de primera clase no nulas. En efecto, el espacio de las diferenciales de primera clase es simplemente $\Omega(1)$, luego el teorema siguiente se sigue inmediatamente del teorema anterior, junto con el hecho de que la clase canónica tiene dimensión g:

Teorema 7.25 *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas de género g, su espacio de formas diferenciales de primera clase tiene dimensión g.*

Si el cuerpo de constantes k_0 es algebraicamente cerrado, el teorema de los residuos 6.27 afirma que la suma de los residuos de una forma diferencial ha de ser nula. Ahora probamos que, salvo por esta restricción, existen diferenciales de tercera clase con cualquier distribución de residuos prefijada. En particular, toda forma diferencial es suma de una de segunda clase más otra de tercera clase:

Teorema 7.26 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes algebraicamente cerrado k_0, sean $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ divisores primos de K y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ constantes no nulas tales que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$. Entonces existe una diferencial de tercera clase η en K cuyos polos son exactamente $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ y $\mathrm{Res}_{\mathfrak{P}_k} \eta = \alpha_k$, para $k = 1, \ldots, n$.*

Demostración: Basta probar el teorema para dos primos, pues si tenemos n primos $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$, podemos tomar otro más $\mathfrak{P}$ y aplicar el caso $n = 2$ para obtener formas η_k cuyos únicos polos polos (simples) estén en $\mathfrak{P}_k$ y $\mathfrak{P}$ de modo que $\mathrm{Res}_{\mathfrak{P}_k} \eta_k = \alpha_k$, $\mathrm{Res}_{\mathfrak{P}} \eta_k = -\alpha_k$. La forma $\eta = \eta_1 + \cdots + \eta_n$ cumple el teorema.

Suponemos, pues $n = 2$. Aplicamos el teorema de Riemann-Roch a la clase A del divisor $\mathfrak{a} = \mathfrak{P}_1^{-1}\mathfrak{P}_2^{-1}$, que nos da

$$0 = \dim A = \operatorname{grad} A - (g-1) + \dim(W/A) = -(g+1) + \dim(W/A),$$

donde W es la clase canónica.

Así pues, $\dim \Omega(\mathfrak{P}_1^{-1}\mathfrak{P}_2^{-1}) = \dim(W/A) = g+1$. Por otra parte, el espacio de las diferenciales de primera clase tiene dimensión g, luego ha de existir una forma diferencial $\omega \in \Omega(\mathfrak{P}_1^{-1}\mathfrak{P}_2^{-1})$ que no sea de primera clase, es decir, que tenga al menos un polo y a lo sumo dos polos simples en los puntos $\mathfrak{P}_1$ y $\mathfrak{P}_2$. Como la suma de los residuos ha de ser nula, de hecho tiene un polo simple en ambos. Multiplicando ω por una constante tenemos la forma buscada. ∎

Así pues, a toda diferencial se le puede restar una diferencial de tercera clase adecuada para que el resultado sea una diferencial de segunda clase. Evidentemente, dicha diferencial es única salvo diferenciales de primera clase.

Ejemplo Vamos a mostrar explícitamente las diferenciales de primera clase de los cuerpos elípticos e hiperelípticos sobre un cuerpo de constantes k_0 algebraicamente cerrado. Según el teorema 7.8 un cuerpo K en estas condiciones es de la forma $K = k_0(x,y)$, donde x e y satisfacen una ecuación de la forma

$$y^2 = (x-e_1)\cdots(x-e_{2g+1}), \tag{7.2}$$

donde los $e_i \in k_0$ son distintos dos a dos. Hemos de suponer además que x es separador, es decir, que $dx \neq 0$. Esto se cumple en particular si los cuerpos tienen característica 0. Vamos a probar que, en tal caso, una base del espacio de las diferenciales de primera clase la forman las diferenciales

$$\frac{dx}{y}, \quad \frac{x\,dx}{y}, \quad \cdots \quad , \quad \frac{x^{g-1}dx}{y}.$$

Sea $\omega = x^m y^{-1}\,dx$ y veamos que no tiene polos. Tomemos un primo $\mathfrak{P}$ en K y sea $\mathfrak{p}$ el primo de $k = k_0(x)$ al cual divide. Hemos de probar que $v_{\mathfrak{P}}(\omega) \geq 0$.

Supongamos en primer lugar que $v_{\mathfrak{P}}(x) \geq 0$ y sea $e = x(\mathfrak{P}) = x(\mathfrak{p}) \in k_0$. Si $e \neq e_j$ para $j = 1,\ldots,2g+1$, entonces $y(\mathfrak{P}) \neq 0$, luego $v_{\mathfrak{P}}(y) = 0$ y claramente también $v_{\mathfrak{P}}(dx) \geq 0$, luego $v_{\mathfrak{P}}(\omega) \geq 0$. Supongamos, pues, que $e = e_j$.

Como $x - e$ se anula en $\mathfrak{P}$, ha de ser $x - e = \epsilon\pi^r$, donde ϵ es una unidad en $K_{\mathfrak{P}}$ y π un primo. Por otra parte, $x - e_i$ no se anula en $\mathfrak{P}$ para $i \neq j$, luego es una unidad. De (7.2) obtenemos que

$$2v_{\mathfrak{P}}(y) = v_{\mathfrak{P}}(x - e_j) = r.$$

Notemos que r es el índice de ramificación de $\mathfrak{P}$, que ha de ser 1 o 2, luego concluimos que es 2. Por lo tanto, $v_{\mathfrak{P}}(y) = 1$ y

$$dx = d(x-e) = \left(\frac{d\epsilon}{d\pi}\,\pi^2 + 2\epsilon\,\pi\right) d\pi,$$

de donde concluimos que $v_{\mathfrak{P}}(dx) \geq 1$. Ahora es claro que $v_{\mathfrak{P}}(\omega) \geq 0$.

Supongamos, por último, que $v_{\mathfrak{P}}(x) < 0$, de modo que $x = \epsilon\pi^{-r}$, donde de nuevo ϵ es una unidad en $K_{\mathfrak{P}}$ y π es un primo. El exponente r es así mismo el índice de ramificación de $\mathfrak{P}$, luego ha de ser 1 o 2. Llamando $t = 1/x$ tenemos que

$$y^2 = \left(\frac{1}{t} - e_1\right)\cdots\left(\frac{1}{t} - e_{2g+1}\right) = \frac{1}{t^{2g+1}}(1-te_1)\cdots(1-te_{2g+1}).$$

Los factores de la derecha son unidades en $K_\mathfrak{P}$, ya que valen 1 en $\mathfrak{P}$. Por consiguiente,

$$2v_\mathfrak{P}(y) = -r(2g+1).$$

De aquí se sigue que $r = 2$, con lo que $v_\mathfrak{P}(y) = -2g-1$ y $v_\mathfrak{P}(x) = -2$. Por otra parte,

$$dx = \left(\frac{d\epsilon}{d\pi}\,\pi^{-2} - 2\epsilon\pi^{-3}\right) d\pi,$$

con lo que $v_\mathfrak{P}(dx) \geq -3$. En total,

$$v_\mathfrak{P}(\omega) = mv_\mathfrak{P}(x) - v_\mathfrak{P}(y) + v_\mathfrak{P}(dx) \geq -2(g-1) + 2g + 1 - 3 = 0.$$

Tenemos, pues que las g formas diferenciales consideradas son de primera clase. Una relación de dependencia lineal entre ellas daría lugar a una relación de dependencia lineal entre las funciones $1, x, \ldots, x^{g-1}$, lo cual es absurdo, luego ciertamente son linealmente independientes. ∎

Veamos una aplicación:

Ejemplo *Si V es la curva proyectiva determinada por $Y^4 = X^4 - 1$, entonces V es regular y tiene género 3. Si el cuerpo de constantes k_0 es algebraicamente cerrado, entonces el cuerpo $K = k_0(V)$ no es hiperelíptico.*

En efecto, es fácil ver que no V tiene puntos singulares, luego el teorema 7.4 implica que su género es 3.

Vamos a probar que una base de las diferenciales de primera clase de K está constituida por las formas

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^3}, \qquad \omega_2 = \frac{x\,dx}{y^3}, \qquad \omega_3 = \frac{y\,dx}{y^3}.$$

Llamemos $k = k_0(x)$. Sabemos que la extensión K/k se corresponde con la aplicación regular $x : V \longrightarrow \mathrm{P}^1$.

Sea $P \in V$ un punto finito tal que $x(P) = a$ no sea una raíz cuarta de la unidad. Así $v_P(x) \geq 0$, $v_P(y) = 0$. Además el punto $a \in A^1$ tiene cuatro divisores (antiimágenes) en V, uno de los cuales es P, luego $e_x(P) = 1$. Así pues, $v_P(x-a) = v_a(x-a) = 1$, luego $x - a$ es primo en K_P. Por consiguiente,

$$v_P(dx) = v_P(d(x-a)) = v_P(1) = 0.$$

Con esto es claro que las tres formas ω_i son regulares en P.

Supongamos ahora que $x(P) = a$ cumple $a^4 = 1$. En tal caso a tiene a P como único divisor en V, luego $e_x(P) = 4$. Tenemos que $v_P(x) = 0$ y $v_P(y) \geq 0$. Más aún, el polinomio $x^4 - 1$ factoriza en k como producto de cuatro polinomios distintos, uno de las cuales es $x - a$, luego

$$4v_P(y) = v_P(y^4) = 4v_a(y^4) = 4v_a(x^4 - 1) = 4.$$

Así pues, $v_P(y) = 1$, luego y es primo en K_P. Diferenciando la relación $y^4 = x^4 - 1$ obtenemos que $dx = (y/x)^3\,dy$, luego $v_P(dx) = 3$. De nuevo concluimos que las formas ω_i son regulares en P.

Consideremos, por último, el caso en que P es un punto infinito de K. Es claro que $\infty \in \mathrm{P}^1$ tiene cuatro divisores en V, luego $e_x(P) = 1$. En consecuencia, $v_P(x) = v_\infty(x) = -1$. Si recordamos que v_∞ en $k_0(x)$ es el grado cambiado de signo, resulta que

$$4v_P(y) = v_p(y^4) = v_\infty(x^4 - 1) = -4,$$

luego también $v_P(y) = -1$. Como primo en K_P podemos tomar $\pi = 1/x$, con lo que

$$v_P(dx) = v_P(d\pi^{-1}) = v_P(-\pi^{-2}\,d\pi) = -2.$$

Una vez más, vemos que las tres formas ω_i son regulares en P. En definitiva, son tres diferenciales de primera clase en V. Además son linealmente independientes sobre k_0, pues en caso contrario las funciones 1, x, y, serían linealmente dependientes.

Ahora observamos que

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = x, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = y,$$

luego $K = k_0(\omega_2/\omega_1, \omega_3/\omega_1)$. Además, este hecho se cumple para cualquier base de las diferenciales de primera clase de K, pues si $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$ es otra base, se cumplirá que

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= a_{11}\omega_1' + a_{12}\omega_2' + a_{13}\omega_3',\\
\omega_2 &= a_{21}\omega_1' + a_{22}\omega_2' + a_{23}\omega_3',\\
\omega_3 &= a_{31}\omega_1' + a_{32}\omega_2' + a_{33}\omega_3',
\end{aligned}$$

para ciertos $a_{ij} \in k_0$. Por lo tanto,

$$x = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a_{21} + a_{22}\,\omega_2'/\omega_1' + a_{23}\,\omega_3'/\omega_1'}{a_{11} + a_{12}\,\omega_2'/\omega_1' + a_{13}\,\omega_3'/\omega_1'} \in k_0\left(\frac{\omega_2'}{\omega_1'}, \frac{\omega_3'}{\omega_1'}\right),$$

e igualmente $y \in k_0(\omega_2'/\omega_1', \omega_3'/\omega_1')$. Por lo tanto $k_0(\omega_2'/\omega_1', \omega_3'/\omega_1') = K$.

Esto prueba que K no es hiperelíptico, ya que si lo fuera podríamos expresar $K = k_0(x, y)$, para ciertos generadores x, y respecto a los cuales una base del espacio de diferenciales de primera clase lo constituyen las formas

$$\omega_1' = \frac{dx}{y}, \qquad \omega_2' = \frac{x\,dx}{y}, \qquad \omega_3' = \frac{x^2\,dx}{y},$$

de modo que $K = k_0(\omega_2'/\omega_1', \omega_3'/\omega_1') = k_0(x, x^2) = k_0(x)$, contradicción. ∎

7.4 Cuerpos de constantes finitos

En esta sección veremos varias aplicaciones del teorema de Riemann-Roch a los cuerpos de funciones algebraicas sobre cuerpos finitos. Empezamos por una muy simple pero muy importante.

Teorema 7.27 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes finito k_0. Entonces el grupo de las clases de grado 0 tiene orden finito h.*

DEMOSTRACIÓN: Si $g = 0$ sabemos que los únicos divisores de grado 0 son los principales, luego $h = 1$. Supongamos que $g \geq 1$. Fijemos un divisor $\mathfrak{b}$ de K tal que $\operatorname{grad}\mathfrak{b} = m \geq 1$. Sea A una clase de grado 0 no principal. Entonces $\operatorname{grad} A[\mathfrak{b}]^g = mg \geq g$, y por el teorema de Riemann-Roch se cumple $\dim A[\mathfrak{b}]^g \geq 1$. En consecuencia, esta clase contiene un divisor entero $\mathfrak{a}$, de modo que $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-g} \in A$. En particular $\operatorname{grad}\mathfrak{a} = mg$.

Es claro que A contiene un número finito de divisores enteros de grado menor o igual que mg (esto es cierto para cuerpos de fracciones algebraicas y se conserva por extensiones finitas). Por consiguiente hay un número finito de clases de grado 0. ∎

Definición 7.28 Se llama *número de clases* de un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo de constantes finito al número h de clases de divisores de grado 0.

Claramente, h es también el número de clases de grado n de K, para todo entero n (supuesto que existan clases de grado n, lo cual es cierto, aunque aún no lo hemos probado).

Funciones dseta Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo exacto de constantes k_0 de cardinal finito q. Otra consecuencia del teorema de Riemann-Roch es la convergencia de la función dseta asociada a K. Concretamente, podemos definir la *norma absoluta* de un divisor $\mathfrak{a}$ de K como $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) = q^{\operatorname{grad}\mathfrak{a}}$. Claramente es multiplicativa. La función dseta de K es la función

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{a})^s},$$

donde $\mathfrak{a}$ recorre los divisores enteros de K.

Vamos a probar que esta serie converge para todo número real $s > 1$. Como es una serie de términos positivos, la convergencia no depende del orden en que se dispongan sus términos.

Llamemos f al grado mínimo de un divisor de K. Precisamente estudiando la función dseta probaremos que $f = 1$, pero de momento no disponemos de este hecho.

Agrupamos como sigue los términos de la función dseta:

$$\zeta_K(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\operatorname{grad} A = fn} \sum_{\mathfrak{a}\in A} \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{a})^s}, \tag{7.3}$$

donde A recorre las clases de divisores de K. Enseguida veremos que las dos sumas internas son finitas y, si probamos que la serie de la izquierda converge, lo mismo valdrá para la serie completa $\zeta_K(s)$, y la suma será la misma.

Sabemos que los divisores enteros de una clase A están en correspondencia con los elementos no nulos del espacio $m(\mathfrak{a}^{-1})$, para un $\mathfrak{a} \in A$ prefijado, de modo que dos elementos se corresponden con un mismo divisor si y sólo si se diferencian en un factor constante. Si $\dim A = m$, entonces $m(\mathfrak{a}^{-1})$ tiene $q^m - 1$ elementos no nulos. Si los agrupamos en clases de múltiplos, cada clase contiene $q - 1$ elementos, luego el número de divisores enteros en la clase A es

$$\frac{q^m - 1}{q - 1}, \qquad m = \dim A.$$

Así pues, como hay a lo sumo un número finito de clases A de grado fn y en cada clase hay un número finito de divisores enteros, tenemos probado que las dos sumas internas de (7.3) son finitas, para cada n. Más aún, puesto que divisores de grados distintos tienen normas distintas, vemos que hay a lo sumo un número finito de divisores enteros de una norma dada, luego, formando grupos finitos de sumandos, la serie puede reordenarse para formar una serie de Dirichlet [VC 5.1] de términos positivos. Así, por [VC 5.5], si probamos que la serie converge para $s > 1$, de hecho tendremos que convergerá en todo número complejo con $\operatorname{Re} z > 1$.

Además ahora sabemos que

$$\zeta_K(s) = \frac{1}{q-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\operatorname{grad} A = fn} \frac{q^{m_A} - 1}{q^{fns}}, \qquad m_A = \dim A.$$

Distingamos el caso en que el género de K es $g = 0$. Entonces hay una única clase A de cada grado fn y su dimensión es $fn + 1$, luego tenemos dos series geométricas que convergen cuando $s > 1$:

$$\zeta_K(s) = \frac{1}{q-1} \sum_{n=0}^{\infty} (q^{1+f(1-s)n} - q^{-fsn}) = \frac{1}{q-1} \left(\frac{q}{1 - q^{f(1-s)}} - \frac{1}{1 - q^{-fs}} \right).$$

Operando llegamos a

$$\zeta_K(s) = \frac{1}{q-1} \, \frac{q - 1 + q^{f(1-s)} - q^{1-fs}}{(1 - q^{-fs})(1 - q^{f(1-s)})}. \tag{7.4}$$

Cuando hayamos probado que $f = 1$ tendremos de hecho que

$$\zeta_K(s) = \frac{1}{(1 - q^{-s})(1 - q^{(1-s)})}.$$

Consideremos ahora el caso en que $g > 0$ y sea h el número de clases de K. Cuando $fn > 2g-2$, el teorema de Riemann-Roch nos da que las h clases de grado nf tienen dimensión $fn-g+1$. Separamos los sumandos correspondientes a estos términos:

$$\zeta_2(s) = \frac{h}{q-1}\sum_{fn>2g-2}\frac{q^{fn-g+1}-1}{q^{fsn}} = \frac{h}{q-1}\sum_{fn>2g-2}(q^{1-g+f(1-s)n} - q^{-fsn})$$
$$= \frac{h}{q-1}\frac{q^{1-g+(2g-2+f)(1-s)}}{1-q^{f(1-s)}} - \frac{h}{q-1}\frac{q^{-(2g-2+f)s}}{1-q^{-fs}}.$$

Con esto ya tenemos la convergencia de la serie, pues el trozo que falta es una función entera. De todos modos vamos a desarrollarlo:

$$\begin{aligned}\zeta_1(s) &= \frac{1}{q-1}\sum_{n=0}^{(2g-2)/f}\sum_{\operatorname{grad} A=fn}(q^{m_A-fsn} - q^{-fsn})\\ &= \frac{1}{q-1}\sum_{n=0}^{(2g-2)/f}\sum_{\operatorname{grad} A=fn} q^{m_A-fsn} - \frac{h}{q-1}\sum_{n=0}^{(2g-2)/f} q^{-fsn}\\ &= P(q^{-s}) - \frac{h}{q-1}\frac{1-q^{-(2g-2+f)s}}{1-q^{-fs}},\end{aligned}$$

donde P es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Al sumar las dos partes se cancela un término y queda

$$\zeta_K(s) = P(q^{-s}) + \frac{h}{q-1}\left(\frac{q^{1-g+(2g-2+f)(1-s)}}{1-q^{f(1-s)}} - \frac{1}{1-q^{-fs}}\right) \tag{7.5}$$

Al operar obtenemos una expresión de la forma

$$\zeta_K(s) = \frac{L(q^{-s})}{(1-q^{-fs})(1-q^{f(1-s)})}, \tag{7.6}$$

donde $L(x)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Notemos que (7.4) es también de esta forma. El denominador del último término de (7.5) tiene ceros simples en los puntos $s_r = -2r\pi i/(f\log q)$, para $r \in \mathbb{Z}$. Al sustituir en la expresión de $L(q^{-s})$ que se obtiene al operar resulta que

$$L(q^{-s_r}) = \frac{h(q^f-1)}{q-1}.$$

Por lo tanto $\zeta_K(s)$ tiene polos simples en estos puntos. Cuando hayamos probado que $f = 1$ tendremos que $L(1) = h$. Es fácil ver que todo esto vale igualmente en el caso $g = 0$.

Productos de Euler Una vez probada la convergencia de la función dseta, es fácil probar la fórmula de Euler:

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{p})^s}}, \qquad s > 1, \tag{7.7}$$

donde $\mathfrak{p}$ recorre los divisores primos de K (véase [TAl 4.9]).

Para demostrar que $f = 1$ compararemos la función dseta de K con la de la única extensión de constantes de K de grado n. Sea k_1 la única extensión de k_0 de grado n. Llamemos $K_n = Kk_1$. Sea $\mathfrak{p}$ un primo en K y $\mathfrak{P}$ un divisor de $\mathfrak{p}$ en K_n. Entonces

$$f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = |(\overline{K}_n)_{\mathfrak{P}} : \overline{K}_{\mathfrak{p}}| = |k_1\overline{K}_{\mathfrak{p}} : \overline{K}_{\mathfrak{p}}|.$$

El cuerpo $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$ tiene q^m elementos, donde $m = \operatorname{grad}\mathfrak{p}$, mientras que k_1 tiene q^n elementos. La teoría de cuerpos finitos nos da que

$$f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = \frac{\operatorname{mcm}(m,n)}{m} = \frac{n}{\operatorname{mcd}(m,n)},$$

luego $\mathfrak{p}$ se descompone en $t = (m,n)$ primos de K_n. Para calcular la función $\zeta_{K_n}(s)$ hemos de trabajar con el cuerpo de constantes k_1. Como el grado de $\mathfrak{p}$ respecto de k_1 sigue siendo m, el de sus divisores será m/t. Por otra parte el número de elementos de k_1 es q^n.

En la fórmula del producto de Euler agrupamos los factores (iguales) correspondientes a los divisores de un mismo primo de K, con lo que obtenemos que

$$\zeta_{K_n}(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{q^{(\operatorname{grad}\mathfrak{p})sn/t}}\right)^{-t}.$$

Para operar esta expresión fijamos un primo $\mathfrak{p}$ y consideramos la raíz n-sima de la unidad $\omega_n = e^{2\pi i/n}$. Si $m = \operatorname{grad}\mathfrak{p}$, entonces ω_n^m tiene orden n/t, luego

$$x^{n/t} - q^{-msn/t} = \prod_{r=0}^{n/t-1} (x - \omega_n^{mr} q^{-ms}).$$

Si dejamos que r varíe entre 0 y $n-1$ entonces cada factor aparece t veces, luego

$$(x^{n/t} - q^{-msn/t})^t = \prod_{r=0}^{n-1} (x - \omega_n^{mr} q^{-ms}).$$

Haciendo $x = 1$ queda

$$(1 - q^{-msn/t})^t = \prod_{r=0}^{n-1} (1 - \omega_n^{mr} q^{-ms}) = \prod_{r=0}^{n-1} (1 - q^{-m(s-2r\pi i/n\log q)})$$

Usando esto vemos que

$$\zeta_{K_n}(s) = \prod_{r=0}^{n-1} \zeta_K\left(s - \frac{2r\pi i}{n\log q}\right). \tag{7.8}$$

Ahora bien, en el caso $n = f$ hemos visto que cada factor tiene un polo simple en $s = 0$, luego ζ_{K_f} tiene un polo de orden f en $s = 0$, pero lo visto anteriormente vale también para esta función, luego el polo ha de ser simple y por consiguiente ha de ser $f = 1$.

Teorema 7.29 *Los cuerpos de funciones algebraicas sobre cuerpos de constantes finitos tienen divisores de todos los grados.*

El polinomio *L(x)* Ahora que sabemos que $f = 1$ podemos hacer algunas precisiones adicionales sobre el polinomio $L(x)$ que hemos introducido en (7.6). La expresión explícita de $\zeta_K(s)$ es (para $g \geq 1$)

$$\zeta_K(s) = \frac{1}{q-1}\sum_{n=0}^{2g-2}\sum_{\text{grad } A=n} q^{m_A - sn} + \frac{h}{q-1}\left(\frac{q^{1-g+(2g-1)(1-s)}}{1-q^{1-s}} - \frac{1}{1-q^{-s}}\right),$$

luego

$$L(x) = \frac{(1-qx)(1-x)}{q-1}\sum_{n=0}^{2g-2}\sum_{\text{grad } A=n} q^{m_A}x^n + \frac{h}{q-1}\left((1-x)q^g x^{2g-1} - (1-qx)\right).$$

Vemos así que $L(x)$ tiene grado $2g$. Más aún, el polinomio $(q-1)L(x)$ tiene coeficientes enteros, y si tomamos restos módulo $q-1$ queda

$$(q-1)L(x) \equiv (1-x)^2\sum_{n=0}^{2g-2}\sum_{\text{grad } A=n} x^n + h\left((1-x)x^{2g-1} - (1-x)\right)$$

$$\equiv h(1-x)^2\sum_{n=0}^{2g-2} x^n + h(1-x)(x^{2g-1}-1) \equiv 0 \text{ (mód } q-1).$$

Esto significa que todos los coeficientes de $(q-1)L(x)$ son múltiplos de $q-1$, luego el polinomio $L(x)$ tiene coeficientes enteros.

Ya hemos visto que $L(1) = h$, y ahora es fácil ver además que

$$L(0) = \frac{1}{q-1}\sum_{\text{grad } A=0} q^{m_A} - \frac{h}{q-1} = \frac{1}{q-1}(q+h-1) - \frac{h}{q-1} = 1,$$

donde hemos usado el teorema 6.31. En resumen:

Teorema 7.30 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas de género g sobre un cuerpo de constantes finito (exacto) de cardinal q. Entonces la función $\zeta_K(s)$ converge en el semiplano $\operatorname{Re} s > 1$ a una función holomorfa que se extiende a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ dada por*

$$\zeta_K(s) = \frac{L(q^{-s})}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})},$$

donde $L(x) \in \mathbb{Z}[x]$ es un polinomio de grado $2g$ tal que $L(0) = 1$ y $L(1) = h$, el número de clases.

Notemos que el teorema es trivial si $g = 0$, pues entonces $L(x) = 1$. En particular, si $K = k(\alpha)$, donde k es un cuerpo de fracciones algebraicas, tenemos que $\zeta_K(s) = L(q^{-s})\zeta_k(s)$.

La ecuación funcional Con los cálculos que tenemos a nuestra disposición, es fácil probar que la función dseta satisface una ecuación funcional muy sencilla:

Teorema 7.31 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas de género g sobre un cuerpo de constantes finito (exacto) de cardinal q. Entonces*

$$q^{(g-1)s}\zeta_K(s) = q^{(g-1)(1-s)}\zeta_K(1-s), \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{C}.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el caso en que $g > 0$, pues el caso $g = 0$ es más simple. Según hemos visto,

$$\zeta_K(s) = \frac{1}{q-1}\sum_{n=0}^{2g-2}\sum_{\operatorname{grad} A=n} q^{m_A-ns} + \frac{h}{q-1}\left(\frac{q^{1-g+(2g-1)(1-s)}}{1-q^{(1-s)}} - \frac{1}{1-q^{-s}}\right),$$

donde m_A es la dimensión de A. Por lo tanto

$$\begin{aligned} q^{(g-1)s}\zeta_K(s) &= \frac{1}{q-1}\sum_{n=0}^{2g-2}\sum_{\operatorname{grad} A=n} q^{m_A-(n-(g-1))s} \\ &+ \frac{h}{q-1}\left(\frac{q^{g(1-s)}}{1-q^{(1-s)}} + \frac{q^{gs}}{1-q^s}\right). \end{aligned}$$

El segundo sumando es claramente invariante para la sustitución $s \mapsto 1-s$. Basta probar que lo mismo le sucede al primero. Si una clase A tiene grado $n \le 2g-2$, su complementaria W/A tiene grado $2g-2-n$, luego podemos agrupar los sumandos del primer término en parejas

$$q^{m_A-(n-(g-1))s}, \qquad q^{m_{W/A}-(g-1-n)s} = q^{m_A+(g-1-n)(1-s)},$$

donde hemos usado el teorema de Riemann-Roch. Claramente la sustitución $s \mapsto 1-s$ deja invariante cada pareja. ∎

Es fácil ver que en términos del polinomio $L(x)$ dado por el teorema 7.30, la ecuación funcional se expresa en la forma

$$L(x) = q^g x^{2g} L(1/qx).$$

Teniendo en cuenta que el término independiente de $L(x)$ es $L(0) = 1$, de aquí se sigue que el coeficiente director de $L(x)$ es q^g.

El logaritmo de la función dseta Tomemos logaritmos en el producto de Euler (7.7):

$$\log\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{p}} \log\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{p})^s}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\operatorname{grad}\mathfrak{p}=k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(q^{-s})^{mk}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k|m}\sum_{\operatorname{grad}\mathfrak{p}=k}\frac{k}{m}(q^{-s})^m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n}{n}(q^{-s})^n,$$

donde $N_n = \sum_{\operatorname{grad}\mathfrak{p}|n} \operatorname{grad}\mathfrak{p}$. En particular, N_1 es el número de primos de grado 1 en K.

Sea ahora K_n la extensión de constantes de grado n de K y consideremos la fórmula (7.8). Tenemos que

$$\log \zeta_{K_n}(s) = \sum_{r=0}^{n-1} \log \zeta_K\left(s - \frac{2r\pi i}{n \log q}\right). \tag{7.9}$$

En principio, faltaría un posible término $2k\pi i$, pero enseguida veremos que no es así. En efecto, si $\omega = e^{2\pi i/n}$, el miembro derecho es

$$\sum_{r=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m}(q^{-s}\omega^r)^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m} \sum_{r=0}^{n-1} \omega^{mr}(q^{-s})^m = \sum_{n|m} \frac{N_m}{m}(q^{-s})^m.$$

Ahora es claro que ambos miembros de (7.9) son reales cuando s es real, luego son el mismo logaritmo. Por otra parte, el miembro izquierdo de (7.9) es

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m^{n)}}{m}(q^{-s})^{mn}.$$

Comparando ambas expresiones vemos que $N_n = N_1^{n)}$, es decir, N_n es el número de primos de grado 1 de la extensión K_n.

Si llamamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}$ a los inversos de las raíces de $L(x)$, tenemos que

$$L(x) = \prod_{i=1}^{2g}(1 - \alpha_i x), \tag{7.10}$$

pues el coeficiente director del miembro derecho es $\alpha_1 \cdots \alpha_{2g} = q^g$ (recordemos que el término independiente de $L(x)$ es 1 y su coeficiente director es q^g). Por consiguiente.

$$\zeta_K(s) = \frac{\prod_{i=1}^{2g}(1 - \alpha_i q^{-s})}{(1 - q^{-s})(1 - q^{1-s})}.$$

Tomando logaritmos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{n}(q^{-s})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(q^n + 1 - \sum_{i=1}^{2g} \alpha_i^n\right) \frac{1}{n}(q^{-s})^n.$$

Comparando ambos miembros, obtenemos la relación

$$N_n = q^n + 1 - \sum_{i=1}^{2g} \alpha_i^n.$$

La hipótesis de Riemann Finalmente demostramos un resultado notable sobre la función dseta. La fórmula (7.7) muestra que $\zeta_K(s)$ no se anula en el semiplano $\operatorname{Re} s > 1$, y la ecuación funcional implica entonces que tampoco lo hace en el semiplano $\operatorname{Re} s < 0$. Así pues, todos los ceros de $\zeta_K(s)$ han de estar en la banda crítica $0 \le \operatorname{Re} s \le 1$.

La situación es similar a la de la función dseta de Riemann clásica, es decir, la función

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Riemann demostró que $\zeta(s)$ se extiende a todo el plano complejo con un único polo en $s = 1$, así como que satisface una cierta ecuación funcional, de la que se sigue que $\zeta(s)$ se anula en los enteros pares negativos (ceros triviales) y que cualquier otro cero ha de estar sobre la banda crítica $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$. Riemann conjeturó que todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ se encuentran, de hecho, sobre la recta $\operatorname{Re} s = 1/2$, afirmación que se conoce como *hipótesis de Riemann* y constituye uno de los más famosos problemas abiertos en la actualidad. Sorprendentemente, André Weil demostró el análogo para las funciones dseta de los cuerpos de funciones algebraicas sobre cuerpos finitos, es decir:

Hipótesis de Riemann *Los ceros de la función $\zeta_K(s)$ están todos situados sobre la recta $\operatorname{Re} s = 1/2$.*

Aquí veremos una prueba debida a Bombieri, más elemental que la de Weil.

Observemos que s es un cero de $\zeta_K(s)$ si y sólo si q^{-s} es un cero del polinomio $L(x)$. Además $|q^{-s}| = q^{-\operatorname{Re} s}$, luego la hipótesis de Riemann equivale a que los inversos de las raíces de $L(x)$, es decir, los números que hemos llamado $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}$, cumplen $|\alpha_i| = \sqrt{q}$. Por consiguiente, la hipótesis de Riemann nos da la estimación

$$|N_n - q^n - 1| = |\alpha_1^n + \cdots + \alpha_{2g}^n| \leq 2g\, q^{n/2}.$$

En particular, para $n = 1$, vemos que el número de primos de grado 1 de un cuerpo de funciones algebraicas K de género g sobre un cuerpo de constantes finito (exacto) de cardinal q satisface la estimación

$$|N_1 - q - 1| \leq 2g\sqrt{q}.$$

De hecho, la hipótesis de Riemann puede expresarse como una estimación asintótica de N_n:

Teorema 7.32 *La hipótesis de Riemann para un cuerpo de funciones algebraicas K sobre un cuerpo de constantes exacto de q elementos equivale a que*

$$N_n = q^n + O(q^{n/2}),$$

donde $O(q^{n/2})$ representa una función de n que permanece acotada cuando se divide entre $q^{n/2}$.

Demostración: Si se cumple la hipótesis de Riemann tenemos que

$$|N_n - q^n| \leq 1 + |N_n - q^n - 1| \leq 1 + 2g\, q^{n/2} \leq (2g+1)q^{n/2},$$

luego se cumple la estimación del enunciado.

Recíprocamente, tenemos que existe una constante C tal que

$$|N_n - q^n| \leq Cq^{n/2},$$

luego

$$|\alpha_1^n + \cdots + \alpha_{2g}^n| = |N_n - q^n - 1| \leq 1 + Cq^{n/2}.$$

De (7.10) se sigue que, para x en un entorno de 0,

$$\log \frac{1}{L(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1^n + \cdots + \alpha_{2g}^n) \frac{x^n}{n}.$$

Por consiguiente,

$$\left|\log \frac{1}{L(x)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 + Cq^{n/2}) \frac{|x|^n}{n} \leq \log \frac{1}{1-|x|} + C \log \frac{1}{1-|q^{1/2}x|}.$$

De aquí se deducimos que la serie de potencias converge para todo x tal que $|x| < q^{-1/2}$, luego la función $\log L(x)^{-1}$ es holomorfa en el disco $|x| < q^{-1/2}$, luego los ceros de $L(x)$ han de cumplir $|x| \geq q^{-1/2}$, luego $|\alpha_i| \leq q^{1/2}$. Puesto que $\alpha_1 \cdots \alpha_{2g} = q^g$, en realidad ha de ser $|\alpha_i| = q^{1/2}$, como había que probar. ∎

Observemos ahora una consecuencia inmediata de la fórmula (7.8):

Teorema 7.33 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre un cuerpo finito y sea K_n su única extensión de constantes de grado n. Entonces K cumple la hipótesis de Riemann si y sólo si la cumple K_n.*

Vamos a probar la hipótesis de Riemann probando la equivalencia dada por el teorema 7.32. Partimos de un cuerpo de funciones algebraicas K definido sobre un cuerpo de constantes exacto k de cardinal q. Llamamos k_n a la extensión de grado n de k_1. El punto de partida será representar el cuerpo K como el cuerpo de funciones racionales de una curva proyectiva regular C definida sobre k.

Llamaremos $\phi : C \longrightarrow C$ a la aplicación de Frobenius de grado q, de modo que N_n es el cardinal de $C(k_n)$ o, equivalentemente, el número de puntos fijos de ϕ^n (por el teorema 5.64, pues ϕ^n es claramente la aplicación de Frobenius de grado q^n).

Notemos que ϕ puede verse también como la aplicación inducida por el automorfismo de Frobenius de la extensión $\overline{k}/k$ (dado por $\phi(\alpha) = \alpha^q$). No obstante, no hemos de confundir el $k(C)$-automorfismo $\phi : \overline{k}(C) \longrightarrow \overline{k}(C)$ que extiende a ϕ como elemento del grupo $G(\overline{k}/k)$, con el $\overline{k}$-monomorfismo $\bar{\phi} : \overline{k}(C) \longrightarrow \overline{k}(C)$ (de grado q) inducido por ϕ como aplicación regular entre curvas.

Fijemos un punto racional $P \in C(k)$ o, equivalentemente, un divisor primo $\mathfrak{p} \in k(C)$ de grado 1 (hemos probado que siempre existen divisores de grado 1, pero en realidad no necesitamos este hecho, pues si no existieran todo lo que vamos a concluir se cumplirá trivialmente.)

Para cada $r \geq 0$ definimos $M_r = m(P^r)$, es decir, el espacio vectorial de las funciones racionales en $\overline{k}(C)$ que tienen a lo sumo un polo en P de orden a lo sumo r. Vamos a demostrar algunas propiedades:

Teorema 7.34 *Con la notación precedente, se cumple:*

1. $\dim M_{r+1} \leq \dim M_r + 1$.
2. $\dim M_r \leq r + 1$.
3. $\dim M_r \geq m - g + 1$, *y si* $r > 2g - 2$ *se da la igualdad.*
4. *Si* $f \in M_r$, *entonces* $\phi \circ f = (f^{\phi^{-1}})^q$.
5. $\phi \circ M_r \subset M_{rq}$.
6. $\dim M_r^{p^e} = \dim M_r$, *donde* $p = \operatorname{car} k$ *y* $e \geq 0$.
7. $\dim \phi \circ M_r = \dim M_r$.

DEMOSTRACIÓN: 1) Si f y g tienen un polo de orden exactamente $m+1$ en el punto P (y ningún otro polo), entonces f/g tiene orden 0 en P, luego existe $\gamma \in \overline{k}$, $\gamma \neq 0$ tal que $v_P(f/g - \gamma) \geq 1$. Así, $f - \gamma g = g(f/g - \gamma) \in M_r$.

Esto implica que si $M_r \neq M_{r+1}$ y a una base de M_r le añadimos una función de $M_{r+1} \setminus M_r$, obtenemos una base de M_{r+1}.

2) se deduce de 1) por inducción. Notemos que M_0 está formado por las funciones constantes, luego tiene dimensión 1.

3) Es una consecuencia inmediata del teorema de Riemann-Roch.

4) Llamemos $\lambda = \phi^{-1} \in G(\overline{k}/k)$. Tomemos una función $f \in M_r$ y un punto $Q \in C(\overline{k})$, $Q \neq P$. Tomemos dos formas del mismo grado F y G que definan a f en un entorno de $\phi(Q)$. Entonces

$$(\phi \circ f)(Q) = \frac{F(\phi(Q))}{G(\phi(Q))} = \frac{F^\lambda(Q)^q}{G^\lambda(Q)^q} = f^\lambda(Q)^q.$$

5) Notemos que si $f \in M_r$ entonces $f^{\phi^{-1}} \in M_r$, pues ϕ fija a P. Por el apartado anterior $\phi \circ f \in M_{rq}$.

6) Aquí $M_r^{p^e}$ representa el espacio formado por las funciones f^{p^e} con $f \in M_r$. Es claro que elevando a p^e los elementos de una base de M_r obtenemos una base de $M_r^{p^e}$.

7) La aplicación $M_r \longrightarrow \phi \circ M_r$ dada por $f \mapsto \phi \circ f$ es obviamente lineal y suprayectiva. Basta ver que es inyectiva. Ahora bien, si $\phi \circ f = \phi \circ g$, entonces $(f^{\phi^{-1}})^q = (g^{\phi^{-1}})^q$, luego $f^{\phi^{-1}} = g^{\phi^{-1}}$, luego $f = g$. ∎

Si A es un subespacio de M_r y B un subespacio de M_s, llamaremos AB al subespacio de M_{r+s} generado por los productos fg con $f \in A$ y $g \in B$.

Teorema 7.35 *Si* $lp^e < q$, *entonces el epimorfismo natural*

$$M_l^{p^e} \otimes_{\overline{k}} (\phi \circ M_r) \longrightarrow M_l^{p^e}(\phi \circ M_r)$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Por la propiedad 1) del teorema anterior podemos encontrar una base $f_1, \dots, f_t$ de M_r tal que $v_P(f_i) < v_P(f_{i+1})$, para $i = 1, \dots, t-1$. Entonces $\phi \circ f_i$ es una base de $\phi \circ M_r$, y cada elemento del producto tensorial se expresa de forma única como

$$\sum_{i=1}^{t} g_i^{p^e} \otimes (\phi \circ f_i), \qquad g_i \in M_l.$$

Si este elemento está en el núcleo del epimorfismo, entonces

$$\sum_{i=1}^{t} g_i^{p^e} (\phi \circ f_i) = 0,$$

y basta probar que en tal caso todos los g_i son nulos. Si alguno no lo es, sea j el menor índice posible. Entonces

$$g_j^{p^e} (\phi \circ f_j) = -\sum_{i=j+1}^{t} g_i^{p^e} (\phi \circ f_i).$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta que $v_P(\phi \circ f) = q v_P(f^{\phi^{-1}}) = q v_P(f)$,

$$p^e v_P(g_j) + q v_P(f_j) \geq \min_{i>j} \{p^e v_P(g_i) + q v_P(f_i)\} \geq -p^e l + q v_P(f_{j+1}),$$

luego

$$p^e v_P(g_j) \geq -l p^e + q(v_P(f_{j+1}) - v_P(f_j)) \geq q - l p^e > 0.$$

Esto significa que g_j tiene un cero en P, pero está en M_l, luego no tiene polos fuera de P, luego no tiene ningún polo, luego $g_j = 0$, contradicción. ∎

Como consecuencia inmediata:

Teorema 7.36 *Si $l p^e < q$ entonces*

$$\dim M_l^{p^e} (\phi \circ M_r) = (\dim M_l)(\dim M_r).$$

Ahora podemos demostrar más o menos "la mitad" de la hipótesis de Riemann:

Teorema 7.37 *Supongamos que $(g+1)^4 < q$ y que q es una potencia par de la característica p. Entonces*

$$N_1 \leq q + 1 + (2g+1)\sqrt{q}.$$

DEMOSTRACIÓN: (Notemos que el teorema se cumpliría trivialmente si fuera $N_1 = 0$, aunque este caso no puede darse.) Tomemos l y e tales que $l p^e < q$. Mantenemos la notación empleada en la prueba de 7.35. Definimos

$$\delta : M_l^{p^e} (\phi \circ M_r) \longrightarrow M_l^{p^e} M_r$$

mediante

$$\delta \left(\sum_{i=1}^{t} g_i^{p^e} (\phi \circ f_i) \right) = \sum_{i=1}^{t} g_i^{p^e} f_i.$$

El teorema 7.35 garantiza que δ es una aplicación $\overline{k}$-lineal bien definida. Supongamos que l, $r \geq g$. Entonces, la dimensión del dominio es

$$(\dim M_l)(\dim M_r) \geq (l-g+1)(r-g+1)$$

y la de $\operatorname{Im}\delta \subset M_{lp^e+r}$ es a lo sumo $lp^e + r - g + 1$. Por consiguiente, el núcleo de δ tiene dimensión mayor o igual que

$$(l-g+1)(m-g+1) - (lp^e + r - g + 1).$$

Supongamos que esta cantidad es > 0, en cuyo caso δ tiene núcleo no trivial. Sea

$$f = \sum_{i=1}^{t} g_i^{p^e}(\phi \circ f_i)$$

un elemento no nulo del núcleo. Si $Q \in C(k)$, $Q \neq P$, entonces

$$f(Q) = \sum_{i=1}^{t} g_i(Q)^{p^e} f_i(\phi(Q)) = \sum_{i=1}^{t} g_i(Q)^{p^e} f_i(Q) = 0.$$

Así pues, f se anula en los puntos de $C(k)$ salvo quizá en P. Ahora bien, todo elemento de $\phi \circ M_r$ es una potencia q-ésima (por 7.34 4) y como $p^e < q$ concluimos que f es una potencia p^e-ésima. Esto significa que f tiene (contando multiplicidades) al menos $p^e(N_1 - 1)$ ceros, y como $\phi \circ M_r \subset M_{rq}$, el número de polos es a lo sumo $lp^e + rq$. Así pues, $p^e(N_1 - 1) \leq lp^e + rq$. De aquí llegamos a que

$$N_1 \leq 1 + l + rqp^{-e}. \tag{7.11}$$

Recordemos que esta desigualdad es válida bajo las hipótesis siguientes:

1. $lp^e < q$,
2. l, $r \geq g$,
3. $(l-g+1)(r-g+1) > lp^e + r - g + 1$.

Vamos a elegir l, r, e de modo que se cumplan estas hipótesis y (7.11) se convierta en la desigualdad del enunciado.

Estamos suponiendo que $q = p^{2b}$. Tomamos $e = b$ y $r = p^b + 2g$. Nos falta elegir l para que se cumpla 4). Notemos que con las elecciones precedentes 3) se convierte en

$$(l-g)(p^b + g + 1) > lp^b,$$

o equivalentemente,

$$l > \frac{g}{g+1}p^b + g.$$

Tomamos como l el menor natural mayor que el miembro derecho, con lo que se cumplen 2) y 3). Ahora usaremos la hipótesis $(g+1)^4 < q$ para probar que también se cumple 1).

En efecto, tenemos que $(q+1)^2 < p^b$, luego $gp^b + (g+1)^2 < (g+1)p^b$, luego

$$\frac{g}{g+1}p^b + g + 1 < p^b.$$

Por la elección de l tenemos que $l < p^b$, luego $lp^b < p^{2b} = q$. Finalmente sustituimos las definiciones de e, r y l en la desigualdad (7.11), recordando además que $l < p^b$:

$$N_1 < 1 + p^b + (p^b + 2g)p^b = q + 1 + (2g+1)\sqrt{q}.$$

■

Notemos que si K cumple las hipótesis del teorema anterior, también las cumple la extensión de constantes de grado n de K, por lo que en realidad tenemos que

$$N_n \leq q^n + O(q^{n/2}).$$

Consideremos ahora una extensión finita de Galois L de K cuyo cuerpo de constantes exacto siga siendo k. Podemos considerar $K = k(C)$, $L = k(C')$, donde C y C' son curvas proyectivas regulares definidas sobre k. La inclusión $K \subset L$ puede verse como una aplicación regular $C' \longrightarrow C$ definida sobre k. Sean $\overline{K} = \bar{k}K$, $\overline{L} = \bar{k}L$ y $G = G(L/K) \cong G(\overline{L}/\overline{K})$. Es claro que el automorfismo de Frobenius $\phi \in G(\overline{L}/L)$ se restringe al de $G(\overline{K}/K)$. Además, considerando $\phi \in G(\overline{L}/K)$ y $G \leq G(\overline{L}/K)$, tenemos que ϕ conmuta con G. Ello se debe a que $\overline{L} = L\overline{K}$, de modo que si $\sigma \in G$, $a \in L$, $b \in \overline{K}$, entonces

$$\sigma(\phi(ab)) = \sigma(a)\phi(b) = \phi(\sigma(ab)).$$

Llamemos T al conjunto de los primos de grado 1 de K (considerados como primos de $\overline{K}$). Así $N_1 = |T|$. Llamemos $\tilde{T}$ a los primos de $\overline{L}$ que dividen a los de T.

Si $\mathfrak{p} \in T$, por el teorema 5.27 sabemos que G actúa transitivamente sobre los primos de $\tilde{T}$ que dividen a $\mathfrak{p}$. Por otra parte ϕ fija a este conjunto, pues $\mathfrak{p}^\phi = \mathfrak{p}$. Así pues, para cada $\mathfrak{P} \in \tilde{T}$ ha de existir un $\sigma \in G$ tal que $\mathfrak{P}^\phi = \mathfrak{P}^\sigma$. Habrá tantas elecciones posibles para σ como automorfismos fijen a $\mathfrak{P}$, es decir, tantos como el índice de ramificación $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ (de acuerdo con 5.28, el número de automorfismos que fijan a $\mathfrak{P}$ es ef, pero como el cuerpo de constantes de $\overline{K}$ es $\bar{k}$, que es algebraicamente cerrado, se cumple que $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = 1$). En particular, si llamamos $\tilde{T}'$ al conjunto de los primos de $\tilde{T}$ no ramificados, tenemos una aplicación $\eta : \tilde{T}' \longrightarrow G$ dada por $\mathfrak{P} \mapsto \sigma$.

Llamaremos $\tilde{T}(\sigma)$ al conjunto de los primos $\mathfrak{P} \in \tilde{T}'$ tales que $\eta(\mathfrak{P}) = \sigma$ y $N_1(\sigma, \overline{L}/\overline{K})$ al cardinal de $\tilde{T}(\sigma)$.

Cada primo $\mathfrak{p} \in T$ no ramificado en L es divisible entre $|G|$ primos de $\tilde{T}'$, luego $|\tilde{T}| = |G|N_1 + O(1)$, donde el error $O(1)$ depende del número de primos ramificados en $\overline{L}/\overline{K}$, pero no de q (es decir, si sustituimos k por una extensión finita, la cota $O(1)$ sigue siendo la misma). Por otra parte,

$$\tilde{T}' = \bigcup_{\sigma \in G} \tilde{T}(\sigma),$$

y la unión es disjunta, luego

$$\sum_{\sigma\in G} N_1(\sigma, \overline{L}/\overline{K}) = |G|N_1 + O(1). \tag{7.12}$$

Representaremos por $\tilde{g}$ el género de $\overline{L}$. Ahora necesitamos una variante del teorema 7.37.

Teorema 7.38 *Con la notación precedente, supongamos que q es una potencia par de p, que $(\tilde{g}+1)^4 < q$ y sea $\sigma \in G$. Entonces*

$$N_1(\sigma, \overline{L}/\overline{K}) \le q + 1 + (2\tilde{g}+1)\sqrt{q}.$$

Demostración: Podemos suponer que existe un punto $P \in C'(k)$ y definimos $M_r = m(P)$. Sea

$$\delta_\sigma : M_l^{p^e}(\phi \circ M_r) \longrightarrow M_r^{p^e}(\sigma \circ M_r)$$

la aplicación dada por

$$\delta_\sigma\left(\sum_{i=1}^{t} g_i^{p^e}(\phi \circ f_i)\right) = \sum_{i=1}^{t} g_i^{p^e}(\sigma \circ f_i).$$

Aquí usamos la notación de la prueba del teorema 7.35, el cual justifica que δ_σ está bien definida (suponiendo $lp^e < q$).

Observemos que si $f \in M_r$, entonces $\sigma \circ f \in m((P^{\sigma^{-1}})^r)$, luego la imagen de δ_σ está contenida en $m(P^{lp^e}(P^{\sigma^{-1}})^r)$ y la dimensión de este espacio es a lo sumo $lp^e + r - g + 1$.

Bajo las mismas hipótesis que en el teorema 7.37 podemos obtener un elemento no nulo f del núcleo de δ_σ, sólo que ahora se anula únicamente sobre los puntos de $\tilde{T}(\sigma)$ (es decir, los puntos $Q \in C'(k)$ tales que $\phi(Q) = \sigma(Q)$) distintos de P. Esto nos lleva a la misma conclusión pero cambiando N_1 por $N_1(\sigma, \overline{L}/\overline{K})$ y g por $\tilde{g}$. ∎

Ahora veremos el argumento que nos permite invertir la desigualdad:

Teorema 7.39 *Bajo las hipótesis del teorema anterior, para cada $\sigma \in G$, se cumple*

$$q + 1 + |G|(N_1 - q - 1) + O(\sqrt{q}) \le N_1(\sigma, \overline{L}/\overline{K}).$$

Demostración: Por el teorema anterior

$$0 \le q + 1 + (2\tilde{g}+1)\sqrt{q} - N_1(\sigma, \overline{L}/\overline{K}).$$

Sumamos sobre σ y usamos (7.12):

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{\sigma\in G}(q + 1 + (2\tilde{g}+1)\sqrt{q} - N_1(\sigma, \overline{L}/\overline{K})) \\ &\le |G|(q + 1 + (2\tilde{g}+1)\sqrt{q}) - |G|N_1 + O(1). \end{aligned}$$

Como cada sumando es ≥ 0, ha de ser

$$q+1+(2\tilde{g}+1)\sqrt{q}-N_1(\sigma,\overline{L}/\overline{K})\leq |G|(q+1+(2\tilde{g}+1)\sqrt{q})-|G|N_1+O(1),$$

de donde

$$q+1+|G|(N_1-q-1)-(|G|-1)(2\tilde{g}+1)\sqrt{q}+O(1)\leq N_1(\sigma,\overline{L}/\overline{K}).$$

De aquí obtenemos la desigualdad del enunciado. ∎

Ahora ya podemos probar la hipótesis de Riemann bajo ciertas condiciones:

Teorema 7.40 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas de género g sobre un cuerpo de constantes exacto k de q elementos. Supongamos que q es una potencia par de la característica p y que $(g+1)^4<q$. Supongamos así mismo que existe $x\in K$ tal que $K/k(x)$ es separable y la clausura normal L de $k(x)$ sobre K tiene a k como cuerpo de constantes exacto. Entonces K cumple la hipótesis de Riemann.*

Demostración: Por el teorema 7.37 (ver la observación posterior) tenemos que $N_1\leq q+O(\sqrt{q})$. Sea $G=G(\overline{L}/\overline{k}(x))$ y $H=G(\overline{L}/\overline{K})$. Notemos que $k(x)$ tiene exactamente $q+1$ divisores primos de grado 1. Para cada $\sigma\in G$, el teorema anterior aplicado a la extensión $\overline{L}/\overline{k}(x)$ nos da

$$q+O(\sqrt{q})\leq N_1(\sigma,\overline{L}/\overline{k}(x)).$$

Enseguida veremos que si $\tau\in H$ entonces $N_1(\tau,\overline{L}/\overline{k}(x))=N_1(\tau,\overline{L}/\overline{K})$. Aceptándolo de momento, sumamos en $\tau\in H$ y, usando (7.12), obtenemos

$$|H|q+O(\sqrt{q})\leq\sum_{\tau\in H}N_1(\tau,\overline{L}/\overline{K})=|H|N_1+O(1),$$

de donde $q+O(\sqrt{q})\leq N_1$. Ahora observamos que si K cumple las hipótesis del teorema, lo mismo vale para cualquier extensión finita de constantes de K y la cota del error $O(\sqrt{q})$ no depende de q, luego en realidad hemos probado que

$$q^n+O(q^{n/2})\leq N_n,$$

y uniendo las dos desigualdades tenemos la relación $N_n=q^n+O(q^{n/2})$, que, según 7.32, equivale a la hipótesis de Riemann.

Falta probar que, en efecto, si $\tau\in H$ entonces $N_1(\tau,\overline{L}/\overline{k}(x))=N_1(\tau,\overline{L}/\overline{K})$.

Sea $\mathfrak{P}$ un divisor primo de $\overline{L}$ que divida a un primo de grado 1 $\mathfrak{p}$ de $k(x)$ y tal que $\mathfrak{P}^\phi=\mathfrak{P}^\tau$. Basta probar que $\mathfrak{P}$ divide a un primo de grado 1 de K. Sea $\mathfrak{p}'$ el primo de $\overline{K}$ divisible entre $\mathfrak{P}$. Claramente $\mathfrak{p}'^\phi=\mathfrak{p}'^\tau=\mathfrak{p}'$, pero esto significa que el punto de la curva C asociado a $\mathfrak{p}'$ está en $C(k)$ (porque lo fija la aplicación de Frobenius). Así pues, $\mathfrak{p}'$ es un divisor primo de grado 1 de K.

∎

Para terminar la demostración sólo hemos de ver que todo cuerpo K tiene una extensión finita de constantes que satisface las hipótesis del teorema anterior.

Recordemos que, para cada $n \geq 1$, hemos llamado k_n a la extensión de grado n de k. Tomemos n suficientemente grande para que $(g+1)^4 < q^n$. Podemos elegir n par y así q^n es una potencia par de p. Existe $x \in k_n K$ tal que $k_n K/k_n(x)$ es separable. Sea L la clausura normal de $k_n(x)$ sobre K y sea k_m el cuerpo de constantes exacto de L. Entonces $n \mid m$, luego q^m sigue siendo una potencia par de p y es claro que L sigue siendo la clausura normal de $k_m(x)$ sobre $k_m K$. Así pues, $k_m K$ cumple el teorema anterior, y esto termina la prueba.

Capítulo VIII

Integrales abelianas

A finales del siglo XVII, Jakob Bernoulli introdujo el término "lemniscata" para referirse a las curvas con forma de 8 (el lemnisco era la cinta que adornaba las coronas con que se distinguía a los atletas en la antigua Grecia). Entre ellas se encuentra la que ahora se conoce como lemniscata de Bernoulli.

Del mismo modo que una elipse puede definirse como el conjunto de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos focos es constante, podemos considerar el conjunto de los puntos del plano tales que el producto de sus distancias a dos focos sea constante. Eligiendo adecuadamente el sistema de referencia, no perdemos generalidad si suponemos que los focos tienen coordenadas $(\pm c, 0)$. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de módulo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, su distancia a cada foco es

$$r_1^2 = (x + c)^2 + y^2 = \rho^2 + 2cx + c^2,$$
$$r_2^2 = (x - c)^2 + y^2 = \rho^2 - 2cx + c^2,$$

luego el punto está en en el conjunto si cumple

$$r_1^2 r_2^2 = (\rho^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = \rho^4 + 2c^2\rho^2 - 4c^2x^2 + c^4 = d^4,$$

para una constante $d > 0$. Si $d < c$, estos puntos forman una curva con dos componentes conexas, cada una de las cuales rodea a uno de los focos. Si $d > c$ obtenemos una curva conexa que rodea a ambos focos. En cambio, si $d = c$ obtenemos una figura en forma de 8, es decir, una lemniscata, que es precisamente la *lemniscata de Bernoulli*. En este caso la ecuación se reduce a

$$\rho^4 + 2c^2\rho^2 - 4c^2x^2 = 0,$$

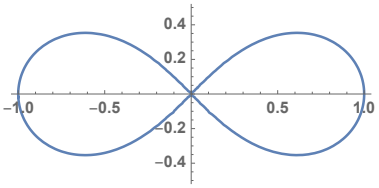
o, equivalentemente,

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(y^2 - x^2).$$

El valor de c es irrelevante, en el sentido de que, aplicando una homotecia, podemos hacer que $c = 1/\sqrt{2}$, con lo que $2c^2 = 1$, con lo que la ecuación se reduce a

$$\rho^4 + \rho^2 - 2x^2 = 0, \qquad \text{o} \qquad (x^2 + y^2)^2 = y^2 - x^2.$$

Así pues, salvo un cambio de escala, toda lemniscata de Bernoulli tiene el aspecto que muestra la figura siguiente:



Es fácil ver que una parametrización de la lemniscata es:

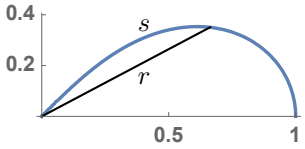
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\rho^2+\rho^4}, \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\rho^2-\rho^4}.$$

Un simple cálculo nos da que el elemento de longitud es

$$ds = \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}.$$

Así pues, la longitud del arco de lemniscata comprendido entre el origen y un punto situado a distancia $0 < r < 1$ (unidos por el camino más corto) es

$$s(r) = \int_0^r \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}.$$



En 1718, el conde Fagnano descubrió una curiosa propiedad sobre el arco de una lemniscata. Probablemente, trató de explotar la analogía entre esta integral y la bien conocida

$$\operatorname{arcsen} r = \int_0^r \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Esta integral se racionaliza con el cambio de variable

$$\rho = \frac{2\tau}{1+\tau^2},$$

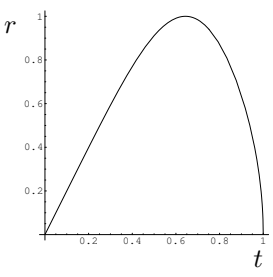
por lo que parece razonable aplicar a nuestra integral el cambio

$$\rho^2 = \frac{2\tau^2}{1+\tau^4}.$$

Un simple cálculo nos da que

$$s(r) = \int_0^r \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} = \sqrt{2}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^4}}, \qquad r^2 = \frac{2t^2}{1+t^4}.$$

En lo que se refiere al cálculo de la integral no hemos ganado nada, pero Fagnano se dio cuenta de



que si ahora aplicamos el mismo cambio pero con un signo negativo en el denominador, obtenemos

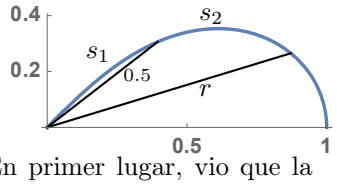
$$s(r) = \int_0^r \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} = 2\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^4}} = 2s(t),$$

donde

$$r^2 = \frac{2\frac{2t^2}{1-t^4}}{1+\left(\frac{2t^2}{1-t^4}\right)^2} = \frac{4t^2(1-t^4)}{(1+t^4)^2}.$$

Esto tiene una interpretación geométrica: si señalamos un punto de la lemniscata a una distancia $0 < t < 1$ del origen, entonces el punto situado a la distancia r dada por la fórmula anterior determina un arco de doble longitud. (En realidad es necesario suponer que t no exceda del punto donde $r(t)$ deja de ser inyectiva, lo cual equivale a que al duplicar el arco no sobrepasemos el cuadrante). La sencilla relación entre r y t permite, por ejemplo, duplicar un arco de lemniscata con regla y compás. También podemos expresar t en función de r, lo que nos da un método para bisecar un arco de lemniscata.

Así, en la figura, el arco s_1, correspondiente a $t = 0.5$, tiene la misma longitud que s_2, cuyo extremo derecho corresponde a $r = 4\sqrt{15}/17$, dado por la relación precedente.



En 1751, Euler llegó más lejos que Fagnano. En primer lugar, vio que la analogía con el arco seno podía aprovecharse más aún. La relación

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\, \cos y + \cos x\, \operatorname{sen} y$$

puede expresarse en la forma

$$u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2} = \operatorname{sen}(x+y), \qquad u = \operatorname{sen} x, \quad v = \operatorname{sen} y,$$

o también,

$$\int_0^u \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} + \int_0^v \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \int_0^r \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}, \qquad r = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}.$$

Aquí hay que entender que u y v son números positivos suficientemente pequeños. Euler consiguió probar una fórmula análoga para la lemniscata, a saber:

$$\int_0^u \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} + \int_0^v \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} = \int_0^r \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}, \quad r = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}.$$

Esta fórmula se particulariza a la de Fagnano cuando $u = v$, y permite sumar fácilmente dos arcos de lemniscata suficientemente pequeños como para que la suma no exceda un cuadrante.

Más aún, Euler generalizó su resultado probando que sigue siendo cierto si cambiamos el polinomio $P(u) = 1 - u^4$ por $P(u) = 1 + au^2 - u^4$, para cualquier valor de a.

Los resultados de Euler fueron notablemente generalizados por Abel, quien estudió el comportamiento de las integrales de la forma

$$\int R(x, y)\, dx,$$

donde $R(X, Y)$ es una función racional e $y(x)$ es una función algebraica determinada por una relación polinómica $P(x, y) = 0$. Estas integrales se conocen como integrales abelianas. En términos más modernos, podemos definir las integrales abelianas como las integrales curvilíneas de formas diferenciales meromorfas sobre superficies de Riemann. Por ejemplo, para interpretar como integral abeliana la integral que da la longitud de arco de la lemniscata consideramos la curva proyectiva S dada por $Y^2 = 1 - X^4$ y, en ella, la forma $\omega = dx/y$. Así,

$$s(r) = \int_\sigma \omega, \qquad \text{donde } \sigma(\rho) = (\rho, \sqrt{1 - \rho^4}).$$

Dedicamos este capítulo a estudiar las integrales abelianas. Ello nos llevará a unos resultados generales de los cuales no sólo se deducen los hechos que acabamos de comentar, sino también resultados de gran interés teórico. Por ejemplo, vamos a determinar la estructura del grupo de clases de grado 0 de una curva proyectiva.

8.1 Homología y cohomología

Vamos a recordar y generalizar al caso complejo algunos resultados sobre topología algebraica y geometría diferencial que vamos a necesitar. Antes de entrar en materia, recordemos el comportamiento de las integrales curvilíneas sobre un abierto $U \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, el teorema de Cauchy [VC 1.34] afirma que la integral de f a lo largo de un arco cerrado es nula. Ello se debe esencialmente a que los arcos cerrados son homotópicos a un punto y las integrales no se alteran al transformar homotópicamente los arcos. Como consecuencia, fijado $P \in U$, la integral

$$\int_P^z f(\zeta)\, d\zeta \tag{8.1}$$

no depende del arco sobre el que se calcula y determina una función holomorfa en U, una primitiva de f, de hecho (véase la prueba de [VC 3.8]).

Si f es una función meromorfa, entonces ya no podemos aplicar el teorema de Cauchy, sino que en su lugar tenemos el teorema de los residuos [VC 3.14], que dice que la integral a lo largo de un arco cerrado será una combinación lineal entera de los residuos de f multiplicados por $2\pi i$. Pese a ello podemos hablar aún de la integral (8.1), si bien ahora se trata de una integral multiforme meromorfa,

en el sentido de que en un entorno (simplemente conexo) de cada punto z_0 que no sea un polo de f podemos determinar ramas uniformes meromorfas de la integral (la rama dependerá del camino elegido para unir P con z_0). Un caso típico es la integral

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta},$$

que determina la función logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Si pasamos a considerar integrales de formas diferenciales en una superficie de Riemann, en primer lugar nos encontramos con que, salvo en el caso trivial de la esfera, ya no estamos en un espacio simplemente conexo, por lo que el teorema de Cauchy no es válido ni siquiera para integrales de formas holomorfas. Por ejemplo, si integramos una forma holomorfa en un toro a lo largo de un arco que una dos puntos, el resultado dependerá del número de vueltas que demos al toro. De hecho hay dos clases de vueltas distintas: las que damos transversalmente, alrededor del "tubo" y las que damos longitudinalmente, a lo largo del "tubo". Los valores que toma la integral sobre dos arcos cerrados que den una única vuelta transversal y longitudinal respectivamente se llaman periodos de la integral, y de nuevo sucede que la integral entre dos puntos está bien definida módulo estos dos periodos.

Si el integrando es una forma meromorfa, además de los periodos en el sentido anterior tenemos también periodos polares, como en el caso plano (salvo que la forma tenga residuos nulos, es decir, salvo que sea de segunda clase).

Homología y cohomología compleja Vamos a precisar las ideas precedentes, para lo cual consideramos en principio una variedad diferencial S de dimensión $2n$, en las mismas condiciones que en la sección A.5 de [VC]. De acuerdo con lo expuesto allí, para cada $P \in S$, podemos considerar el espacio tangente real $T_P(S)$, que es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $2n$, y también el espacio $T_P(S,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_P(S)$, que es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión $2n$.

Consideramos ahora [GD 3.24] los espacios $\Lambda^p(S) = \Lambda^p(S,\mathbb{R})$ de las p-formas diferenciales en S. Definimos

$$\Lambda^p(S,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^p(S,\mathbb{R}) = \{\omega_1 + i\omega_2 \mid \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^p(S,\mathbb{R})\}.$$

En particular, $\Lambda^0(S,\mathbb{C})$ es el espacio de todas las funciones diferenciables $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$. Similarmente, cada $\omega \in \Lambda^1(S,\mathbb{C})$ puede verse como una función que a cada $P \in S$ le asigna una 1-forma $\omega_P \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_P(S)^* \cong T_P(S,\mathbb{C})^*$.

Nota Nos va a bastar con este hecho, pero, en general, es claro que, si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, todo tensor covariante $\alpha \in \mathcal{T}^0_s(\mathbb{C} \otimes_R V)$ [GD A.1], es decir, toda aplicación $\mathbb{C}$-multilineal

$$\alpha : (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V) \times \cdots \times (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V) \longrightarrow \mathbb{C}$$

está determinada por su acción sobre los elementos de B^s, donde B es una base de V, por lo que cada $\alpha \in \mathcal{T}^0_s(V)$ tiene una extensión única $\bar{\alpha} \in \mathcal{T}^0_s(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V)$, lo que nos da un isomorfismo natural $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{T}^0_s(V) \cong \mathcal{T}^0_s(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V)$ dado por $z \otimes \alpha \mapsto z\bar{\alpha}$.

Este isomorfismo se restringe a un isomorfismo $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\Lambda^s(V)\cong\Lambda^s(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V)$. Si aplicamos esto al caso en que $V=T_P(S)$, vemos que cada $\omega\in\Lambda^p(S,\mathbb{C})$ puede identificarse con una aplicación que a cada $P\in S$ le asigna una forma constante $\omega_P\in\Lambda^p(T_P(S,\mathbb{C}))$. ∎

Podemos definir de forma natural el producto de una función $f\in\Lambda^0(S,\mathbb{C})$ por una forma $\omega\in\Lambda^p(S,\mathbb{C})$.

Definimos $d:\Lambda^p(S,\mathbb{C})\longrightarrow\Lambda^{p+1}(S,\mathbb{C})$ mediante $d(\omega_1+i\omega_2)=d\omega_1+id\omega_2$.

Notemos que si $f\in\Lambda^0(S,\mathbb{C})$, la diferencial que acabamos de definir es la misma que ya teníamos definida en la sección A.5 de [VC]. Allí se muestra que si S es el dominio de una carta de coordenadas $z_1,\ldots,z_n$, entonces, para cada punto $P\in S$, las diferenciales $dz_i|_P$, $d\bar{z}_i|_P$ forman una base de $T_P(S,\mathbb{C})^*$, concretamente, la base dual de los vectores tangentes $\partial_{z_i}|_P$, $\partial_{\bar{z}_i}|_P$. En particular, si $f\in\Lambda^0(S,\mathbb{C})$, se cumple que

$$df=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial z_i}\,dz_i+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_i}\,d\bar{z}_i.$$

El operador d cumple trivialmente $d\circ d=0$, luego define grupos de cohomología $H^p(S,\mathbb{C})$ análogamente al caso real [GD 6.11], es decir, como el cociente del espacio de las p-formas cerradas (con diferencial nula) sobre el subespacio de las p-formas exactas. Es claro que la asignación $[\omega_1]+i[\omega_2]\mapsto[\omega_1+i\omega_2]$ determina un isomorfismo natural

$$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}H^p(S,\mathbb{R})\cong H^p(S,\mathbb{C}).$$

Por otra parte, si fijamos un anillo conmutativo y unitario $\mathbb{A}$ (que en la práctica será siempre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), podemos considerar [TA 9.6] los $\mathbb{A}$-módulos $C_p(S,\mathbb{A})$ de cadenas de símplices singulares diferenciables (para la diferenciabilidad véase el final de la sección 9.2 de [TA]), con los que podemos definir los grupos de homología singular $H_p(S,\mathbb{A})$. Según [TA 12.21], existe un isomorfismo natural

$$H_p(S,\mathbb{C})\cong\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}H_p(S,\mathbb{R}).$$

Definimos la integral de una forma $\omega=\omega_1+i\omega_2\in\Lambda^p(S,\mathbb{C})$ sobre un símplice $\sigma\in C_p(S,\mathbb{C})$ mediante

$$\int_\sigma\omega=\int_\sigma\omega_1+i\int_\sigma\omega_2.$$

(La integral de una forma diferencial real sobre un símplice está definida antes de [TA 13.12].) Por linealidad, la integral se extiende a una forma bilineal

$$\int:C_p(S,\mathbb{C})\times\Lambda^p(S,\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{C}.$$

La versión compleja del teorema de Stokes [TA 13.13] se sigue inmediatamente de la versión real, es decir, si $c\in C_{p+1}(S,\mathbb{C})$ y $\omega\in\Lambda^p(S,\mathbb{C})$, entonces

$$\int_c d\omega=\int_{\partial c}\omega.$$

Esto nos permite definir una forma bilineal

$$\int^* : H_p(S,\mathbb{C}) \times H^p(S,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Si $\phi : S \longrightarrow T$ es una aplicación diferenciable, tenemos definidas las retracciones $\phi^* : \Lambda^p(T,\mathbb{R}) \longrightarrow \Lambda^p(S,\mathbb{R})$ (véase el final de la sección 6.2 de GD]), que nos permiten definir aplicaciones lineales $\phi^* : \Lambda^p(T,\mathbb{C}) \longrightarrow \Lambda^p(S,\mathbb{C})$ mediante

$$\phi^*(\omega_1 + i\omega_2) = \phi^*(\omega_1) + i\phi^*(\omega_2).$$

El teorema [GD 3.48] se traduce inmediatamente a su análogo complejo, es decir, a que $\phi^* \circ d = d \circ \phi^*$, por lo que ϕ^* induce una aplicación lineal $\phi^* : H^p(T,\mathbb{C}) \longrightarrow H^p(S,\mathbb{C})$.

Por otra parte, ϕ induce aplicaciones lineales $\phi^\sharp : C_1(S,\mathbb{C}) \longrightarrow C_1(T,\mathbb{C})$ (véase [TA 9.6]), que a su vez inducen aplicaciones $\phi_* : H_1(S,\mathbb{C}) \longrightarrow H_1(T,\mathbb{C})$ (véase la sección 9.3 de [TA]).

El teorema [TA 13.12] se generaliza trivialmente al caso complejo, de modo que, para todo $c \in C_p(S,\mathbb{C})$ y toda $\omega \in \Lambda^p(S,\mathbb{C})$, se cumple

$$\int_{\phi^\sharp(c)} \omega = \int_c \phi^*(\omega)$$

y, a su vez,

$$\int^*_{\phi_*([c])} [\omega] = \int^*_{[c]} \phi^*([\omega]).$$

También es fácil probar las relaciones

$$\phi^*(f\omega) = (\phi \circ f)\phi^*(\omega), \qquad \phi^*(\omega)_P(v) = \omega_{\phi(P)}(d_P\phi(v)), \quad \omega \in \Lambda^1(S,\mathbb{C}).$$

Formas holomorfas A partir de este momento suponemos que S es una variedad analítica compacta de dimensión 1 (con lo que en particular sigue siendo una variedad diferencial de dimensión 2, como hasta ahora con $n = 1$). En tal caso, según [VC A.38], podemos descomponer $T_P(S,\mathbb{C})$ como suma directa de un espacio tangente holomorfo y otro antiholomorfo, ambos de dimensión compleja 1:

$$T_P(S,\mathbb{C}) = T^h_P(S) \oplus T^a_P(S).$$

Además, según [VC A.39], podemos identificar $T_p(S)$ con $T^h_P(S)$ de forma natural.

Si $\omega \in \Lambda^1(S,\mathbb{C})$ y $U \subset S$ es el dominio de una carta z, tenemos que $\omega|_U = f\,dz + g\,d\bar{z}$, para ciertas funciones f, $g \in \Lambda^0(U)$ unívocamente determinadas.

Llamaremos *formas diferenciales holomorfas* en S a las que cumplan que $g = 0$ y $f \in \mathcal{H}(U)$ para todo abierto coordenado U, es decir, a las que cumplen $\omega|_U = f\,dz$, para cierta función f holomorfa en U. Es fácil ver que, para que esto suceda, basta con que se cumpla para un atlas analítico de S. Llamaremos $\Lambda^1(S)$ al espacio de todas las formas diferenciales holomorfas en S.

Así, si $\omega \in \Lambda^1(S)$, para cada $P \in S$ se cumple que ω_P se anula sobre los vectores tangentes antiholomorfos (pues una base de $T^a_P(S)$ es $\partial_{\bar{z}}$, donde z es una carta alrededor de P).

Se comprueba fácilmente que si $\phi : S \longrightarrow T$ es una aplicación holomorfa entre variedades analíticas, entonces ϕ^* se restringe a una aplicación lineal

$$\phi^* : \Lambda^1(T) \longrightarrow \Lambda^1(S),$$

con lo que Λ^1 es un funtor contravariante.

Observemos ahora que si $\sigma : [0,1] \longrightarrow U \subset \mathbb{C}$ es un 1-símplice en un abierto de $\mathbb{C}$, entonces la integral $\int_\sigma f\,dz$ coincide con la integral curvilínea usual en variable compleja.

En efecto, teniendo en cuenta que $\sigma = \sigma^\sharp(I)$, donde I es la identidad en $[0,1]$ y el análogo complejo a [TA 13.12], tenemos que

$$\int_\sigma f\,dz = \int_I \sigma^*(f\,dz) = \int_I (\sigma \circ f)\,d(\sigma \circ z) = \int_I (\sigma \circ f)\,d\sigma,$$

donde hemos usado que z no es sino la identidad en U. Si t es la identidad en $[0,1]$ (vista ahora como carta de $[0,1]$), entonces $d\sigma = d\sigma(\partial_t)\,dt = \sigma'(t)\,dt$, luego, por la definición de integral sobre un 1-símplice:

$$\int_\sigma f\,dz = \int_0^1 f(\sigma(t))\,\sigma'(t)\,dt.$$

Todas las formas holomorfas son cerradas. En efecto, si $\omega \in \Lambda^1(S)$ y $P \in S$, tomamos una carta z en un entorno U de P, de modo que

$$\omega|_U = f\,dz = \operatorname{Re} f\,dx - \operatorname{Im} f\,dy + i(\operatorname{Im} f\,dx + \operatorname{Re} f\,dy),$$

para una cierta función homomorfa f. Teniendo en cuenta que la diferencial es un operador local, vemos que

$$d\omega|_U = \left(-\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} - \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}\right) dx \wedge dy + i\left(-\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} + \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}\right) dx \wedge dy.$$

Como f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, concluimos que $d\omega = 0$.

Por otra parte, si una forma holomorfa ω cumple $\omega = dg$, para cierta función $g \in \Lambda^0(S, \mathbb{C})$, de hecho ha de ser $g \in \mathcal{H}(S)$.

En efecto, en un entorno coordenado U de un punto arbitrario tenemos que

$$\omega|_U = dg|_U = \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial y}\,dy + i\frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial x}\,dx + i\frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial y}\,dy$$

y también

$$\omega|_U = f\,dz = \operatorname{Re} f\,dx - \operatorname{Im} f\,dy + i(\operatorname{Im} f\,dx + \operatorname{Re} f\,dy),$$

para una cierta función holomorfa f. Comparando ambas expresiones concluimos que g cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, luego es una función holomorfa.

Esto implica que si definimos $\mathcal{H}^1(S)$ como el cociente del espacio $\Lambda^1(S)$ de las formas holomorfas en S sobre el subespacio de las diferenciales de funciones holomorfas, la aplicación $[\omega] \mapsto [\omega]$ es un monomorfismo de $\mathcal{H}^1(S)$ en $H^1(S, \mathbb{C})$. En general no es un isomorfismo.

También es claro que si $\phi : S \longrightarrow T$ es una aplicación holomorfa entre variedades analíticas, entonces $\phi^* : \Lambda^1(T) \longrightarrow \Lambda^1(S)$ induce una aplicación lineal $\phi^* : \mathcal{H}^1(T) \longrightarrow \mathcal{H}^1(S)$, con lo que $\mathcal{H}^1$ es también un funtor contravariante.

Notemos que estos hechos generalizan el teorema de Cauchy sobre integrales curvilíneas. En efecto, si c es una 2-cadena en una superficie analítica S y ω es una forma diferencial holomorfa en S, entonces

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega = \int_c 0 = 0.$$

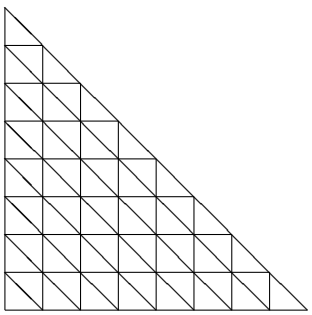
El teorema de Cauchy clásico se sigue de aquí porque si S es simplemente conexa entonces $H_1(S) = 0$, es decir, todo ciclo es una frontera.

Supongamos ahora que S puede cubrirse por una carta z y que $\omega = f\,dz$ es una forma diferencial meromorfa en S (que, por consiguiente, es una forma holomorfa en S menos un número finito de puntos). Sea $\tilde{f} = z^{-1} \circ f$ la lectura de f en la carta. Es claro entonces que $\omega = z^*(\tilde{f}\,dz)$, donde en el segundo miembro z es la identidad en $\mathbb{C}$. Para cada $x \in S$, el desarrollo de f en potencias de $z - z(x)$ es el mismo que el de $\tilde{f}$, luego, en particular, $\operatorname{Res}_x \omega = \operatorname{Res}_{z(x)} \tilde{f}$. Esto nos permite traducir el teorema de los residuos a integrales en variedades:

Supongamos que $\sigma : \Delta_2 \longrightarrow S$ es un 2-símplice positivamente orientado que se extienda a un difeomorfismo y cuya frontera no contenga polos de ω. Entonces

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\partial\sigma} z^\sharp(\tilde{f}\,dz) = \int_{z_\sharp(\partial\sigma)} \tilde{f}\,dz = \int_{\partial(\sigma\circ z)} \tilde{f}\,dz = 2\pi i \sum_x \operatorname{Res}_x \omega,$$

donde x recorre los polos de ω contenidos en la imagen de σ (que se corresponden con los polos de $\tilde{f}$ contenidos en la imagen de $\sigma \circ z$).



Un poco más laxamente: si $\sigma : \Delta_2 \longrightarrow S$ es un 2-símplice arbitrario y ω es una forma meromorfa que no tenga polos en la imagen de c, por el lema del cubrimiento de Lebesgue [TA 1.1], podemos subdividir Δ_2 en triángulos suficientemente pequeños como para que sus imágenes por σ estén contenidas en dominios de cartas de S. Además podemos retocar levemente la subdivisión para que ningún polo de ω se encuentre sobre los lados de los triángulos obtenidos. Entonces la integral de ω sobre $\partial\sigma$ es igual a la suma de las integrales de ω sobre las fronteras de todos los triángulos pequeños, pues las integrales sobre los lados interiores se cancelan dos a dos y las de los lados exteriores se suman hasta formar $\partial\sigma$.

Al igual que hemos visto antes (aunque sin suponer que los triángulos sean biyectivos) la integral de ω sobre cada uno de estos triángulos equivale a la integral de otra función $\tilde{f}$ sobre un ciclo en un abierto de $\mathbb{C}$, cuyos residuos se corresponden con (algunos de) los de ω. El teorema de los residuos nos da que la integral

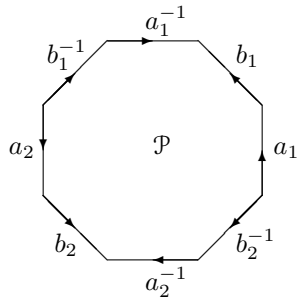
$$\int_{\partial\sigma} \omega$$

es combinación lineal entera de los *periodos polares* $2\pi i \operatorname{Res}_P \omega$ de ω. Por linealidad lo mismo vale para integrales sobre fronteras arbitrarias.

Superficies de Riemann Supongamos ahora que S es una superficie de Riemann compacta (en tendiendo que las superficies de Riemann son conexas por defiinición). En virtud del teorema de clasificación de las superficies compactas, toda superficie de Riemann, como espacio topológico, puede obtenerse como cociente de un polígono regular $\mathcal{P}$ de $4g$ lados identificándolos dos a dos en la forma

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}.$$

(Véase la discusión previa a [VC A.25].) Sea $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow S$ la aplicación continua y suprayectiva (inyectiva en el interior de $\mathcal{P}$) que identifica los lados de $\mathcal{P}$ en la forma indicada. Por ejemplo, la figura muestra el polígono cuyo cociente es la superficie de género 2:



Cada arco a_k (recorrido en el sentido de la flecha) se corresponde en S con el mismo arco que a_k^{-1}, e igualmente con los b_k. En general, todos los vértices de $\mathcal{P}$ se identifican con un mismo punto de S, y así, en S tenemos $2g$ arcos cerrados $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$.

En la prueba del teorema de clasificación se ve que el polígono $\mathcal{P}$ se construye a partir de una triangulación de S. Pero en la prueba de la fórmula de Hurwitz [VC A.25] (véase la nota posterior) se ve que si partimos de una triangulación diferenciable de una esfera podemos construir una triangulación diferenciable de cualquier superficie de Riemann, es decir, una triangulación formada por triángulos $\sigma : \Delta_2 \longrightarrow S$ que se extienden a difeomorfismos de un entorno simplemente conexo de Δ_2 en un entorno de la imagen.

Añadiendo este hecho a la prueba del teorema de clasificación se ve que la aplicación $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow S$ se puede tomar diferenciable a trozos, es decir, que se puede triangular $\mathcal{P}$ de modo que ϕ coincida con un difeomorfismo en cada triángulo.

Si además elegimos los triángulos de $\mathcal{P}$ de forma que conserven la orientación, tenemos que los lados interiores (compartidos por dos triángulos contiguos) se recorren necesariamente en sentidos opuestos, por lo que constituyen 1-cadenas homólogas en $\mathcal{P}$. Esto nos permite ver a la triangulación de $\mathcal{P}$ como una cadena $\zeta_{\mathcal{P}} \in C_2(\mathcal{P}, \mathbb{Z})$ cuya frontera es homóloga al ciclo

$$a_1 + b_1 - a_1^{-1} - b_1^{-1} + a_2 + \cdots$$

El hecho de que ϕ sea diferenciable a trozos hace que $\zeta_S = \phi^\sharp(\zeta_{\mathcal{P}})$ (que no es sino la triangulación de S) sea también una cadena en S, cuya frontera es ahora

$$a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \cdots = 0.$$

Se demuestra que las clases de los ciclos $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ forman una base de $H_1(S, \mathbb{Z})$. En lo sucesivo, salvo que indiquemos lo contrario, cuando hablemos de una base de $H_1(S)$ se entenderá que es una base obtenida de esta forma a partir de un polígono.

La cohomología de las formas holomorfas es especialmente simple: observemos que las únicas funciones holomorfas en S son las constantes, luego no existen formas diferenciales holomorfas exactas (salvo la forma nula). Esto significa que $\mathcal{H}^1(S) = \Lambda^1(S)$ (sin ninguna identificación).

8.2 Integración de formas meromorfas

En 7.24 hemos distinguido tres clases de diferenciales en un cuerpo de funciones algebraicas K. En particular, si K es el cuerpo de funciones meromorfas de una superficie de Riemann S, entonces los divisores primos de K se identifican con los puntos de S y las formas diferenciales de K son las formas diferenciales meromorfas en S. Las diferenciales que hemos llamado de primera clase son simplemente las diferenciales holomorfas, mientras que las diferenciales de segunda clase son las que tienen integral nula sobre las fronteras en S pues, según hemos visto en la sección anterior, la integral de una forma meromorfa ω sobre una frontera es una combinación lineal entera de sus periodos polares, es decir, de los números $2\pi i \operatorname{Res}_P \omega$.

Sea ω una forma diferencial en una superficie de Riemann S y sea $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ una base de $H_1(S)$ en las condiciones de la sección anterior, es decir, obtenida a partir de una identificación $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow S$, donde $\mathcal{P}$ es un polígono de $4g$ lados. Podemos suponer que los ciclos a_k, b_k no pasan por polos de ω (por ejemplo, porque existe un difeomorfismo de S en sí misma que transforma cualquier conjunto finito de puntos prefijado en cualquier otro [GD 1.25]).

Llamaremos *periodos cíclicos* (o simplemente periodos) de ω (respecto a la base fijada) a los números complejos

$$A_k = \int_{a_k} \omega, \qquad B_k = \int_{b_k} \omega, \qquad k = 1, \ldots, g.$$

Si z es un ciclo en S, tenemos que su clase de homología se expresa como

$$[z] = \sum_{k=1}^{g} (m_k[a_k] + n_k[b_k]), \tag{8.2}$$

para ciertos $m_k, n_k \in \mathbb{Z}$, luego

$$z = \sum_{k=1}^{g} (m_k a_k + n_k b_k) + \partial c,$$

para cierta 2-cadena c en S. Consecuentemente,

$$\int_z \omega = \sum_{k=1}^{g} (m_k A_k + n_k B_k) + \int_{\partial c} \omega.$$

Por el teorema de los residuos, la última integral es combinación lineal entera de los periodos polares de ω. En resumen:

Teorema 8.1 *Si S es una superficie de Riemann de género $g \geq 1$ y ω es una forma diferencial meromorfa en S, entonces las integrales de ω sobre ciclos en S recorren el grupo generado por los periodos (polares y cíclicos) de ω.*

Notemos que ciertamente se recorre todo el grupo porque integrando sobre una pequeña circunferencia alrededor de un polo obtenemos el correspondiente periodo polar. Este teorema muestra que, aunque los periodos de ω dependen de la elección de la base de homología respecto a la que se calculan, el grupo de periodos es independiente de ella.

Fijado un punto $O \in S$, la integral

$$\int_O^P \omega$$

define una función holomorfa multiforme en S menos los polos de ω. Dos valores de la integral en un mismo punto P (calculados con arcos distintos de extremos O y P) se diferencian en un elemento del grupo de periodos de ω.

En el estudio de las integrales abelianas será fundamental una fórmula que vamos a deducir a continuación. Fijemos una forma diferencial ω de primera clase y una forma η arbitraria. Tomamos una base de homología a_k, b_k construida a partir de una identificación $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow S$, donde $\mathcal{P}$ es un polígono en forma canónica. Podemos exigir que los ciclos no pasen por polos de η. Llamemos

$$A_k = \int_{a_k} \omega, \quad B_k = \int_{B_k} \omega, \quad A'_k = \int_{a_k} \eta, \quad B'_k = \int_{b_k} \eta.$$

Sea $D \subset S$ la imagen por ϕ del interior de $\mathcal{P}$, que es un abierto simplemente conexo en S. Si P_1 y P_2 son puntos de D, podemos definir

$$\int_{P_1}^{P_2} \omega$$

como la integral sobre cualquier arco en D que una P_1 con P_2. Fijado un punto $O \in D$, la función $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(P) = \int_O^P \omega$$

es holomorfa (uniforme) en D.

Sea ζ_S una triangulación (orientada) de S diferenciable a trozos (vista como 2-cadena en S). Podemos suponer que los lados de los triángulos no pasan por polos de η. Sabemos que $\partial\zeta_S = 0$, lo cual significa que cada arista es compartida por dos triángulos, pero recorrida en sentidos opuestos. Observemos ahora que si $\sigma : \Delta_2 \longrightarrow S$ es uno de los triángulos, entonces la restricción de g al interior de su imagen se extiende a una función holomorfa en un entorno de $\sigma[\Delta_2]$. En efecto, basta considerar un abierto simplemente conexo U que contenga a $\sigma[\Delta_2]$. Fijado un punto P_1 en el interior de $\sigma[\Delta_2]$, tenemos que, para cualquier otro punto P en dicho interior,

$$g(P) = \int_O^{P_1} \omega + \int_{P_1}^P \omega,$$

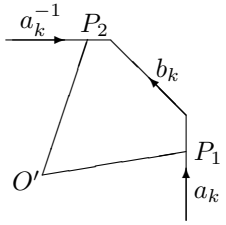
donde la segunda integral se calcula respecto de cualquier arco contenido en U que una P_1 con P, pero esta integral define una función holomorfa en U, que nos permite definir la extensión holomorfa que buscábamos. Obviamente esta extensión es única.

La construcción muestra que si $P \in \sigma[\Delta_2]$, entonces

$$g(P) = \int_O^P \omega,$$

donde la integral se calcula sobre cualquier arco que una O con P y que esté contenido en D salvo a lo sumo en su extremo final.

Consideremos ahora un punto P situado sobre la arista común de dos triángulos σ_1 y σ_2 y vamos a calcular la relación entre los valores $g_1(P)$ y $g_2(P)$. Si $P \in D$ tenemos $g_1(P) = g_2(P) = g(P)$. En caso contrario P es la imagen por ϕ de dos puntos P_1 y P_2 situados en la frontera de $\mathcal{P}$, tal y como muestra la figura.



(En realidad la figura ilustra una posibilidad. La otra es que P_1 y P_2 estén sobre dos lados b_k y b_k^{-1}, en cuyo caso la flecha del lado intermedio tendría sentido opuesto.) Llamamos O' al punto de $\mathcal{P}$ que se corresponde con O.

La poligonal γ que va de O' a P_1, de P_1 a P_2 sobre la frontera de $\mathcal{P}$ y de P_2 a O' es un ciclo en $\mathcal{P}$, y como éste es simplemente conexo, γ es una frontera. Por consiguiente, su imagen $\phi^\sharp(\gamma)$ es una frontera en S, luego

$$0 = \int_{\phi^\sharp(\gamma)} \omega = g_1(P) + B_k - g_2(P),$$

donde hemos usado que las integrales sobre los dos fragmentos de a_k y a_k^{-1} se cancelan porque, en S, son integrales de la misma forma ω sobre el mismo arco recorrido en sentidos opuestos. Así pues, $g_1(P) - g_2(P) = -B_k$.

Similarmente, si P_1 está en b_k y P_2 en b_k^{-1}, resulta $g_1(P) - g_2(P) = A_k$.

Sea $\zeta_S = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r$ la triangulación que hemos tomado. Definimos

$$\Sigma = \sum_{j=1}^{r} \int_{\partial\sigma_j} g_j\eta, \tag{8.3}$$

donde g_j es la extensión de g al triángulo σ_j.

Cada lado interior a D es recorrido dos veces en sentidos opuestos y, sobre ellos, la función g_j es la misma en ambos casos (pues coincide con la función g definida sobre D), luego las integrales se cancelan, y sólo quedan los términos correspondientes a lados contenidos en los arcos a_k y b_k. Éstos no se cancelan, porque para cada punto $P = \phi(P_1) = \phi(P_2)$ situado sobre uno de estos lados, con P_1 sobre a_k (o b_k) y P_2 sobre a_k^{-1} (o b_k^{-1}), la función g_j toma valores diferentes, digamos $g^+(P)$ cuando recorremos a_k o b_k positivamente y $g^-(P)$ cuando lo hacemos negativamente. El resultado es

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{g} \left(\int_{a_k} g^+\eta + \int_{b_k} g^+\eta - \int_{a_k} g^-\eta - \int_{b_k} g^-\eta \right) \\ &= \sum_{k=1}^{g} \left(\int_{b_k} (g^+ - g^-)\eta + \int_{a_k} (g^+ - g^-)\eta \right). \end{aligned}$$

Pero hemos visto que $g^+(P) - g^-(P) = A_k$ sobre b_k y $g^+(P) - g^-(P) = -B_k$ sobre a_k. Por consiguiente,

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{g} (A_k B'_k - B_k A'_k).$$

Por otra parte, podemos evaluar Σ calculando la integral sobre cada triángulo. Observemos que $g_j\eta$ es una forma diferencial meromorfa en un entorno (simplemente conexo) de cada uno de ellos. Subdividiendo la triangulación si es preciso, no perdemos generalidad si suponemos que dicho entorno es el dominio de una carta. Así, aplicando el teorema de los residuos vemos que

$$\Sigma = 2\pi i \sum_P \operatorname{Res}_P(g\eta),$$

donde P recorre los polos de η y g es ahora la función holomorfa (fija) definida en D. Si suponemos que η es una diferencial de tercera clase, entonces se cumple $\operatorname{Res}_P(g\eta) = g(P)\operatorname{Res}_P \eta$, pues si $g(P) = 0$ entonces $g\eta$ es holomorfa en P y su residuo es nulo.

En resumen, si ω es una diferencial de primera clase y η de tercera clase, sus periodos cíclicos A_k, B_k, A'_k, B'_k y los periodos polares de η (es decir, los números $2\pi i \operatorname{Res}_P \eta$) satisfacen la relación:

$$\sum_{k=1}^{g} (A_k B'_k - B_k A'_k) = 2\pi i \sum_P g(P) \operatorname{Res}_P \eta. \tag{8.4}$$

Si η es también una diferencial de primera clase, el segundo miembro es nulo, con lo que obtenemos el siguiente caso particular:

Teorema 8.2 (Primeras relaciones de Riemann) *Sean ω y η dos diferenciales de primera clase en una superficie de Riemann S de género $g \geq 1$, sean A_k, B_k los periodos de ω y A'_k, B'_k los periodos de η. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{g} (A_k B'_k - B_k A'_k) = 0.$$

Más importante es la relación siguiente, pues de ella se deduce que si dos diferenciales de primera clase tienen los mismos A-periodos (o los mismos B-periodos) entonces son iguales:

Teorema 8.3 (Segundas relaciones de Riemann) *Si A_k y B_k son los periodos de una diferencial de primera clase no nula ω en una superficie de Riemann S de género $g \geq 1$, entonces*

$$i \sum_{k=1}^{g} (A_k \bar{B}_k - B_k \bar{A}_k) > 0.$$

Demostración: Consideramos

$$\Sigma' = \sum_{j=1}^{r} \int_{\partial\sigma_j} \bar{g}_j \omega,$$

donde g_j y σ_j son los mismos que en (8.3). El mismo razonamiento que hemos aplicado a Σ nos da ahora que

$$\Sigma' = \sum_{k=1}^{g} (\bar{A}_k B_k - \bar{B}_k A_k),$$

luego basta probar que, para cada j,

$$-i \int_{\partial\sigma_j} \bar{g}_j \omega > 0.$$

Recordemos que, salvo un sumando constante, la función g_j se obtiene integrando ω desde un punto fijo de σ_j, por lo que $\omega|_{\sigma_j[\Delta_2]} = dg_j$. Sin embargo, ahora no podemos decir que la integral sobre $\partial\sigma_j$ es nula porque la forma $\bar{g}_j\omega$ no es holomorfa. Vamos a calcularla explícitamente.

Sea $g_j = u + iv$, de modo que $\omega = dg_j = du + i\,dv$. Aplicamos el teorema de Stokes:

$$-i\int_{\partial\sigma_j} \bar{g}_j\omega = -i\int_{\partial\sigma_j} ((u\,du + v\,dv) + i(u\,dv - v\,du)) = \int_{\sigma_j} du\wedge dv.$$

Podemos suponer que $\sigma_j[\Delta_2]$ está contenido en el dominio de una carta z, con lo que

$$\begin{aligned} du\wedge dv &= \left(\frac{\partial \operatorname{Re} g_j}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \operatorname{Re} g_j}{\partial y}\,dy\right)\wedge\left(\frac{\partial \operatorname{Im} g_j}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \operatorname{Im} g_j}{\partial y}\,dy\right)\\ &= \left(\frac{\partial \operatorname{Re} g_j}{\partial x}\frac{\partial \operatorname{Im} g_j}{\partial y} - \frac{\partial \operatorname{Re} g_j}{\partial y}\frac{\partial \operatorname{Im} g_j}{\partial x}\right)dx\wedge dy\\ &= \left(\left(\frac{\partial \operatorname{Re} g_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \operatorname{Re} g_j}{\partial y}\right)^2\right)dx\wedge dy. \end{aligned}$$

Así pues, al transportar la integral mediante la carta, obtenemos

$$\int_{\sigma_j} du\wedge dv = \int_{z_\sharp(\sigma_j)} \left(\left(z^{-1}\circ\frac{\partial \operatorname{Re} g_j}{\partial x}\right)^2 + \left(z^{-1}\circ\frac{\partial \operatorname{Re} g_j}{\partial y}\right)^2\right)dxdy,$$

que es un número real estrictamente positivo, ya que si fuera cero entonces $\operatorname{Re} g_j$ sería constante en un abierto de S, al igual que $\operatorname{Im} g_j$ por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, pero entonces g_j sería constante y ω sería nula. ∎

Como ya hemos dicho, este teorema implica que si una diferencial de primera clase ω tiene todos sus A-periodos (o todos sus B-periodos) nulos, entonces es la forma nula. Más aún, comparando los dos teoremas anteriores vemos que si ω tiene todos sus periodos reales entonces ha de ser la forma nula.

Las relaciones de Riemann pueden expresarse matricialmente:

Teorema 8.4 (Relaciones de Riemann) *Sea $\Omega = (\omega_1,\dots,\omega_g)$ una base del espacio de diferenciales de primera clase en una superficie de Riemann de género $g \geq 1$ y sean A_{jk}, B_{jk} los periodos de ω_j, que forman sendas matrices cuadradas A y B. Entonces $AB^t = BA^t$ y la matriz $i(A\bar{B}^t - B\bar{A}^t)$ es definida positiva.*

Demostración: No sólo vamos a probar lo que afirma el teorema, sino, de hecho, que este enunciado es equivalente a los enunciados de los dos teoremas precedentes.

Si $\omega = \alpha\Omega$ y $\eta = \beta\Omega$ son dos diferenciales de primera clase arbitrarias (donde α, $\beta \in \mathbb{C}^g$), los vectores de periodos de ω son αA, αB, y los de η son βA, βB. Las primeras relaciones de Riemann afirman que $\alpha AB^t\beta^t - \alpha BA^t\beta^t = 0$ o, equivalentemente, que $\alpha(AB^t - BA^t)\beta^t = 0$ para todos los α, $\beta \in \mathbb{C}^g$. Esto se reduce a la igualdad $AB^t = BA^t$.

Las segundas relaciones de Riemann afirman que si $\alpha \neq 0$ entonces

$$i(\alpha A\bar{B}^t\bar{\alpha}^t - \alpha B\bar{A}^t\bar{\alpha}^t) > 0$$

o, lo que es lo mismo, que $\alpha(i(A\bar{B}^t - B\bar{A}^t))\bar{\alpha}^t > 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}^g$ no nulo. Esto es, por definición, que la matriz $i(A\bar{B}^t - B\bar{A}^t)$ es definida positiva. ∎

Como consecuencia, la matriz A ha de ser regular, pues en caso contrario existiría un $\alpha \in \mathbb{C}^g$ no nulo tal que $\alpha A = 0$, lo que a su vez implicaría que $\alpha(i(A\bar{B}^t - B\bar{A}^t))\bar{\alpha}^t = 0$, en contradicción con el teorema anterior.

Observemos ahora que si M es una matriz regular y consideramos la base $\Omega' = \Omega M$, entonces $\omega'_i = \sum_k m_{ki}\omega_k$, y el periodo A'_j de ω'_i es $A'_j = \sum_k m_{ki}A_{kj}$, luego la matriz de A-periodos de Ω' es M^tA. En particular, tomando la matriz $M = (A^{-1})^t$, obtenemos una base cuya matriz de A-periodos es la identidad.

Definición 8.5 Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 1$. Una *base canónica* del espacio de diferenciales de primera clase de S (respecto de una base prefijada de $H_1(S)$) es una base tal que su matriz de A-periodos es la identidad.

Acabamos de demostrar que existen bases canónicas. Respecto a tales bases, las relaciones de Riemann se expresan de forma especialmente simple: las primeras relaciones afirman que la matriz B es simétrica, mientras que las segundas se reducen a que la matriz $i(\bar{B} - B) = 2\operatorname{Im} B$ es definida positiva. Puesto que se trata de una matriz real, esto implica que es definida positiva como matriz real, es decir, que $\alpha(\operatorname{Im} B)\alpha^t > 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^g$ no nulo.

A partir de una base canónica podemos formar diferenciales de primera clase con cualquier vector de A-periodos prefijado. Como consecuencia podemos dar una condición de unicidad en la descomposición de una forma diferencial:

Teorema 8.6 *Si ω es una forma diferencial en una superficie de Riemann de género $g \geq 1$, entonces ω se descompone de forma única como $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, donde los sumandos son, respectivamente, una diferencial de primera clase, una diferencial de segunda clase con A-periodos nulos y una diferencial de tercera clase con A-periodos nulos (respecto de una base de homología prefijada cuyos ciclos no pasen por los polos de ω).*

Demostración: El teorema 7.26 nos da una diferencial de tercera clase ω'_3 con los mismos polos de orden 1 que ω y con los mismos residuos, luego $\omega'_2 = \omega - \omega_3$ es una diferencial de segunda clase. Sean ω'_1 y ω''_1 diferenciales de primera clase con los mismos A-periodos que ω'_2 y ω'_3 respectivamente. Entonces $\omega_2 = \omega'_2 - \omega'_1$ y $\omega_3 = \omega'_3 - \omega''_1$ son diferenciales de segunda y tercera clase con A-periodos nulos y, llamando $\omega_1 = \omega'_1 + \omega''_1$ tenemos $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$.

La descomposición es única, pues si $\omega = \omega'_1 + \omega'_2 + \omega'_3$ es otra descomposición en las mismas condiciones, entonces ω_1 y ω'_1 son diferenciales de primera clase con los mismos A-periodos (los de ω), luego $\omega_1 - \omega'_1$ tiene A-periodos nulos y es, por consiguiente, la forma nula.

Similarmente, ω_3 y ω'_3 tienen los mismos polos simples que ω con los mismos residuos, luego su diferencia no tiene polos, luego se trata también de una diferencial de primera clase con A-periodos nulos y por lo tanto $\omega_3 = \omega'_3$. Necesariamente entonces $\omega_2 = \omega'_2$. ∎

El grupo de periodos de una forma diferencial es en general denso en $\mathbb{C}$, por lo que calcular una integral salvo periodos es hacer poco. La situación es distinta si trabajamos vectorialmente, como vamos a ver a continuación:

Sea $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_g)$ una base del espacio de diferenciales de primera clase en una superficie de Riemann S. Definimos

$$A_k = \int_{a_k} \Omega = \left(\int_{a_k} \omega_1, \dots, \int_{a_k} \omega_g \right) \in \mathbb{C}^g,$$

$$B_k = \int_{b_k} \Omega = \left(\int_{b_k} \omega_1, \dots, \int_{b_k} \omega_g \right) \in \mathbb{C}^g.$$

A estos vectores los llamaremos *periodos* de Ω. Si z es un ciclo en S, la relación (8.2) implica que

$$\int_z \Omega = \left(\int_z \omega_1, \dots, \int_z \omega_g \right)$$

es una combinación lineal entera de los periodos de Ω, por lo que si P, $Q \in S$, la integral

$$\int_P^Q \Omega = \left(\int_P^Q \omega_1, \dots, \int_P^Q \omega_g \right),$$

(donde todas las integrales se calculan sobre un mismo arco que una P con Q) está definida salvo combinaciones enteras de los periodos de Ω. La diferencia es que, según se deduce del teorema siguiente, el grupo generado por los periodos es ahora un subespacio discreto de $\mathbb{C}^g$.

Teorema 8.7 *Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 1$ y sea Ω una base de las diferenciales de primera clase. Entonces, los periodos A_k, B_k de Ω (respecto a una base de $H_1(S)$) son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración: Al construir las bases canónicas hemos visto que los periodos de dos bases distintas se corresponden por un automorfismo de $\mathbb{C}^g$, luego podemos suponer que la base Ω es canónica. Si vemos la matriz de periodos (A, B) como una matriz real de dimensión $2g \times 2g$, es decir, si desdoblamos cada fila en dos filas correspondientes a la parte real y la parte imaginaria, obtenemos una matriz de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} I & \operatorname{Re} B \\ \hline 0 & \operatorname{Im} B \end{array} \right)$$

Sabemos que $\operatorname{Im} B$ es definida positiva, luego en particular es regular, luego la matriz tiene determinante no nulo y sus columnas son linealmente independientes. ∎

Por consiguiente, el grupo generado por los periodos de una base Ω es un retículo R_Ω en $\mathbb{C}^g$. Observemos que no depende de la elección de la base de homología, ya que

$$R_\Omega = \left\{ \int_\gamma \Omega \;\middle|\; \gamma \in Z_1(S) \right\}.$$

Por otra parte, los retículos asociados a dos bases del espacio de diferenciales de primera clase se corresponden a través de un automorfismo de $\mathbb{C}^g$, lo que

implica que el toro complejo $\mathbb{C}^g/J_\Omega$ está determinado por S salvo un isomorfismo inducido por un automorfismo de $\mathbb{C}^g$, que es claramente una aplicación biholomorfa.

Definición 8.8 Si S es una superficie de Riemann de género $g \geq 1$, definimos la *variedad jacobiana* de S como el toro complejo $J(S) = \mathbb{C}^g/J_\Omega$, donde Ω es una base del espacio de diferenciales de primera clase de S y J_Ω es el retículo generado por sus periodos.

En las próximas secciones estudiaremos la relación entre una superficie S y su variedad jacobiana. Ahora vamos a probar que las variedades jacobianas cumplen la hipótesis del teorema de Lefschetz 4.41, por lo que son proyectivas:

Teorema 8.9 *Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 1$, sea Ω una base de las diferenciales de primera clase y sea $R_\Omega \subset \mathbb{C}^g$ el retículo generado por los periodos A_k, B_k de Ω respecto a una base de $H_1(S)$. Entonces existe una forma de Riemann en $\mathbb{C}^g$ respecto de R_Ω. Por consiguiente, la variedad jacobiana $J(S)$ es proyectiva.*

Demostración: Como ya hemos observado, no perdemos generalidad si tomamos como Ω una base canónica. Consideremos los periodos A_k, B_k como una $\mathbb{R}$-base de $V = \mathbb{C}^g = \mathbb{R}^{2g}$ y sea x_k, y_k su base dual. Definimos la forma bilineal alternada $E : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$E(u,v) = \sum_{j=1}^{g} (y_j(u)x_j(v) - x_j(u)y_j(v)).$$

Es obvio que E toma valores enteros sobre R_Ω. Para probar que E es una forma de Riemann sólo falta ver que la forma $S(u,v) = E(iu,v)$ es simétrica y definida positiva.

Dado $u \in V$, sean (α,β) sus coordenadas en la base de periodos, es decir, $u = \alpha + \beta B$. Por otra parte, descompongamos $u = a + ib$, donde a, $b \in \mathbb{R}^g$ y, del mismo modo, $B = P + iQ$, donde las matrices reales P y Q son simétricas y Q es definida positiva. En estos términos, $a + ib = u = \alpha + \beta P + i\beta Q$, luego $a = \alpha + \beta P$, $b = \beta Q$, luego

$$y_j(u) = \beta_j = (bQ^{-1})_j, \qquad x_j(u) = \alpha_j = (a - bQ^{-1}P)_j.$$

Por consiguiente, $y_j(iu) = (aQ^{-1})_j$, $x_j(iu) = -(b + aQ^{-1}P)_j$. Ahora tomamos dos vectores $u = a + ib$, $v = a' + ib'$ y calculamos:

$$S(u,v) = E(iu,v) = \sum_{j=1}^{g} (y_j(iu)x_j(v) - x_j(iu)y_j(v))$$

$$= \sum_{j=1}^{g} ((aQ^{-1})_j(a' - b'Q^{-1}P)_j + (b + aQ^{-1}P)_j(b'Q^{-1})_j)$$

$$= (aQ^{-1})(a' - b'Q^{-1}P) + (b + aQ^{-1}P)(b'Q^{-1}) = aQ^{-1}a'^t + bQ^{-1}b'^t,$$

donde hemos usado que todas las matrices son simétricas. Ahora es inmediato que la forma S es simétrica. Además,

$$S(u,u) = aQ^{-1}a^t + bQ^{-1}b^t.$$

Ahora basta tener en cuenta que si Q es definida positiva Q^{-1} también lo es.[1] ∎

8.3 El teorema de Abel

El teorema de Abel nos da una caracterización en términos de integrales de los divisores principales de una superficie de Riemann S. Equivalentemente, nos da una condición necesaria y suficiente para que exista una función meromorfa en S con una distribución dada de ceros y polos. Si Ω es una base del espacio de las diferenciales de primera clase de S, en la sección anterior hemos visto que la integral

$$\int_P^Q \Omega$$

está bien definida módulo los periodos de Ω, es decir, como elemento de la variedad jacobiana $J(S)$, con independencia del arco de extremos P y Q con que la calculemos.

Si identificamos los puntos de S con los divisores primos del cuerpo $\mathcal{M}(S)$ de las funciones meromorfas en S, entonces la integral (con un origen fijo $O \in S$) se extiende por linealidad a un homomorfismo sobre todo el grupo de divisores de S, de modo que

$$\int_O^{\mathfrak{a}} \Omega = \sum_Q v_Q(\mathfrak{a}) \int_O^Q \Omega \in J.$$

La restricción de este homomorfismo al grupo de los divisores de grado 0 es independiente de la elección de O, pues

$$\int_O^{\mathfrak{a}} \Omega - \int_{O'}^{\mathfrak{a}} \Omega = \sum_Q v_Q(\mathfrak{a}) \int_O^{O'} \Omega = 0.$$

Tenemos así un homomorfismo natural del grupo de divisores de grado 0 en la variedad jacobiana J. El teorema de Abel dice esencialmente que el núcleo de este homomorfismo es el subgrupo de los divisores principales. Para probarlo usaremos la versión vectorial de la relación (8.4), que se prueba sin más que aplicar dicha relación componente a componente:

Teorema 8.10 *Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 1$, sea Ω una base del espacio de diferenciales de primera clase en S y η una diferencial de*

[1] Existe una matriz regular H tal que $Q' = HQH^t$ es diagonal [TAl 6.3]. Entonces Q' es definida positiva, lo que equivale a que todos los coeficientes de su diagonal sean positivos. Lo mismo le sucede a $Q'^{-1} = H^{-1t}Q^{-1}H^{-1}$, luego Q^{-1} es definida positiva.

tercera clase. Sea a_k, b_k una base de homología de S sobre la que η no tenga polos, sean A_k, $B_k \in \mathbb{C}^g$ los periodos de Ω y $A'_k, B'_k \in \mathbb{C}$ los periodos de η. Entonces

$$\sum_{k=1}^{g}(A_kB'_k - B_kA'_k) = 2\pi i\sum_P G(P)\,\mathrm{Res}_P(\eta),$$

donde, llamando D a la imagen en S del interior del polígono $\mathcal{P}$ que determina la base de homología y $O \in D$ a un punto arbitrario,

$$G(P) = \int_O^P \Omega \in \mathbb{C}^g$$

se calcula mediante un arco contenido en D que una O con P.

El teorema siguiente es la mitad del teorema de Abel:

Teorema 8.11 *Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 1$ y Ω una base del espacio de las diferenciales de primera clase. Sea $O \in S$. Entonces, para cada $\alpha \in \mathcal{M}(S)$ se cumple*

$$\int_O^{(\alpha)} \Omega = 0.$$

Demostración: Puesto que la integral no depende de la base de homología con que se calculan los periodos de Ω, podemos tomar ésta de modo que los arcos a_k y b_k no contengan ceros o polos de α.

Sea D la imagen en S del interior del polígono $\mathcal{P}$ que determina la base, tomemos $O \in S$ y sea

$$G(P) = \int_O^P \Omega \in \mathbb{C}^g,$$

donde las g integrales se calculan sobre un mismo arco contenido en D. Hemos de probar que

$$\sum_P v_P(\alpha)G(P) \in \langle A_k, B_k \mid k = 1, \ldots, g\rangle_{\mathbb{Z}}\,.$$

Sea $\eta = d\alpha/\alpha$. Se trata de una forma meromorfa en S. Vamos a calcular sus residuos. Para cada punto $Q \in S$ consideramos una función $\pi \in \mathcal{M}(S)$ tal que $v_P(\pi) = 1$ (de modo que π se restringe a una carta alrededor de P). Entonces

$$\eta = \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\pi}\,d\pi,$$

y es fácil ver que $\mathrm{Res}_P\,\eta = v_P(\alpha)$. Además η es una diferencial de tercera clase, luego podemos aplicar el teorema 8.10, que nos da la relación

$$\sum_{k=1}^{g}(A_kB'_k - B_kA'_k) = 2\pi i\sum_P v_P(\alpha)G(P),$$

donde $A'_k, B'_k \in \mathbb{C}$ son los periodos de η.

Podemos considerar a η como forma holomorfa en el abierto que resulta de quitarle a S los ceros y los polos de α. Así, α también es una función holomorfa con imagen en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y

$$A'_k = \int_{a_k} \eta = \int_{a_k} \alpha^\sharp(dz/z) = \int_{z_\sharp(a_k)} \frac{dz}{z} = 2m_k\pi i,$$

para cierto $m_k \in \mathbb{Z}$. $B'_k = 2n_k\pi i$, con lo que

$$2\pi i \sum_{k=1}^{g} (n_k A_k - m_k B_k) = 2\pi i \sum_P v_P(\alpha) G(P).$$

Al cancelar los factores $2\pi i$ queda la relación buscada. ∎

Para probar el recíproco necesitamos un resultado más:

Teorema 8.12 *Con la notación usual, se cumple*

$$\sum_{k=1}^{g} (\beta_k A_k - \alpha_k B_k) = 0, \qquad \text{para ciertos } \alpha_k,\ \beta_k \in \mathbb{C},$$

si y sólo si $\beta_k = CB_k$, $\alpha_k = CA_k$, *para cierto* $C \in \mathbb{C}^g$.

Demostración: Sea $\eta = c_1\omega_1 + \cdots + c_g\omega_g$ una diferencial de primera clase. El teorema 8.2 nos da que

$$\sum_{k=1}^{g} (A_k B'_k - B_k A'_k) = 0,$$

donde

$$A'_k = \int_{a_k} \eta = (c_1, \ldots, c_g)A_k, \quad B'_k = \int_{b_k} \eta = (c_1, \ldots, c_g)B_k.$$

Esto prueba una implicación. Para probar el recíproco veamos primero que si $X \in \mathbb{C}^g$ cumple $XA_k = XB_k = 0$ para $k = 1, \ldots, g$, entonces $X = 0$.

En efecto, tomemos $\eta = X\Omega$, que es una diferencial de primera clase. Entonces

$$\int_{a_k} \eta = X \int_{a_k} \Omega = XA_k = 0, \qquad \int_{b_k} \eta = X \int_{a_k} \Omega = XB_k = 0.$$

Sabemos que la integral

$$\int_O^Q \eta$$

está bien definida en S salvo múltiplos de los periodos de η, pero éstos son nulos, luego la integral define una función holomorfa en S. Concluimos que es constante, luego $\eta = 0$ y $X = 0$, pues Ω es una base.

Con esto hemos probado que la única solución del sistema de $2g$ ecuaciones lineales con g incógnitas formado con los coeficientes de A_k y B_k es la solución

trivial. Esto implica que la matriz de coeficientes tiene rango g, luego los $2g$ vectores A_k, B_k tienen rango g. Por otra parte, estamos buscando el conjunto de las soluciones de un sistema de g ecuaciones lineales con $2g$ incógnitas, con matriz de coeficientes de rango g. El espacio de soluciones ha de tener dimensión g, pero las soluciones que hemos encontrado forman ya un espacio de dimensión g, luego son todas las soluciones. ∎

Finalmente podemos probar:

Teorema 8.13 (Abel) *Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 1$, sea $O \in S$ y Ω una base del espacio de diferenciales de primera clase. Entonces un divisor $\mathfrak{a}$ de grado 0 en S es principal si y y sólo si*

$$\int_O^{\mathfrak{a}} \Omega = 0.$$

Demostración: Ya hemos probado una implicación. Supongamos que la integral es nula (como elemento de la variedad jacobiana $J(S)$) y veamos que $\mathfrak{a}$ es principal. Con la notación habitual, podemos exigir que los arcos a_k y b_k no contengan puntos P con $v_P(\mathfrak{a}) \neq 0$. Vamos a probar que existe una diferencial de tercera clase η tal que $\operatorname{Res}_P \eta = v_P(\mathfrak{a})$ para todo punto $P \in S$ y además

$$\int_{a_k} \eta = 2\pi i m_k, \qquad \int_{b_k} \eta = 2\pi i n_k, \qquad m_k, n_k \in \mathbb{Z}.$$

Por el teorema 7.26 tenemos una forma η' que cumple la condición sobre los residuos. El teorema 8.10 nos da que

$$\sum_{k=1}^{g} \left(A_k \int_{b_k} \eta' - B_k \int_{a_k} \eta' \right) = 2\pi i \sum_P G(P) v_P(\mathfrak{a}).$$

Por hipótesis $G(P) \in \langle A_k, B_k \rangle_{\mathbb{Z}}$, luego existen enteros m_k y n_k tales que

$$\sum_{k=1}^{g} \left(A_k \int_{b_k} \eta' - B_k \int_{a_k} \eta' \right) = 2\pi i \sum_{k=1}^{g} (A_k n_k - B_k m_k),$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{g} \left(\left(\int_{b_k} \eta' - 2\pi i n_k \right) A_k - \left(\int_{a_k} \eta' - 2\pi i m_k \right) B_k \right) = 0.$$

El teorema anterior nos da que

$$\int_{b_k} \eta' - 2\pi i n_k = C B_k, \qquad \int_{a_k} \eta' - 2\pi i m_k = C A_k,$$

para cierto vector $C \in \mathbb{C}^g$.

La forma $\eta = \eta' - C\Omega$ tiene los mismos polos y residuos que η', y además

$$\int_{a_k} \eta = \int_{a_k} \eta' - \int_{a_k} C\Omega = \int_{a_k} \eta' - C A_k = 2\pi i m_k.$$

Con b_k se razona igualmente.

Así, todos los periodos de η son múltiplos enteros de $2\pi i$, luego las integrales

$$\int_O^P \eta$$

están definidas salvo múltiplos enteros de $2\pi i$. Esto nos permite definir

$$\alpha(P) = \exp \int_O^P \eta,$$

que es una función uniforme definida en S salvo en los polos de η. Claramente es holomorfa y no se anula. Vamos a probar que se extiende a una función meromorfa en S de modo que en los polos P de η tiene ceros o polos, y además $v_P(\alpha) = v_P(\mathfrak{a})$.

En efecto, tomemos una función $z \in \mathcal{M}(S)$ tal que $v_P(z) = 1$, con lo que z se restringe a una carta en un entorno (simplemente conexo) U de P. Podemos exigir que U no contenga otros polos de η. Fijemos $R \in U$, de modo que, para puntos $Q \in U$ se cumple

$$\alpha(Q) = \exp \int_O^R \eta \ \exp \int_R^Q \eta = K \exp \int_R^Q \eta.$$

Si $\eta = f\,dz$, entonces $\eta|_U = z^*(\tilde{f}(z)\,dz)$, donde $\tilde{f}$ es una función meromorfa en un entorno de 0 en $\mathbb{C}$ con un polo simple en 0 y $\operatorname{Res}_0 \tilde{f} = \operatorname{Res}_P \eta = v_P(\mathfrak{a})$. Por consiguiente,

$$\tilde{f}(z) = \frac{v_P(\mathfrak{a})}{z} + h(z),$$

donde h es una función holomorfa en 0. Según el teorema de cambio de variable,

$$\int_R^Q \eta = v_P(\mathfrak{a}) \int_{z(R)}^{z(Q)} \frac{dz}{z} + \int_{z(R)}^{z(Q)} h(z)\,dz = v_P(\mathfrak{a})(\log z(Q) - \log z(R)) + H(Q),$$

donde H es una función holomorfa en U y el logaritmo que aparece en el primer sumando depende del arco por el que se integra, pero la elección se vuelve irrelevante al calcular

$$\exp \int_R^Q \eta = \exp(v_P(\mathfrak{a})(\log z(Q) - \log z(R)) \exp H(Q) = z(Q)^{v_P(\mathfrak{a})} K' e^{H(Q)}.$$

En definitiva, $\alpha|_U = KK' z^{v_P(\mathfrak{a})} H$, luego α es meromorfa en P y además $v_P(\alpha) = v_P(\mathfrak{a})$. ∎

Veamos un enunciado equivalente del teorema de Abel. Para ello observemos en primer lugar que si $\mathfrak{a} = P_1 \cdots P_n Q_1^{-1} \cdots Q_n^{-1}$ (donde los puntos P_k y Q_k pueden repetirse) entonces

$$\int_O^{\mathfrak{a}} \Omega = \sum_{k=1}^n \int_O^{P_k} \Omega - \sum_{k=1}^n \int_O^{Q_k} \Omega = \sum_{k=1}^n \int_{Q_k}^{P_k} \Omega = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \Omega = \int_\gamma \Omega,$$

donde γ_k es un arco que une Q_k con P_k y $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$.

Ahora observemos que las 0-cadenas de S son lo mismo que sus divisores, pues ambos son combinaciones enteras de puntos (salvando el hecho de que para cadenas usamos notación aditiva y para divisores multiplicativa). Teniendo esto en cuenta, podemos afirmar que

$$\partial\gamma = \partial\gamma_1 + \cdots + \partial\gamma_n = P_1 - Q_1 + \cdots + P_2 - Q_2 = P_1Q_1^{-1}\cdots P_nQ_n^{-1} = \mathfrak{a}.$$

Así pues, la condición del teorema de Abel para que $\mathfrak{a}$ sea principal es que

$$\int_\gamma \Omega \in \langle A_k, B_k \mid k = 1, \ldots, g\rangle$$

para una cadena γ tal que $\partial\gamma = \mathfrak{a}$. Notemos que no importa cuál, pues dos de ellas se diferencian en un ciclo y la integral de Ω sobre un ciclo está también en el grupo de periodos. Por otro lado, cualquier elemento del grupo de periodos puede obtenerse como la integral de Ω sobre un ciclo adecuado. Por consiguiente, si $\mathfrak{a}$ es principal, será

$$\int_\gamma \Omega = \int_z \Omega,$$

para cierto ciclo z, y sustituyendo γ por $\gamma - z$ tenemos otra cadena con la misma frontera y tal que

$$\int_\gamma \Omega = 0.$$

Más aún, esto significa que todas las formas $\omega_1, \ldots, \omega_g$ tienen integral nula sobre γ, y cualquier otra forma de primera clase es combinación lineal de éstas, luego llegamos a que todas tienen integral nula sobre γ. En resumen:

Teorema 8.14 (Abel) *Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 1$ y $\mathfrak{a}$ un divisor de grado 0 en S. Entonces $\mathfrak{a}$ es principal si y y sólo si existe una 1-cadena γ en S tal que $\partial\gamma = \mathfrak{a}$ y*

$$\int_\gamma \omega = 0$$

para toda diferencial de primera clase ω en S.

En realidad Abel sólo probó que la condición del teorema anterior es necesaria para que el divisor $\mathfrak{a}$ sea principal. De hecho, su enunciado no hablaba para nada de divisores, fronteras etc. y, en realidad, era mucho más general que la mitad correspondiente del teorema anterior. La versión moderna del teorema de Abel fue formulado por Clebsch varias décadas después de la muerte de Abel. Después veremos que la implicación del teorema de Abel probada por Abel es suficiente para demostrar las relaciones de aditividad de integrales abelianas descubiertas por Euler.

8.4 El teorema de inversión de Jacobi

El teorema de Abel nos da que la integración de una base Ω de las diferenciales de primera clase desde un punto arbitrario O induce un homomorfismo del grupo de divisores de grado 0 de una superficie de Riemann S en su variedad jacobiana $J(S)$. Ahora probaremos el teorema de Jacobi, que afirma que este homomorfismo es en realidad un isomorfismo, lo que por una parte nos da una representación del grupo de clases de S y por otra nos aporta mucha información sobre $J(S)$ y los periodos de Ω.

Definición 8.15 Un divisor $\mathfrak{a}$ en una superficie de Riemann S es *normal* si $\dim(W/[\mathfrak{a}]) = 0$, donde W es la clase canónica de S.

Puesto que $\operatorname{grad} W = 2g-2$, todo divisor de grado $> 2g-2$ es normal. Recordemos que $\dim(W/[\mathfrak{a}])$ es la dimensión del espacio de las formas diferenciales ω tales que $\mathfrak{a} \mid (\omega)$. En particular, un divisor entero $\mathfrak{a} = P_1 \cdots P_r$ es normal si y sólo si la única diferencial de primera clase que se anula en los puntos $P_1, \ldots, P_r$ es la forma nula.

Teorema 8.16 *Si S es una superficie de Riemann de género $g \geq 1$, existen g puntos distintos $M_1, \ldots, M_g \in S$ tales que el divisor $M_1 \cdots M_g$ es normal, es decir, tal que la única diferencial de primera clase que se anula en $M_1, \ldots, M_g$ es la forma nula.*

Demostración: Llamemos W a la clase canónica de S. Sea ω_1 una diferencial de primera clase y M_1 un punto donde ω_1 no se anule. Sabemos que $\dim(W/(M_1))$ es la dimensión del espacio de las diferenciales de primera clase que se anulan en M_1. Por el teorema de Riemann-Roch,

$$\dim(M_1) = 1 + 1 - g + \dim(W/(M_1)),$$

y, por otra parte, $\dim(M_1) = 1$, pues si α tiene a lo sumo un polo simple en M_1, entonces α no tiene polos (porque la suma de los residuos de $\alpha\omega_1$ ha de ser nula) y en consecuencia es constante. Así pues, el espacio de diferenciales de primera clase que se anulan en M_1 tiene dimensión $g-1$. Tomamos una forma ω_2 que se anule en M_1 y un punto $M_2 \in S$ donde no se anule ω_2.

En general, supongamos que hemos encontrado $r < g$ puntos distintos $M_1, \ldots, M_r$ y r diferenciales de primera clase $\omega_1, \ldots, \omega_r$ tales que cada ω_k se anule en $M_1, \ldots, M_{k-1}$ pero no en M_k.

Ahora, el espacio de las diferenciales de primera clase que se anulan en $M_1, \ldots, M_r$ tiene dimensión $\dim(W/(M_1 \cdots M_r))$. El teorema de Riemann-Roch es

$$\dim(W/(M_1 \cdots M_r)) = g - k - 1 + \dim(M_1 \cdots M_r),$$

y la última dimensión es 1, pues si α tiene a lo sumo polos simples en los puntos $M_1, \ldots, M_r$, entonces $\alpha\omega_r$ tendría a lo sumo un polo en M_r, luego no tiene polos, luego α tampoco tiene un polo en M_r. Razonando con $\alpha\omega_{r-1}$ llegamos a que α tampoco tiene un polo en M_{r-1} y repitiendo llegamos a que α no tiene polos, luego es constante.

Así pues, podemos tomar una forma ω_{r+1} que se anule en $M_1, \dots, M_r$ pero no en un nuevo punto M_{r+1}.

El divisor $M_1 \cdots M_g$ cumple lo pedido, pues las formas $\omega_1, \dots, \omega_g$ forman una base de las diferenciales de primera clase (es claro que ω_k no es combinación lineal de $\omega_{k+1}, \dots, \omega_g$) y si una diferencial de primera clase ω tuviera ceros en $M_1, \dots, M_g$, podríamos expresarla como $\omega = a_1\omega_1 + \cdots + a_g\omega_g$, con $a_k \in \mathbb{C}$, y si a_k fuera el mayor coeficiente no nulo, tendríamos que ω_k se anularía en M_k, contradicción. ∎

La prueba del teorema de Jacobi se basa en el resultado siguiente:

Teorema 8.17 *Sea S una superficie de género $g \geq 1$ y $M_1, \dots, M_g$ puntos distintos en S tales que el divisor $(M_1 \cdots M_g)$ es normal. Sea Ω una base de las diferenciales de primera clase. Entonces*

$$(P_1, \dots, P_g) \mapsto \sum_{k=1}^{g} \int_{M_k}^{P_k} \Omega$$

determina una aplicación biholomorfa de un producto $V_1 \times \cdots \times V_g$ de entornos de $P_1, \dots, P_g$ en un entorno de 0 en $\mathbb{C}^g$.

Demostración: Sea $z_k \in \mathcal{M}(S)$ tal que $v_{M_k}(z_k) = 1$. Vamos a probar que

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega_1}{dz_1}\Big|_{M_1} & \cdots & \frac{\omega_1}{dz_g}\Big|_{M_g} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\omega_g}{dz_1}\Big|_{M_1} & \cdots & \frac{\omega_g}{dz_g}\Big|_{M_g} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Para ello, consideramos el homomorfismo

$$\omega \mapsto \left(\frac{\omega}{dz_1}\Big|_{M_1}, \cdots, \frac{\omega}{dz_g}\Big|_{M_g} \right)$$

del espacio de diferenciales de primera clase en $\mathbb{C}^g$. Una forma en su núcleo se anula en $M_1, \dots, M_g$, luego ha de ser la forma nula. Así pues, el homomorfismo es inyectivo y, comparando las dimensiones, ha de ser un isomorfismo. Por lo tanto el determinante es no nulo.

Sea V_k un entorno simplemente conexo de M_k donde ω_j/dz_k, para todo $j = 1, \dots, g$, sea holomorfa (es decir, no tenga polos). Sea

$$h_{kj}(w) = \int_{M_k}^{z^{-1}(w)} \omega_j = \int_0^w \frac{\omega_j}{dz_k}\Big|_{z^{-1}(\zeta)} d\zeta,$$

que es una función holomorfa en $z_k[V_k]$. Tenemos que $z_1 \times \cdots \times z_g$ es una carta en S^g alrededor de $(M_1, \dots, M_k)$ y la lectura en esta carta de la aplicación del enunciado es

$$(w_1, \dots, w_g) \mapsto (h_{11}(w_1) + \cdots + h_{1g}(w_1), \dots, h_{g1}(w_1) + \cdots + h_{gg}(w_g)).$$

Ciertamente es una función holomorfa, y su determinante jacobiano en 0 es el determinante anterior. El teorema de la función inversa nos da la conclusión.

Teorema 8.18 (Jacobi) *Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 1$ y Ω una base del espacio de diferenciales de primera clase. Para cada $X \in \mathbb{C}^g$ existe un divisor $\mathfrak{a}$ de grado 0 en S y una 1-cadena γ tal que $\partial\gamma = \mathfrak{a}$ y*

$$\int_\gamma \Omega = X.$$

Es claro que este teorema está contenido en el resultado siguiente, que incluye también al teorema de Abel (véanse las observaciones previas al teorema 8.14).

Teorema 8.19 (Abel-Jacobi) *Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 1$, sea $O \in S$ y Ω una base del espacio de diferenciales de primera clase. Entonces la aplicación*

$$A \mapsto \int_O^A \Omega$$

determina un isomorfismo entre el grupo de clases de grado 0 de S y su variedad jacobiana $J(S)$.

Demostración: Por el teorema de Abel sabemos que la aplicación está bien definida y es un monomorfismo de grupos. Sea $U \subset \mathbb{C}^g$ el entorno de cero dado por el teorema anterior. Si $\alpha \in \mathbb{C}$, tomamos un número natural n tal que $\beta = \alpha/n \in U$. Si probamos que la clase $[\beta] \in J(S)$ tiene una antiimagen A, entonces $[\alpha]$ tendrá antiimagen nA y el teorema estará probado. Ahora bien, por el teorema anterior, existen puntos $P_k \in V_k$ tales que

$$\sum_{k=1}^g \int_{M_k}^{P_k} \Omega = \beta.$$

Concluimos que β es la imagen de la clase de $P_1 \cdots P_g / M_1 \cdots M_g$. ∎

Así pues, el grupo de clases de grado 0 de una superficie de Riemann S de género $g \geq 1$ es isomorfo a un producto de $2g$ copias de la circunferencia S^1.

Terminamos esta sección con una aplicación, para la que necesitamos el teorema siguiente:

Teorema 8.20 *Si $c_1, \ldots, c_{2g}$ es una base de homología de una superficie de Riemann S de género $g \geq 1$ y $j \in \{1, \ldots, 2g\}$, existe una diferencial de primera clase ω tal que*

$$\operatorname{Re} \int_{c_k} \omega = \delta_{kj}, \qquad k = 1, \ldots, 2g.$$

Demostración: Fijemos una base $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_g)$ para las diferenciales de primera clase y consideremos su matriz de periodos:

	c_1	$\cdots$	c_{2g}
ω_1	$u_{11} + iv_{11}$	$\cdots$	$u_{1\,2g} + iv_{1\,2g}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
ω_g	$u_{g1} + iv_{g1}$	$\cdots$	$u_{g\,2g} + iv_{g\,2g}$

El teorema 8.7 afirma que sus columnas son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. La diferencial ω que buscamos será de la forma $z_1\omega_1+\cdots+z_g\omega_g$, para ciertos números complejos $z_k = x_k + iy_k$. Suponiendo, por simplicidad, $j = 1$, basta exigir que cumplan

$$\begin{aligned} x_1u_{11} \ -y_1v_{11} \ +\cdots+ \ x_gu_{g1} \ -y_gv_{g1} \ &= 1,\\ x_1u_{12} \ -y_1v_{12} \ +\cdots+ \ x_gu_{g2} \ -y_gv_{g2} \ &= 0,\\ &\\ x_1u_{1\,2g} -y_1v_{1\,2g}+\cdots+ \ x_gu_{g\,2g} -y_gv_{g\,2g} \ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual es posible porque la matriz de coeficientes tiene determinante no nulo (es la matriz de coordenadas de las columnas de la matriz de periodos respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^{2g}$). ∎

Como consecuencia:

Teorema 8.21 *Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 1$.*

1. *Si ω es una forma diferencial de primera clase con integral nula sobre todo ciclo de S, entonces es la forma nula.*
2. *Si z es un ciclo en S sobre el que todas las diferenciales de primera clase tienen integral nula, entonces z es una frontera.*

DEMOSTRACIÓN: 1) está ya probado, pues ω tendría todos sus periodos nulos (ver las observaciones anteriores o posteriores al teorema 8.3).

2) Sea $c_1, \ldots, c_{2g}$ una base de homología de S. Entonces

$$[z] = m_1[c_1] + \cdots + m_{2g}[c_{2g}],$$

para ciertos enteros m_k. Basta probar que son nulos. Ahora bien, si tomamos una diferencial de primera clase ω que cumpla el teorema anterior para un j y la integramos sobre z obtenemos que $0 = m_j + yi$, luego $m_j = 0$. ∎

Equivalentemente, hemos probado que la forma bilineal

$$\int^* : H_1(S, \mathbb{C}) \times \Lambda^1(S) \longrightarrow \mathbb{C}$$

induce isomorfismos entre cada espacio y el dual del otro. Esto es la versión holomorfa del teorema de De Rham.

8.5 Integrales elípticas

Si S es una superficie de Riemann de género $g = 1$, nos encontramos con una situación peculiar. El teorema de Abel-Jacobi prueba que el grupo de clases de grado 0 de S es isomorfo a la variedad jacobiana $J(S)$ y, por otra parte, fijado un punto $P \in S$, el teorema 7.18 afirma que la correspondencia $Q \mapsto [Q/P]$ biyecta S con el grupo de clases de grado 0. Tenemos, pues, una biyección entre S y $J(S)$ que, de hecho, es un isomorfismo de grupos cuando consideramos en S la estructura dada por 7.19.

Enseguida veremos que este isomorfismo está en el fondo de las relaciones de adición de integrales que hemos comentado en la introducción de este capítulo, pero antes estudiaremos más de cerca la situación. Para empezar, resulta natural plantearse si dicho isomorfismo es biholomorfo, y la respuesta es afirmativa.

En efecto, si ω es una diferencial no nula de primera clase, a un punto Q le corresponde la clase

$$\int_O^{Q/P} \omega = \int_O^Q \omega - \int_O^P \omega = \int_P^Q \omega \in J.$$

La lectura de esta aplicación en cartas de S y J es una función definida como la integral de una función holomorfa, luego es holomorfa. Concluimos que el isomorfismo de Abel-Jacobi es una aplicación biholomorfa entre S y $J(S)$. En resumen:

Teorema 8.22 *Sea S una superficie de Riemann de género 1, sea ω una diferencial no nula de primera clase en S y $J(S)$ su variedad jacobiana. Fijado un punto $P \in S$, la aplicación $S \longrightarrow J(S)$ dada por*

$$Q \mapsto \int_P^Q \omega$$

es biholomofa y un isomorfismo de grupos cuando en S consideramos la estructura de grupo que tiene a P por elemento neutro.

Los toros complejos de dimensión 1 son superficies de Riemann. En este caso conocemos explícitamente una base de homología: si $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ es un retículo en $\mathbb{C}$ y $T = \mathbb{C}/R$, entonces la restricción de la proyección natural $p : \mathbb{C} \longrightarrow T$ al conjunto

$$\mathcal{P} = \{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \mid 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\}$$

es diferenciable, inyectiva en el interior de $\mathcal{P}$ e identifica los lados dos a dos, de modo que una base de homología de T (en las condiciones que venimos exigiendo) está formada por (las imágenes en T de) los arcos $a(t) = t\omega_1$ y $b(t) = t\omega_2$. En realidad, según los convenios de orientación que hemos adoptado, hemos de exigir que al recorrer la frontera de $\mathcal{P}$ en sentido antihorario recorramos los arcos a y b en la forma $aba^{-1}b^{-1}$, y es fácil ver que esto se traduce en que hemos de ordenar ω_1 y ω_2 de forma que $\operatorname{Im} \omega_2/\omega_1 > 0$. Por ejemplo, si no respetamos este convenio, la desigualdad teorema 8.3 se invertiría.

Una carta alrededor de un punto $P \in T$ es de la forma $z = p|_C^{-1}$, donde C es un abierto en C sobre el que la proyección p sea inyectiva. Si z_1 y z_2 corresponden a dos elecciones de C, entonces $z_1 - z_2$ es constante (es un elemento de R), luego $dz_1 = dz_2$. Esto nos permite definir dz como la única forma diferencial en T que en cada abierto $p[C]$ coincide con la diferencial de $p|_C^{-1}$. Se trata de una forma diferencial holomorfa en T, es decir, de primera clase. La proyección $p : \mathbb{C} \longrightarrow T$ induce el homomorfismo $p^* : \Lambda^1(T) \longrightarrow \Lambda^1(\mathbb{C})$, y es claro que

$p^*(dz) = dz$, donde la z del miembro derecho es la identidad en $\mathbb{C}$. De aquí se sigue que los periodos de dz son

$$A = \int_{p^\sharp(a)} dz = \int_a dz = \int_0^1 \omega_1 t\, dt = \omega_1, \qquad B = \omega_2.$$

Por consiguiente, la variedad jacobiana de T es $J(T) = T$. Si $Q \in T$, podemos expresar $Q = [z]$, donde $z \in \mathcal{P}$. Un camino que une $P = [0]$ con Q es $p^\sharp(\gamma)$, donde $\gamma(t) = tz$. Por lo tanto,

$$\int_P^Q dz = \left[\int_{p^\sharp(\gamma)} dz\right] = \left[\int_\gamma dz\right] = \left[\int_0^1 zt\, dt\right] = [z] = Q.$$

Con esto hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 8.23 *Sea T un toro complejo, sea $p : \mathbb{C} \longrightarrow T$ la proyección natural, sea dz la diferencial de primera clase que cumple $p^*(dz) = dz$ y sea $P = [0]$. Entonces el isomorfismo de Abel-Jacobi en la versión del teorema 8.22 respecto de dz y P es la identidad. En particular, la estructura de grupo en T de elemento neutro P inducida por el grupo de clases de grado 0 coincide con la estructura de T como grupo cociente de $\mathbb{C}$.*

Pasemos ya a abordar la cuestión de la aditividad de integrales. Las fórmulas de adición se deducen del hecho de que la aplicación descrita en el teorema anterior es un homomorfismo de grupos (lo cual requiere sólo la implicación del teorema de Abel que probó realmente Abel).

Para obtener la relación de adición de la lemniscata tenemos que considerar la curva $W^2 = 1 - Z^4 = (1 - Z^2)(1 + Z^2)$. Más en general, vamos a trabajar con la curva de ecuación

$$W^2 = (1 - Z^2)(1 - mZ^2), \qquad 0 \neq m < 1.$$

Aunque tiene género 1, no se trata de una curva elíptica porque no es regular (si lo fuera tendría género 3). Esto lo arreglamos con la transformación birracional $(X, Y) = (Z^2, WZ)$, que hace corresponder dicha curva con la cúbica V de ecuación

$$Y^2 = X(1 - X)(1 - mX).$$

En general, las transformaciones birracionales entre curvas se corresponden con cambios de variable entre integrales, en este caso con el cambio $X = Z^2$. En efecto, si $0 < r < 1$, se cumple

$$\int_0^r \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - mz^2)}} = \frac{1}{2}\int_0^r \frac{2z\, dz}{\sqrt{z^2(1 - z^2)(1 - mz^2)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(1 - mx)}} = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{dx}{y}, \qquad t = r^2.$$

La última integral es la integral curvilínea en V de la diferencial de primera clase $\omega = dx/y$ (véase el ejemplo de la página 281) sobre el arco dado por

$$\sigma(x) = (x, \sqrt{x(1-x)(1-mx)}).$$

(Recordemos que hemos tomado $0 \neq m < 1$, con lo que el radicando es positivo en el intervalo $[0, 1]$.)

Consideramos en V la estructura de grupo que tiene por elemento neutro al punto $(0, 0)$. Fijamos dos puntos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y vamos a calcular $P_1 + P_2$. De acuerdo con el teorema 7.20, calculamos la recta que pasa por P_1 y P_2, que está determinada por la ecuación

$$Y = y_1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(X - x_1) = aX + b,$$

donde

$$b = y_1 - x_1\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2} = x_1x_2\,\frac{1 - mx_1x_2}{x_1y_2 + x_2y_1}.$$

Al sustituir $Y = aX + b$ en la ecuación de V obtenemos

$$(aX + b)^2 = X(1 - X)(1 - mX),$$

ecuación cuyas raíces son x_1, x_2 y la coordenada x_3 del tercer punto $P_3 = (x_3, y_3)$ en que la recta corta a V. El término independiente es b^2 y el coeficiente director es m, luego tenemos la relación $b^2 = mx_1x_2x_3$. Así pues, $x_3 = b^2/(mx_1x_2)$.

La suma será el punto $P' = (x', y')$ donde la recta que pasa por $(0, 0)$ y P_3 corta a V. Dicha recta es $Y = (y_3/x_3)X$. Razonando como antes, sustituimos

$$\frac{y_3^2}{x_3^2}X^2 = X(1 - X)(1 - mX)$$

y concluimos que $x' = 1/(mx_3)$. Así pues,

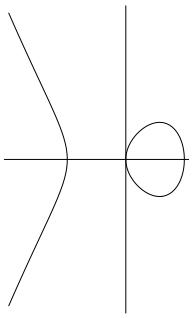
$$x' = \frac{x_1x_2}{b^2} = \frac{1}{x_1x_2}\left(\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{1 - mx_1x_2}\right)^2.$$

Todas las operaciones son correctas en el caso que nos va a interesar, a saber, $P_i = \sigma(x_i)$, donde $0 < x_1, x_2 < 1$ (los denominadores no se anulan, etc.). Más aún, la función $\sqrt{x(1-x)(1-mx)}$ es creciente a la derecha de 0, de donde se sigue que si x_1, x_2 están suficientemente cerca de 0, entonces la pendiente de $Y = aX + b$ es positiva, con lo que es fácil ver que $y' > 0$ y, por lo tanto, $P_1 + P_2 = \sigma(x')$.

El hecho de que la integración de $\omega = dx/y$ desde $(0, 0)$ sea un homomorfismo de grupos nos da ahora que

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{y} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{y} = \int_0^{x'} \frac{dx}{y} + \alpha, \tag{8.5}$$

donde todas las integrales se calculan sobre un segmento del arco σ y α es un elemento del grupo de periodos de ω.



Ahora bien, ω tiene un periodo real y otro imaginario puro. Esto podremos probarlo más fácilmente en la sección siguiente (véase la observación tras el teorema 8.26), pero informalmente la razón es ésta: la curva V es un toro y su parte real muestra dos de sus secciones. La figura corresponde al caso $m = -1$, de modo que el "círculo" de la derecha es un corte completo del "tubo" y la rama de la izquierda es otro corte al que le falta el punto del infinito para cerrarse. (Si $0 < m < 1$ la única diferencia es que la rama abierta queda a la derecha de 1.)

Una base de homología la forman el ciclo que recorre una vez en sentido negativo el "círculo" completo, cuyo periodo es

$$A = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-mx)}} > 0,$$

junto con el ciclo que recorre los puntos $(x, i\sqrt{-x(1-x)(1-mx)})$ desde $x = 1$ a $x = 1/m$ si $m > 0$ o bien desde $x = 1/m$ hasta 0 si $m < 0$ y luego vuelve al punto de partida por los puntos $(x, -i\sqrt{-x(1-x)(1-mx)})$. El periodo correspondiente es imaginario puro.

Así pues, el número α que aparece en (8.5) ha de ser un múltiplo entero del único periodo real A de ω, pues los demás términos de la ecuación son reales. Pero el miembro izquierdo es positivo y menor que A, y la integral del miembro derecho es positiva, luego ha de ser necesariamente $\alpha = 0$. Finalmente deshacemos el cambio $X = Z^2$, con lo que obtenemos que, para $0 < z_1, z_2 < 1$, se cumple

$$\int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}} + \int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}}$$

$$= \int_0^{z'} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}},$$

donde

$$z'^2 = x' = \frac{1}{x_1x_2}\left(\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{1 - mx_1x_2}\right)^2 = \frac{1}{z_1^2z_2^2}\left(\frac{z_1^2z_2w_2 + z_2^2z_1w_1}{1 - mz_1^2z_2^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{z_1w_2 + z_2w_1}{1 - mz_1^2z_2^2}\right)^2,$$

y, en definitiva,

$$z' = \frac{z_1w_2 + z_2w_1}{1 - mz_1^2z_2^2}.$$

Para $m = -1$ tenemos la fórmula de adición para arcos de lemniscata. Si hacemos tender m a 0 obtenemos, mediante oportunos razonamientos de continuidad, la fórmula de adición para el arco seno. Por otra parte, la fórmula general que hemos obtenido está muy cerca de proporcionar una suma de arcos de elipse análoga a la de la lemniscata. En efecto, respecto a un sistema de referencia adecuado, toda elipse admite una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geq b > 0.$$

El número $0 \leq k < 1$ dado por $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ es la excentricidad de la elipse. Aplicando una homotecia podemos suponer que el semieje mayor es $a = 1$, con lo que la excentricidad es $k = \sqrt{1 - b^2}$. Para calcular el elemento de longitud despejamos $y(x) = b\sqrt{1 - x^2}$, con lo que

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}\, dx = \frac{1 - k^2x^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}\, dx$$

Consecuentemente, la longitud del arco de elipse comprendido entre $x = 0$ y $x = x_1 \leq 1$ es

$$s(x) = \int_0^{x_1} \frac{1 - k^2x^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}\, dx. \tag{8.6}$$

Si no estuviera el numerador $1 - k^2x^2$ tendríamos una fórmula de adición para esta integral. De hecho, sólo la tenemos para $k = 0$, pero este caso corresponde a una circunferencia, es decir, a la fórmula de adición del seno.

Desde Euler, los matemáticos buscaron una fórmula de adición para los arcos de elipse semejante a la de la lemniscata. Una muestra del interés que suscitó este problema es que las integrales de la forma

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})\, dx,$$

donde R es una función racional, se conocen desde entonces como *integrales elípticas,* y de aquí derivan las denominaciones de cuerpos elípticos, curvas elípticas, funciones elípticas, etc.

Sin embargo, no existe tal fórmula de adición, y el motivo es que el integrando de (8.6) es una diferencial de segunda clase. En efecto, si llamamos

$$\omega = \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}},$$

ya hemos visto que en términos de $x = z^2$, $y = wz$, la diferencial ω se expresa como $\omega = dx/2y$, donde x e y satisfacen una ecuación $y^2 = x(1 - x)(1 - k^2x)$, y el ejemplo de la página 281 muestra que ω es de primera clase.

Por consiguiente (volviendo a llamar x e y a las funciones de partida), el integrando de (8.6) es de la forma $\eta = (1 - k^2x^2)\omega$, donde ω es una diferencial de primera clase de un cuerpo de funciones elípticas. Estas diferenciales

no tienen ceros ni polos, luego los polos de $1-k^2x^2$ son también polos de η. Concretamente, es fácil ver que la función $1-k^2x^2$ tiene un polo doble en el infinito con residuo nulo, por lo que η es una diferencial de segunda clase.

Si repasamos los argumentos que nos han llevado a concluir que las integrales de formas elípticas de primera clase cumplen teoremas de adición, veremos que ello depende únicamente de que las integrales hasta divisores principales son nulas módulo periodos (la mitad del teorema de Abel), y si nos fijamos en la prueba de este hecho veremos que casi vale para diferenciales de segunda clase, salvo por que si en la fórmula (8.4) la diferencial ω es de segunda clase, la función g puede tener polos, con lo que en lugar de $g(P)\operatorname{Res}_P\eta$ hay que poner $\operatorname{Res}_P(g\eta)$, y el análisis de los residuos de $g\eta$ es más delicado. Aunque no vamos a entrar en ello, afinando los razonamientos es posible tratar este caso y obtener una especie de fórmula de adición para integrales de segunda clase. Concretamente, para la integral del arco de elipse resulta que

$$\int_0^{x_1}\frac{1-k^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx+\int_0^{x_2}\frac{1-k^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx$$

$$=\int_0^{x'}\frac{1-k^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx+2k^2x_1x_2x',$$

donde

$$x'=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{1-k^2x_1^2x_2^2},$$

pero la presencia del último término impide que esta relación pueda usarse para sumar arcos de elipse (salvo que la excentricidad sea $k=0$, con lo que volvemos al caso de la circunferencia).

Para el caso de diferenciales de tercera clase también es posible hacer algo similar, pero el resultado es todavía más complicado. De todos modos, debemos tener presente que, si bien las fórmulas de adición de integrales estuvieron en la base de las investigaciones que llevaron a los teoremas que hemos estudiado en este capítulo, lo cierto es que desde un punto de vista moderno son más bien hechos anecdóticos, pues el valor de estos teoremas reside en sus repercusiones sobre los cuerpos de funciones algebraicas, y ello sólo involucra a las integrales de diferenciales de primera clase.

8.6 Funciones elípticas complejas

Como consecuencia del teorema de Abel-Jacobi, todo cuerpo de funciones elípticas sobre el cuerpo de los números complejos puede representarse como el cuerpo de las funciones meromorfas de un toro complejo $T=\mathbb{C}/R$, donde R es un retículo (completo) en $\mathbb{C}$. Si llamamos $p:\mathbb{C}\longrightarrow T$ a la proyección canónica, vemos que cada función meromorfa f en T se corresponde con una función meromorfa $\bar{f}=p\circ f$ en $\mathbb{C}$ con la propiedad de que $\bar{f}(z+\omega)=\bar{f}(z)$, para todo $\omega\in R$. Esto significa que los elementos de R son periodos de $\bar{f}$, luego $\bar{f}$ es

lo que en [VC 6.9] llamamos una función elíptica sobre R. Recíprocamente, es claro que toda función elíptica sobre R determina una función meromorfa sobre el toro complejo T.

Así pues, tenemos una aplicación $f \mapsto \bar{f}$ que biyecta el conjunto de las funciones meromorfas sobre T con el conjunto de las funciones elípticas sobre R.

Muchas de las propiedades demostradas en [VC] sobre funciones elípticas sobre un retículo completo $R \subset \mathbb{C}$ son consecuencias inmediatas de las propiedades generales de los cuerpos de funciones elípticas, en el sentido general. Por ejemplo, es inmediato que forman un subcuerpo del cuerpo $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ de todas las funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ y que la aplicación $f \mapsto \bar{f}$ es un isomorfismo de cuerpos.

Recíprocamente, puesto que todo toro complejo $T = \mathbb{C}/R$ es una superficie de Riemann compacta, el teorema 5.59 nos da que el cuerpo de las funciones elípticas sobre R es un cuerpo de funciones algebraicas de género 1 (puesto que los toros, como superficies topológicas, tienen género 1).

La prueba general del teorema 5.59 depende del hecho no trivial de que en toda superficie de Riemann compacta existen funciones meromorfas no constantes, pero en el caso de un toro complejo esto es consecuencia, por ejemplo, del teorema [VC 6.12], que prueba la existencia de funciones elípticas no constantes sobre cualquier retículo completo en $\mathbb{C}$.

En lo sucesivo consideraremos indistintamente a las funciones elípticas como funciones meromorfas doblemente periódicas en $\mathbb{C}$ o como funciones meromorfas en un toro $T = \mathbb{C}/R$.

Como la proyección $p : \mathbb{C} \longrightarrow T$ hace corresponder cada punto de T con infinitos puntos de $\mathbb{C}$, a la hora de contar ceros y polos de una función elíptica en $\mathbb{C}$ necesitamos restringirnos a un paralelogramo fundamental

$$P = \{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \mid 0 \le \alpha < 1,\ 0 \le \beta < 1\},$$

donde $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$. Tenemos que P depende de la base de R elegida, pero lo importante es que p biyecta cualquier paralelepípedo fundamental de R con el toro $T = \mathbb{C}/R$.

Así, el teorema 5.42 nos da que una función elíptica no constante sobre R tiene el mismo número (no nulo) de ceros y de polos —contados con su multiplicidad— ya sea en el toro $\mathbb{C}/R$ o bien en un paralelogramo fundamental de R.

Esto hace que podamos definir el orden de una función elíptica sobre un retículo R como el número de ceros (o, equivalentemente, el número de polos) que tiene sobre un paralelogramo fundamental de R (contados con su multiplicidad) (véase la definición [VC 6.17] y el teorema [VC 6.18]).

El teorema 5.42 implica además que si K es el cuerpo de funciones elípticas sobre un retículo R y $\alpha \in K$ tiene orden n, entonces $|K : \mathbb{C}(\alpha)| = n$. En particular vemos que no puede haber funciones elípticas de orden 1, pues esto implicaría que $K = \mathbb{C}(\alpha)$ y entonces K tendría género 0.

En cambio, en todo retículo existen funciones elípticas de orden 2, como por ejemplo la función $\wp$ de Weierstrass definida en [VC 6.13], que tiene polos dobles

en los puntos de R. Además, su derivada $\wp'$ tiene orden 3, con polos de orden 3 en los puntos de R (teorema [VC 6.14]).

Estos hechos bastan para probar el teorema siguiente (compárese con el teorema [VC 6.29]):

Teorema 8.24 *Si R es un retículo en $\mathbb{C}$ y $\wp$ es su función de Weierstrass, entonces $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ es el cuerpo de todas las funciones elípticas sobre R.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta el teorema 5.42, según el cual, si K es el cuerpo de las funciones elípticas sobre R, se cumple $|K : \mathbb{C}(\wp)| = 2$ y $|K : \mathbb{C}(\wp')| = 3$. De aquí se sigue que $\wp' \notin \mathbb{C}(\wp)$ y que $\mathbb{C}(\wp, \wp') = K$. ∎

Más aún [VC 6.25] prueba que $\wp$ y $\wp'$ no son unos generadores cualesquiera del cuerpo de todas las funciones elípticas sobre el retículo correspondiente, sino que además satisfacen una ecuación polinómica en forma normal de Weierstrass

$$Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3,$$

donde el polinomio de la derecha no tiene raíces múltiples por [VC 6.26].

Consideremos ahora un toro complejo $T = \mathbb{C}/R$ y la curva proyectiva $V \subset \mathrm{P}^2$ dada por la ecuación afín $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$. Definimos $\phi : T \longrightarrow V$ mediante $P \mapsto (\wp(P), \wp'(P))$, con el convenio de que $\phi(0)$ es el único punto infinito de V, de coordenadas homogéneas $(0, 1, 0)$. Si lo llamamos ∞, tenemos que $\phi(0) = \infty$.

Obviamente $\phi|_{T\setminus\{0\}} : T \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ es holomorfa, luego también lo es como aplicación en V. Así pues, ϕ es holomorfa salvo a lo sumo en 0. Para probar que también aquí lo es, hemos de componerla con una carta de V alrededor de ∞. Sirve la restricción de cualquier función $f \in \mathbb{C}(V)$ tal que $v_\infty(f) = 1$. Por ejemplo, podemos tomar $f = X/Y$. Claramente, $(\phi \circ f)(P) = \wp(P)/\wp'(P)$, que es una función holomorfa en un entorno de 0.

Observemos ahora que ϕ es biyectiva. En efecto, si $\wp(P_1) = \wp(P_2) = \alpha$ y $\wp'(P_1) = \wp'(P_2)$ con $P_1 \neq P_2$, entonces $P_i \neq 0$, pues $\wp$ sólo tiene un polo en 0. Así pues, α es finito y podemos considerar la función $\wp - \alpha$. Vemos que tiene ceros en P_1 y P_2. Como $\wp$ es par, también $-P_2$ es un cero de $\wp - \alpha$.

Distinguimos dos casos: si $P_2 \neq -P_2$, entonces, dado que la función $\wp - \alpha$ tiene orden 2, ha de ser $P_1 = -P_2$, pero entonces $\wp'(P_1) = -\wp'(P_2)$, lo que obliga a que $\wp'(P_1) = \wp'(P_2) = 0$, pero esto es imposible, ya que entonces $\wp - \alpha$ tendría (contando multiplicidades) al menos cuatro ceros.

La otra posibilidad es $P_2 = -P_2$, y entonces $\wp'(P_2) = \wp'(-P_2) = -\wp'(P_2)$, luego ha de ser $\wp'(P_2) = 0$ y así $\wp - \alpha$ tiene un cero en P_1 y dos en P_2, en contradicción nuevamente con que su orden es 2.

La suprayectividad de ϕ es ahora trivial, pues la imagen ha de ser abierta porque ϕ es holomorfa y ha de ser cerrada porque T es compacto. Con esto casi hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 8.25 *Sea $T = \mathbb{C}/R$ un toro complejo, sea $\wp$ su función de Weierstrass y sea V la curva elíptica dada por $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$. Entonces la aplicación $\phi : T \longrightarrow V$ dada por $\phi(P) = (\wp(P), \wp'(P))$ para $P \neq 0$ y $\phi(0) = \infty$ es biholomorfa y un isomorfismo de grupos (cuando en V consideramos la estructura de grupo que resulta de tomar como elemento neutro el punto infinito).*

DEMOSTRACIÓN: Sólo falta probar que ϕ es un homomorfismo de grupos. Ahora bien, $P+Q=S$ equivale a que el divisor $PQ/S0$ sea principal, es decir, a que exista una función elíptica α con ceros en P y Q y polos en S y 0. Entonces $\phi^{-1}\circ\alpha$ es una función meromorfa en V (luego racional) con ceros en $\phi(P)$ y $\phi(Q)$ y polos en $\phi(S)$ e ∞, luego $\phi(P)+\phi(Q)=\phi(S)$. Aquí hemos usado que la estructura de grupo en T coincide con la inducida por su estructura de superficie de Riemann cuando tomamos como elemento neutro el 0 (teorema 8.23). ∎

Nota En principio, el teorema anterior sólo se aplica a las ecuaciones de Weierstrass tales que sus coeficientes g_2 y g_3 son los asociados a un retículo complejo R, pero en realidad el teorema [VC 7.18] prueba que para cuaquier par de números (g_2, g_3) que determinen una ecuación de Weierstrass (es decir, con determinante no nulo) existe un retículo complejo R tal que $g_2(R)$ y $g_3(R)$ son los coeficientes dados, por lo que el teorema anterior se aplica en realidad a todas las ecuaciones de Weierstrass.

El teorema nos permite identificar las funciones meromorfas sobre el toro $T=\mathbb{C}/R$ (es decir, las funciones elípticas sobre el retículo R) con las funciones racionales sobre V. Las funciones $\wp$ y $\wp'$ se corresponden con x e y respectivamente.

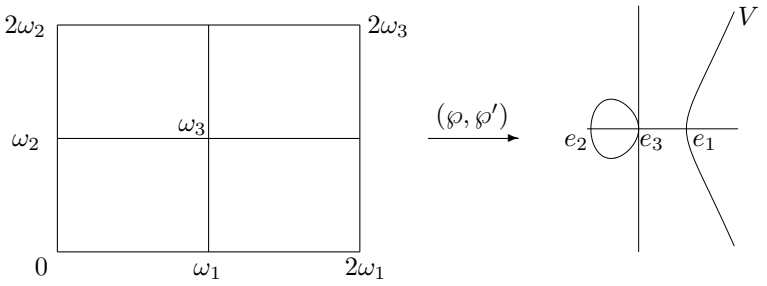
El isomorfismo hace corresponder la diferencial de primera clase $\omega=dx/y$ en V con $d\wp/\wp'$, y es fácil ver que ésta es simplemente la forma dz en T. A partir de aquí se sigue sin dificultad que el isomorfismo del teorema anterior es el inverso del isomorfismo de Abel-Jacobi de la variedad V determinado por ω. ∎

Vamos a analizar con más detalle las curvas elípticas V que admiten una ecuación en forma normal de Weierstrass $Y^2=4X^3-g_2X-g_3$ con invariantes g_2, g_3 reales. Probaremos que estas curvas se corresponden con los retículos complejos generados por un periodo real y otro imaginario puro, o bien por dos periodos imaginarios conjugados.

En esta sección emplearemos la notación clásica de Weierstrass, de modo que $R=\langle 2\omega_1, 2\omega_2\rangle_{\mathbb{Z}}$. Los números ω_1 y ω_2 se llaman *semiperiodos.* También nos va a interesar el semiperiodo $\omega_3=\omega_1+\omega_2$ pues, según sabemos, $e_1=\wp(\omega_1)$, $e_2=\wp(\omega_2)$ y $e_3=\wp(\omega_3)$ son los ceros de $4x^3-g_2x-g_3$, luego ω_1, ω_2 y ω_3 son los ceros de $\wp'(z)$.

Caso ω_1 real y ω_2 imaginario puro No perdemos generalidad si suponemos que $\omega_1>0$ y $\omega_2/i>0$. En este caso, el retículo $R=\langle 2\omega_1, 2\omega_2\rangle_{\mathbb{Z}}$ es estable para la conjugación compleja, es decir, cuando ω recorre R, entonces $\bar\omega$ también recorre R. De la definición de $\wp(z)$ se sigue entonces que $\overline{\wp(z)}=\wp(\overline{z})$ y, en particular, $\wp(z)$ es real cuando z es real. Como $\wp(z)$ es par, si $x\in\mathbb{R}$ tenemos también que $\overline{\wp(ix)}=\wp(-ix)=\wp(ix)$, luego $\wp(z)$ también es real sobre el eje imaginario. Por consiguiente, e_1 y e_2 son reales, y lo mismo vale para e_3, pues es la tercera raíz del polinomio $4x^3-g_2x-g_3$ y, por consiguiente, $e_1+e_2+e_3=0$. También es claro que los invariantes g_2 y g_3 son reales (por la propia definición).

Sabemos que la aplicación $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ hace corresponder los puntos del paralelogramo —rectángulo en este caso— de vértices, 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$ y $2\omega_3$ con la curva elíptica V de ecuación $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$. Vamos a estudiar más a fondo esta correspondencia. Admitiendo las desigualdades $e_2 < e_3 < e_1$ —que enseguida demostraremos— es claro que el polinomio $4X^3 - g_2X - g_3$ es mayor o igual que 0 en $[e_2, e_3] \cup [e_1, +\infty[$, por lo que la parte real de V tiene la forma que muestra la figura siguiente:

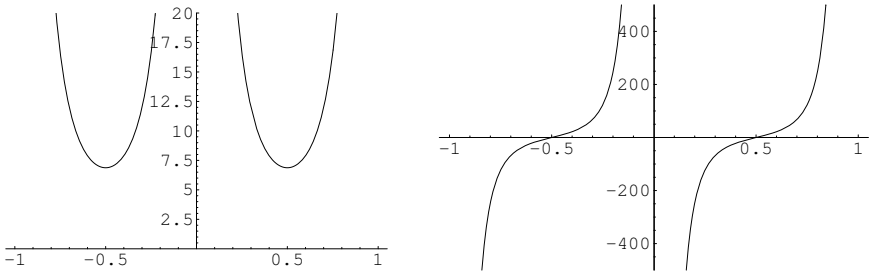


En principio sabemos que los cuatro vértices del rectángulo son polos de $\wp$ y de $\wp'$, por lo que todos ellos se corresponden con el único punto infinito de V. También tenemos que $\wp'$ se anula en los tres semiperiodos, luego éstos se corresponden con los tres puntos de corte de V con el eje $Y = 0$.

La parte principal de $\wp'(z)$ en 0 es $-2/z^3$. Esto implica que

$$\lim_{x\to 0^+} \wp'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \wp'(x) = +\infty.$$

Teniendo en cuenta que el único cero de $\wp'(x)$ en $[0, 2\omega_1]$ es ω_1 y la periodicidad, concluimos que $\wp'(x)$ es negativa en $]0, \omega_1[$ y positiva en $]\omega_1, 2\omega_1[$, luego $\wp(x)$ es decreciente en $]0, \omega_1[$ y creciente en $]\omega_1, 2\omega_1[$. Así pues, $\wp(x)$ tiene un mínimo en ω_1, donde toma el valor e_1. En definitiva, su gráfica ha de ser como muestra la figura siguiente, que muestra las gráficas de $\wp$ y $\wp'$ para el retículo $R = \langle 1, i\rangle$:



Tenemos que $\wp'(x)^2 = 4\wp(x)^3 - g_2\wp(x) - g_3$ no se anula en $]0, \omega_1[$, y cuando x varía de 0 a ω_1 la función $\wp(x)$ desciende de $+\infty$ a e_1, luego el polinomio $4x^3 - g_2x - g_3$ no se anula en $]e_1, +\infty[$. Esto significa que, tal y como afirmábamos, e_1 es la mayor de las tres raíces e_1, e_2, e_3.

Ahora es claro que cuando x recorre el intervalo $[0, 2\omega_1]$ el arco $(\wp(x), \wp'(x))$ recorre en sentido horario la rama derecha de la curva V. En particular, la función $\wp'(x)$ es estrictamente creciente en $]0, 2\omega_1[$, tal y como muestra la figura anterior.

Una consecuencia de lo que acabamos de obtener es la siguiente: puesto que una integral sobre un arco no depende de la parametrización de éste, tenemos que

$$\int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \omega_1. \tag{8.7}$$

En efecto, la integral puede verse como la integral de la forma dx/y sobre la mitad superior de la rama derecha de V, la cual se corresponde a su vez con la integral de dz sobre el segmento $[\omega_1, 2\omega_1]$. En otras palabras, basta hacer el cambio de variable $x = \wp(t)$.

Estudiamos ahora el segmento $[0, 2\omega_2]$. Para ello observamos que

$$\wp(iz|\omega_1, \omega_2) = -\wp(z| - i\omega_2, i\omega_1), \qquad \wp'(iz|\omega_1, \omega_2) = i\wp(z| - i\omega_2, i\omega_1).$$

En efecto:

$$\wp(iz|\omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in -iR\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(iz - i\omega)^2} - \frac{1}{(i\omega)^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{z^2} - \sum_{\omega \in -iR\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = -\wp(z| - i\omega_1, -i\omega_2) = -\wp(z| - i\omega_2, i\omega_1).$$

La segunda relación se obtiene derivando ésta. Además:

$$e_1(\omega_1, \omega_2) = \wp(i(-i\omega_1)|\omega_1, \omega_2) = -\wp(-i\omega_1| - i\omega_2, i\omega_1) = -e_2(-i\omega_2, i\omega_1).$$

Igualmente, $e_2(\omega_1, \omega_2) = -e_1(-i\omega_2, \omega_1)$ y, como $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, ha de ser $e_3(\omega_1, \omega_2) = -e_3(-i\omega_2, i\omega_1)$.

De aquí se sigue que los invariantes de $\wp(z| - i\omega_2, i\omega_1)$ son g_2 y $-g_3$. Aplicando a esta función los resultados anteriores concluimos que e_2 es la menor raíz entre e_1, e_2 y e_3, luego tenemos, en efecto, las desigualdades $e_2 < e_3 < e_1$.

Cuando z varía entre 0 y ω_2, sabemos que $\wp(z| - i\omega_2, i\omega_1)$ decrece de $+\infty$ hasta $-e_2$, luego $\wp(z)$ crece de $-\infty$ hasta e_2. Similarmente, cuando z varía entre ω_2 y $2\omega_2$ la función $\wp(z)$ decrece de e_2 hasta $-\infty$. Así, el segmento $[0, 2\omega_2]$ se corresponde con los puntos de V de la forma $(x, \pm i\sqrt{-4x^3 + g_2x + g_3})$, con $x \le e_2$. Ahora es claro que

$$i\int_{-\infty}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{-4x^3 + g_2x + g_3}} = \omega_2. \tag{8.8}$$

Observemos a continuación que si x es un número real, entonces

$$\wp(x + \omega_2) = \wp(x - \omega_2) = \wp(\overline{x + \omega_2}) = \overline{\wp(x + \omega_2)},$$

luego $\wp$ toma valores reales sobre el segmento $[\omega_2, \omega_3]$. Puesto que en los extremos toma los valores $e_2 < e_3$ y $\wp'$ no se anula, concluimos que es estrictamente creciente, luego $\wp'$ es positiva, luego el segmento $[\omega_2, \omega_3]$ se corresponde con la parte positiva de la rama izquierda de la parte real de V. Similarmente concluimos que el segmento $[\omega_3, 2\omega_1 + \omega_2]$ se corresponde con la parte negativa de dicha rama. En definitiva, el segmento $[\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2]$ se corresponde con la rama izquierda de V recorrida en sentido horario. En particular,

$$\int_{e_2}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \omega_1.$$

Del mismo modo se comprueba que la función $\wp(z)$ es real sobre el segmento $[\omega_1, \omega_1 + 2\omega_2]$: primero crece de e_3 a e_1 y luego decrece de e_1 a e_3 (la función $\wp'$ toma valores imaginarios puros). Por consiguiente, este segmento se corresponde con los puntos de V de la forma $(x, \pm i\sqrt{-4x^3 + g_2x + g_3})$, con $e_3 \le x \le e_1$, luego

$$i\int_{e_3}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{-4x^3 + g_2x + g_3}} = \omega_2.$$

Ahora demostraremos que cualquier curva V determinada por una ecuación de la forma $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$ con invariantes reales g_2 y g_3 y de modo que el polinomio $4X^3 - g_2X - g_3$ tenga tres raíces reales distintas $e_2 < e_3 < e_1$ está parametrizada por las funciones de Weierstrass de un retículo del tipo que estamos estudiando. Para ello conviene que antes mostremos unas expresiones alternativas para algunas de las integrales que hemos calculado.

Aplicamos a (8.7) el cambio de variable

$$x = e_2 + \frac{e_1 - e_2}{t^2},$$

con lo que obtenemos

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \int_0^1 \frac{\frac{2(e_1-e_2)}{t^3}}{\frac{2(e_1-e_2)^{3/2}}{t^3}\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{8.9}$$

donde

$$0 < k^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} < 1.$$

En (8.8) cambiamos x por $-x$ y luego hacemos

$$x = \frac{e_1 - e_2}{t^2} - e_1.$$

Tras un cálculo similar al anterior llegamos a

$$\omega_2 = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}, \tag{8.10}$$

donde $k'^2 = 1 - k^2$. Por consiguiente,

$$\frac{i\omega_1}{\omega_2} = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}}. \tag{8.11}$$

Consideremos ahora una cúbica de ecuación $Y^2 = 4X^4 - g_2X - g_3$, donde el miembro derecho tiene tres raíces reales $e_3 < e_2 < e_1$. Equivalentemente, consideremos tres números reales $e_3 < e_2 < e_1$ tales que $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ y definamos g_2 y g_3 mediante

$$4X^4 - g_2X - g_3 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3).$$

Vamos a encontrar un retículo $R = \langle 2\omega_1, 2\omega_2\rangle_{\mathbb{Z}}$, con $\omega_1 > 0$, $\omega_2/i > 0$, cuyos invariantes sean los dados. Para ello definimos ω_1 por (8.7) y ω_2 por (8.8). Es fácil ver que las integrales convergen, y claramente $\omega_1 > 0$, $\omega_2/i > 0$. Así tenemos un retículo R que a su vez determina unos invariantes $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Nuestro objetivo es probar que coinciden con g_2, g_3, e_1, e_2, e_3.

Veamos en primer lugar que existe un único número real $0 < k^2 < 1$ tal que, tomando $k'^2 = 1 - k^2$, se cumple (8.11). En efecto, notemos que cuando k^2 crece de 0 a 1, el numerador del miembro derecho de (8.11) crece de $\pi/2$ a $+\infty$, mientras que k'^2 decrece de 1 a 0 y el denominador decrece de $+\infty$ a $\pi/2$. Por consiguiente la fracción crece de 0 a $+\infty$ y, ciertamente, hay un único valor de k^2 para el que se cumple (8.11).

La relación (8.9) se cumple ahora para e_1, e_2 y $k^2 = (e_3 - e_2)/(e_1 - e_2)$ como para $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ y $\bar{k}^2 = (\bar{e}_3 - \bar{e}_2)/(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)$. Similarmente ocurre con (8.10), luego concluimos que tanto k^2 como $\bar{k}^2$ cumplen (8.11). Por la unicidad ha de ser $k^2 = \bar{k}^2$. Entonces (8.9) implica que $\sqrt{e_1 - e_2} = \sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_2}$ o, más sencillamente, $e_1 - e_2 = \bar{e}_2 - \bar{e}_2$. A su vez, $k^2 = \bar{k}^2$ implica entonces que $e_3 - e_2 = \bar{e}_3 - \bar{e}_2$. Uniendo a esto que $e_1 + e_2 + e_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = 0$, vemos que las dos ternas de invariantes satisfacen un mismo sistema de tres ecuaciones, luego son iguales. Esto implica que también $g_2 = \bar{g}_2$, $g_3 = \bar{g}_3$.

El teorema siguiente resume lo que hemos probado:

Teorema 8.26 *Si V es una curva elíptica de ecuación $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$, donde el polinomio de la derecha tiene tres raíces reales distintas, entonces V puede parametrizarse por las funciones de Weierstrass de un retículo complejo generado por un número real ω_1 y un número imaginario puro ω_2. Equivalentemente, el grupo de periodos de V respecto a la diferencial de primera clase dx/y es de esta forma.*

Este resultado se extiende fácilmente al caso en que V satisface una ecuación de la forma $Y^2 = a(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3)$, con $a \neq 0$ y e_1, e_2, e_3 números reales distintos. Entonces, el cambio

$$X = \pm X' + \frac{e_1 + e_2 + e_3}{3}, \qquad Y = \frac{\sqrt{|a|}}{2}\, Y',$$

(donde el signo $\pm$ es el de a) determina una transformación proyectiva de P^2 en sí mismo que se restringe a un isomorfismo entre V y una curva V' en las condiciones del teorema. Es fácil ver así que la diferencial de primera clase dx/y de V tiene igualmente un periodo real y otro imaginario puro, el primero de los cuales puede obtenerse integrando sobre cualquiera de las dos ramas reales de V, etc.

Caso ω_1 y ω_2 conjugados Consideremos ahora un retículo R generado por periodos $2\omega_1 = a + bi$ y $2\omega_2 = a - bi$. No perdemos generalidad si suponemos a, $b > 0$. Como en el caso anterior, R es invariante por la conjugación, lo que se traduce en la relación $\overline{\wp(z)} = \wp(\bar{z})$. A su vez, esto implica que $\wp(z)$ es real cuando z es real o imaginario puro. Igualmente, $\wp'(z)$ es real cuando z es real e imaginario puro cuando z es imaginario puro. Los invariantes g_2 y g_3 también son reales. Lo que ya no es cierto es que las raíces e_1, e_2, e_3 sean reales. En efecto,

$$\bar{e}_1 = \overline{\wp(\omega_1)} = \wp(\bar{\omega}_1) = \wp(\omega_2) = e_2,$$

luego e_1 y e_2 son dos números imaginarios conjugados. Por el contrario, e_3 es real, ya que $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = a$ lo es.

Modificaciones obvias en los razonamientos del caso anterior nos dan que $\wp'(x)$ es estrictamente creciente en $]0, 2\omega_3[$, mientras que $\wp(x)$ tiene un mínimo en ω_3. Así mismo llegamos a que

$$a = \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = \int_{e_3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}.$$

Si consideramos los periodos $2i\omega_1$ y $-2i\omega_2$, entonces ω_3, g_2, g_3 y e_3 pasan a ser $(\omega_1 - \omega_2)/i = b$, g_2, $-g_3$ y $-e_3$, y la igualdad anterior se convierte en

$$bi = \omega_1 - \omega_2 = i\int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x + g_3}} = i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{-4x^3 + g_2x + g_3}}.$$

Recíprocamente, vamos a ver que, dada una ecuación $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$, donde el polinomio de la derecha tiene dos raíces complejas conjugadas e_1, e_2 y una raíz real e_3, el retículo R de periodos $2\omega_1 = a+bi$, $2\omega_2 = a-bi$ determinados por las dos integrales anteriores tiene como invariantes los valores dados, es decir, que sus funciones de Weierstrass parametrizan la curva determinada por la ecuación dada.

Como en el caso anterior, empezaremos por transformar las expresiones integrales de los semiperiodos. El cambio $x = e_3 + t^2$ nos da:

$$a = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + e_3 - e_1)(t^2 + e_3 - e_2)}}$$

Hagamos $e_3 - e_1 = \rho e^{i\theta}$, $e_3 - e_2 = \rho e^{-i\theta}$, con $0 < \theta < \pi$, donde estamos suponiendo que $\operatorname{Im} e_1 < 0$. En caso contrario haríamos el cambio $e_3 - e_2 = \rho e^{i\theta}$.

$$a = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 2\rho t^2\cos\theta + \rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 2t^2\cos\theta + 1}}, \tag{8.12}$$

donde hemos hecho el cambio $t = \sqrt{\rho}\, t'$.

En la integral que nos da b cambiamos x por $-x$, con lo que tenemos

$$b = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4(x+e_1)(x+e_2)(x+e_3)}},$$

Ahora hacemos $t = -e_2 + t^2$ y, similarmente al caso de a, llegamos a que

$$b = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 - 2t^2\cos\theta + 1}}.$$

Concluimos así que

$$\frac{a}{b} = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 2t^2\cos\theta + 1}}}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 - 2t^2\cos\theta + 1}}}. \tag{8.13}$$

Cuando θ varía entre 0 y π, tenemos que $\cos\theta$ decrece de 1 a -1, con lo que el numerador del miembro derecho crece de $\pi/2$ a $+\infty$, mientras que el denominador decrece de $+\infty$ hasta $\pi/2$. Por consiguiente, la fracción crece de 0 a $+\infty$. Concluimos que, fijados a, $b > 0$, existe un único valor de θ para el que se cumple la igualdad.

Ahora ya podemos razonar exactamente como en el apartado anterior: fijados g_1 y g_2 (o, equivalentemente, e_1, e_2, e_3, definimos ω_1 y ω_2 mediante las expresiones integrales que hemos hallado. Estos semiperiodos determinan un retículo R con invariantes $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. La ecuación (8.13) se cumple tanto con θ como con $\bar{\theta}$, luego ha de ser $\theta = \bar{\theta}$. De la ecuación (8.12) obtenemos $\rho = \bar{\rho}$, con lo que $e_3 - e_1 = \bar{e}_3 - \bar{e}_1$, $e_3 - e_2 = \bar{e}_3 - \bar{e}_2$, lo cual, unido a que las tres raíces suman 0, nos permite concluir que $e_i = \bar{e}_i$ para $i = 1, 2, 3$. En resumen:

Teorema 8.27 *Si V es una curva elíptica de ecuación $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$, donde el polinomio de la derecha tiene una raíz real y dos complejas conjugadas, entonces V puede parametrizarse por las funciones de Weierstrass de un retículo complejo generado por dos números complejos conjugados. Equivalentemente, el grupo de periodos de V respecto a la diferencial de primera clase dx/y es de esta forma.*

Al igual que ocurría con el teorema 8.26, el resultado se extiende fácilmente al caso de una curva de ecuación $Y^2 = a(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3)$, donde e_1 y e_2 son números complejos conjugados y e_3 es real.

Apéndice A

Divisores en variedades regulares

En este apéndice demostraremos unos resultados adicionales sobre curvas elípticas que requieren más geometría algebraica de la que hemos visto hasta aquí. Concretamente, requieren generalizar la teoría de divisores a variedades regulares de dimensión arbitraria. Sabemos que el grupo de divisores de una curva proyectiva regular es el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por sus puntos. En el caso de una variedad arbitraria, hemos de sustituir los puntos por las subvariedades de codimensión 1 (que en el caso de una curva coinciden con los puntos). Empezaremos, pues, estudiando estas subvariedades.

A.1 Subvariedades de codimensión 1

En esta sección demostraremos una generalización del teorema 3.6 al caso de subvariedades de codimensión 1 en una variedad regular V que no sea necesariamente A^n o P^n. Para ello conviene generalizar como sigue las correspondencias entre conjuntos algebraicos e ideales:

Definición A.1 Sea W una variedad afín sobre un cuerpo de constantes k y sea $S \subset k[W]$. Definimos

$$V_W(S) = \{P \in W \mid f(P) = 0 \text{ para todo } f \in S\}.$$

Así mismo, si $C \subset S$, definimos el ideal

$$I_W(C) = \{f \in k[W] \mid f(P) = 0 \text{ para todo } P \in C\} \subset k[W].$$

Estos conceptos generalizan obviamente a los que introdujimos en el capítulo I para $W = A^n$. Es fácil ver que las propiedades básicas en torno a ellos se generalizan igualmente. Por ejemplo, si $S \subset k[W]$, entonces $V_W(S)$ es un

subconjunto algebraico de W. Para probarlo fijamos un sistema de referencia y tomamos

$$S' = \{F \in k[X_1, \dots, X_n] \mid [F] \in S\}.$$

Podemos suponer que $0 \in S$, con lo que $I(W) \subset S'$. Claramente

$$V_W(S) = V(S').$$

Por otra parte, si $I \subset k[W]$ es un ideal, tenemos que

$$I_W(V_W(I)) = \operatorname{rad} I.$$

En efecto, como en el argumento anterior, llamamos

$$I' = \{F \in k[X_1, \dots, X_n] \mid [F] \in I\},$$

que es un ideal del anillo de polinomios, y entonces

$$I_W(V_W(I)) = I_W(V(I')).$$

Si $f = [F] \in I_W(V_W(I))$, tenemos que $F \in I(V(I')) = \operatorname{rad} I'$, luego $F^r \in I'$ para cierto natural r, luego $f^r \in I$, luego $f \in \operatorname{rad} I$. El recíproco es obvio.

También es claro que un conjunto algebraico $C \subset W$ es irreducible si y sólo si el ideal $I_W(C)$ es primo.

En estos términos podemos reformular los teoremas 3.9 y 3.10, según los cuales, si W es una variedad afín y $f \in k[W]$ es una función regular no nula, entonces $V_W(f)$ es el conjunto vacío o bien un conjunto algebraico formado por variedades de codimensión 1.

Definición A.2 Sea V una variedad cuasiproyectiva sobre un cuerpo k y sea $P \in V$. Sea W una subvariedad (cerrada) de V de codimensión 1 tal que $P \in W$. Diremos que una función $\pi \in \mathcal{O}_P(V)$ es una *ecuación local* de W en un entorno de P si existe un entorno afín U de P en V tal que $\pi \in k[U]$ y $I_U(W \cap U) = (\pi)$ (y, por lo tanto, $W \cap U = V_U(\pi)$).

El resultado principal que queremos demostrar es que toda subvariedad de dimensión 1 admite una ecuación local en un entorno de cada uno de sus puntos regulares en V. En primer lugar daremos una caracterización de las ecuaciones locales.

En las condiciones de la definición anterior, llamamos $\mathfrak{m}_P(V/W)$ al ideal de $\mathcal{O}_P(V)$ formado por las funciones que se anulan en un entorno de P en W.

Observemos que $\mathfrak{m}_P(V/W)$ es un ideal primo, pues si $fg \in \mathfrak{m}_P(V/W)$, podemos tomar un entorno U de P tal que $f, g \in k[U]$ y fg se anule en $W_0 = W \cap U$, es decir, $fg \in I_U(W_0)$, que es un ideal primo de $k[U]$, luego uno de los dos factores está en $I_U(W_0) \subset \mathfrak{m}_P(V/W)$.

Si V es una curva y W es un punto $P \in V$, entonces $\mathfrak{m}_P(V/W) = \mathfrak{m}_P$.

Teorema A.3 *Sea V una variedad cuasiproyectiva, $P \in V$ y W una subvariedad de codimensión 1 tal que $P \in W$. Una función $\pi \in \mathcal{O}_P(V)$ es una ecuación local de W en un entorno de P si y sólo si $\mathfrak{m}_P(V/W) = (\pi)$.*

Demostración: Si π es una ecuación local de W en un entorno (afín) U de P, entonces $I_U(W \cap U) = (\pi)$. Si $u/v \in \mathfrak{m}_P(V/W)$, donde u, $v \in k[U]$, $v(P) \neq 0$, tenemos que u es regular en $W \cap U$ y se anula en un abierto (denso) de esta variedad, luego u se anula en todo $W \cap U$. Por lo tanto $u \in I_U(W \cap U)$, luego $u = f\pi$, con $f \in k[U]$, luego $u/v = (f/v)\pi$, con $f/v \in \mathcal{O}_P(V)$.

Supongamos ahora que $\mathfrak{m}_P(V/W) = (\pi)$. Sea U_0 un entorno afín de P en V tal que $\pi \in k[U_0]$ y se anule en $W \cap U_0$. Como el anillo $k[U_0]$ es noetheriano, tenemos que $I_{U_0}(W \cap U_0) = (f_1, \ldots, f_r)$, para ciertas funciones $f_i \in \mathfrak{m}_P(V/W)$. Por consiguiente $f_i = g_i\pi$, para ciertas funciones $g_i \in \mathcal{O}_P(V)$.

Las funciones g_i son regulares en un entorno de P, que por 2.39 podemos tomar principal, es decir, de la forma $U = U_0 \setminus V_{U_0}(g)$, con $g \in k[U_0]$. Según el teorema 2.38 se cumple que $k[U] = k[U_0][1/g]$.

Llamemos $W_0 = W \cap U$. Si demostramos que $I_U(W_0) = (f_1, \ldots, f_r)$, tendremos, de hecho, que $(\pi) \subset I_U(W_0) \subset (\pi)$, y el teorema estará probado.

Una inclusión es obvia. Si $v \in I_U(W_0)$, entonces $v = u/g^r$, con $u \in k[U_0]$. La función u se anula en W_0, que es un abierto (denso) en $W \cap U_0$, luego $u \in I_{U_0}(W \cap U_0)$ y $1/g^r \in k[U]$, de donde concluimos que $v \in (f_1, \ldots, f_r)_{k[U]}$. ∎

De la prueba del teorema anterior se desprende lo siguiente:

Si π, $\pi' \in \mathcal{O}_P(V)$ son dos ecuaciones locales de W en respectivos entornos U_1 y U_2 de P, entonces existe otro entorno afín $U \subset U_1 \cap U_2$ donde ambas funciones son ecuaciones locales de W.

En efecto, ambas funciones están en $\mathfrak{m}_P(V/W)$, y en la prueba del teorema anterior, el abierto U en el cual π es una ecuación local de W se construye en dos partes: primero se toma un abierto U_0, que puede ser cualquiera suficientemente pequeño (luego podemos tomar el mismo para π y π'), y luego se toma U como un abierto principal en U_0, y también sirve cualquiera suficientemente pequeño, luego también podemos tomar el mismo para π y π'. ∎

Otro hecho que se desprende de la prueba de A.3 es que si π es una ecuación local en un entorno de un punto P, entonces dicho entorno puede tomarse arbitrariamente pequeño.

Por último observamos que, para el caso de una curva V, el teorema A.3 afirma que las ecuaciones locales de un punto regular P son simplemente los parámetros locales en P.

Tenemos que las ecuaciones locales de las subvariedades de codimensión 1 que pasan por un punto P son primos en $\mathcal{O}_P(V)$. Recíprocamente, ahora probamos que cada primo de $\mathcal{O}_P(V)$ es la ecuación local de una única subvariedad:

Teorema A.4 *Sea V una variedad cuasiproyectiva, $P \in V$ y π un primo en $\mathcal{O}_P(V)$. Entonces existe una única subvariedad W de codimensión 1 en V tal que $P \in W$ y $(\pi) = \mathfrak{m}_P(V/W)$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos la unicidad: si $\mathfrak{m}_P(V/W) = \mathfrak{m}_P(V/W')$, sea U un entorno de P en V. Si $f \in k[U]$ se anula en $W \cap U$, entonces $f \in \mathfrak{m}_P(V/W)$, luego f se anula en un entorno de P en W', pero por regularidad se anula en $W \cap U'$. Así pues, $I_U(W \cap U) = I_U(W' \cap U)$, luego $W \cap U = W' \cap U$, luego $W = W'$.

Para probar la existencia tomamos un entorno afín U de P tal que $\pi \in k[U]$. El conjunto $V_U(\pi)$ es una unión de subvariedades de U de codimensión 1. Sea W_0 una que contenga a P. Llamemos W' a la unión de las restantes y vamos a probar que $P \notin W'$.

En caso contrario P pertenece a otra variedad $W_1 \subset V_U(\pi)$. Como W_0 y W_1 tienen la misma dimensión, ninguna puede estar contenida en la otra, luego existen funciones h_0, $h_1 \in k[U]$ tales que h_0 es idénticamente nula en W_0 y no en W_1, mientras que h_1 es idénticamente nula en W' y no en W_0. Entonces $h_0h_1 \in I_U(V_U(\pi)) = \operatorname{rad}(\pi)$, luego existe un $r \geq 0$ tal que $(h_0h_1)^r \in (\pi)$, luego $f \mid (h_0h_1)^r$ en $k[U]$ y, por consiguiente, en $\mathcal{O}_P(V)$. Como π es primo en este anillo, divide a un h_i, es decir, $h_i = f\pi$, con $f \in \mathcal{O}_P(V)$. Como f es regular en un entorno de P, concluimos que h_i se anula en un entorno de P en $V_U(\pi)$, luego se anula en W_0 y en W_1, en contradicción con la construcción de las funciones.

Tenemos, pues, que $P \notin W'$, luego restringiendo U a un entorno afín menor, podemos suponer que $V_U(f) = W_0$. Sea W la clausura en V de W_0. Vamos a ver que $\mathfrak{m}_P(V/W) = (\pi)$.

Una inclusión es obvia. Si $u/v \in \mathfrak{m}_P(V/W)$, con u, $v \in k[U]$, $v(P) \neq 0$, tenemos que u se anula en un entorno de P en W_0, pero por regularidad se anula en todo W_0, luego $u \in I_U(V_U(\pi)) = \operatorname{rad}(\pi)$, luego $\pi \mid u^r$ en $k[U]$, luego también en $\mathcal{O}_P(V)$, pero π es primo en este anillo, luego $\pi \mid u$ en $\mathcal{O}_P(V)$, con lo que $u/v \in (\pi)_{\mathcal{O}_P(V)}$. ∎

Para terminar de perfilar la correspondencia entre subvariedades de codimensión 1 que pasan por P y los primos de $\mathcal{O}_P(V)$ nos falta demostrar que toda subvariedad tiene una ecuación local. Para ello necesitamos que el punto P sea regular:

Teorema A.5 *Sea V una variedad cuasiproyectiva, sea $P \in V$ un punto regular y sea $W \subset V$ una subvariedad de codimensión 1 tal que $P \in W$. Entonces W admite una ecuación local en un entorno de P.*

DEMOSTRACIÓN: El hecho de que W tenga codimensión 1 en V implica en particular que $I(V) \subsetneq I(W)$, luego podemos tomar una función $f \in I_V(W)$ no nula. En particular $f \in \mathcal{O}_P(V)$ y no es una unidad porque $f(P) = 0$. Según el teorema 3.39 tenemos que $\mathcal{O}_P(V)$ es un dominio de factorización única, luego podemos descomponer f en factores primos $f = \pi_1 \cdots \pi_r$.

Sea U un entorno afín de P donde todos los π_i sean regulares. Los conjuntos $V_{W\cap U}(\pi_i)$ son algebraicos y cubren $W \cap U$, luego por la irreducibilidad de W

ha de ser $W \cap U \subset V_{W\cap U}(\pi_i)$ para algún i, es decir, alguno de los factores π_i se anula sobre todo $W \cap U$. Llamemos $\pi \in k[U]$ a este primo, de modo que $\pi \in \mathfrak{m}_P(V/W)$.

Por el teorema anterior, existe una subvariedad W' de codimensión 1 en V tal que $\mathfrak{m}_P(V/W') = (\pi) \subset \mathfrak{m}_P(V/W)$. De aquí se sigue fácilmente la inclusión $I_U(W' \cap U) \subset I_U(W \cap U)$, luego $W \cap U \subset W' \cap U$ y, como ambas variedades tienen la misma dimensión, se da la igualdad, luego $W' = W$ y π es una ecuación local de W. ∎

A.2 Divisores

Introducimos ahora la noción de divisor de una variedad cuasiproyectiva regular de dimensión arbitraria, que generalizará a la que ya tenemos definida para curvas proyectivas regulares. Empezamos por los divisores primos.

Definición A.6 Un *divisor primo* de una variedad cuasiproyectiva regular V es cualquier subvariedad (cerrada) W de codimensión 1 en V.

En particular, si V es una curva, sus divisores primos son sus puntos. Ahora vamos a definir la multiplicidad de un divisor primo en una función racional. La definición se basa en el teorema siguiente:

Teorema A.7 *Sea V una variedad cuasiproyectiva regular, sea W un divisor primo de V y $P \in W$. Sea $\mathfrak{m}_P(V/W) = (\pi)$ y sea U un entorno afín de P donde $I_U(W \cap U) = (\pi)$. Para cada función $f \in k[U]$ no nula y cada natural $r \geq 0$, se cumple que $\pi^r \mid f$ en $\mathcal{O}_P(V)$ si y sólo si $\pi^r \mid f$ en $k[U]$.*

Demostración: Una implicación es evidente. Supongamos que $\pi^r \mid f$ en $\mathcal{O}_P(V)$, de modo que $f = \alpha\pi^r$, para cierta función $\alpha \in \mathcal{O}_P(V)$. Podemos tomar un entorno afín U' de P tal que $\alpha \in k[U']$, $U' \subset U$ y π sea una ecuación local de W en U', es decir, $I_{U'}(W \cap U') = (\pi)$.

Si $\pi^r \nmid f$ en $k[U]$, sea $0 \leq s < r$ el máximo natural tal que $\pi^s \mid f$ en $k[U]$. Digamos que $f = \beta\pi^s$, con $\beta \in k[U]$. Entonces $\beta = \alpha\pi^{r-s}$, luego β se anula en $W \cap U'$. Por regularidad se anula en $W \cap U$, luego $\beta \in I_U(W \cap U) = (\pi)$ y $\pi \mid \beta$ en $k[U]$, contradicción. ∎

Si P es un punto de una variedad regular V, sabemos que $\mathcal{O}_P(V)$ es un dominio de factorización única, y cada primo $\pi \in \mathcal{O}_P(V)$ induce una valoración v_π en $k(V)$: para cada función $f \in \mathcal{O}_P(V)$ definimos $v_\pi(f)$ como el exponente de π en la descomposición de f en factores primos y para cada $f/g \in k(V)$ (con $f, g \in \mathcal{O}_P(V)$), definimos $v_\pi(f/g) = v_\pi(f) - v_\pi(g)$.

El teorema anterior implica que si W es un divisor primo de V, $P \in W$ y $\mathfrak{m}_P(V/W) = (\pi)$, entonces la valoración v_W^P inducida por π en $k(V)$ no depende de P. En efecto, si $P' \in W$ y $\mathfrak{m}_{P'}(V/W') = (\pi')$ tomamos entornos afines U y U' de P y P' respectivamente, de modo que $I_U(W \cap U) = (\pi)$, $I_{U'}(W \cap U') = (\pi')$, luego tomamos un punto $P'' \in W \cap U \cap U'$.

Entonces $\mathfrak{m}_{P''}(V/W) = (\pi) = (\pi')$ por el teorema A.3 y, por la observación posterior, podemos tomar un entorno afín U'' de P'' donde π y π' son ecuaciones locales de W.

Tomemos $f \in k(V)$ y expresémosla como $f = s/t$, con $s,\ t \in k[U]$. Por el teorema anterior, $v_W^P(s)$ es el máximo r tal que $\pi^r \mid s$ en $\mathcal{O}_P(V)$, o también en $k[U]$, o también en $\mathcal{O}_{P''}(V)$, y éste es $v_W^{P''}(s)$. Lo mismo vale para t, luego $v_W^P(f) = v_W^{P''}(f)$. Igualmente concluimos que $v_W^{P'}(f) = v_W^{P''}(f)$ y, en definitiva, $v_W^P = v_W^{P'}$. Esto justifica la definición siguiente:

Definición A.8 Si W es un divisor primo en una variedad cuasiproyectiva regular V, $P \in W$ y $\mathfrak{m}_P(V/W) = (\pi)$, definimos v_W como la valoración en $k(V)$ inducida por π, de modo que si $f \in \mathcal{O}_P(V)$ entonces $v_W(f)$ es el exponente de π en la descomposición de f en factores primos.

Hemos demostrado que v_W no depende del punto P con el que se calcula. Más aún, el teorema A.7 afirma que si π es una ecuación local de W en un abierto afín U y $f \in k[U]$, entonces $v_W(f)$ es el mayor natural r tal que $\pi^r \mid f$ en $k[U]$.

Si $f \in k(V)$ y $v_W(f) = r > 0$, diremos que f tiene un *cero* de orden r *a lo largo de* W, mientras que si $v_W(f) = -r < 0$ diremos que f tiene un *polo* de orden r *a lo largo de* W.

Notemos que si V es una curva regular y W es un punto $P \in V$, entonces π es un parámetro local de V en P y $v_P(f)$ es el orden de f en P que ya teníamos definido. En particular, las nociones de ceros y polos que acabamos de introducir extienden a las que ya teníamos para curvas.

El teorema siguiente muestra que la definición que hemos dado de cero y polo es razonable:

Teorema A.9 *Sea f una función racional en una variedad regular V*

1. *Si f tiene un cero a lo largo de un divisor primo W, entonces f se anula en un abierto de W.*
2. *Si f tiene un polo a lo largo de un divisor primo W entonces f es singular en todos los puntos de W.*
3. *Si f se anula en un punto $P \in V$, entonces f tiene un cero W que pasa por P.*
4. *Si f es singular en un punto $P \in V$, entonces f tiene un polo W que pasa por P.*

Demostración: Si f tiene un cero a lo largo de W, sea U un abierto afín donde W tenga una ecuación local π. Expresemos $f = s/t$, con $s,\ t \in k[U]$. Entonces $s = \alpha\pi^r$, $t = \beta\pi^s$ para ciertos $\alpha,\ \beta \in k[U]$, $v_W(\alpha) = v_W(\beta) = 0$ y $v_W(f) = r - s > 0$. Entonces $f = (\alpha/\beta)\pi^{r-s}$ y el hecho de que $v_W(\beta) = 0$

significa que $\beta \notin (\pi) = I_U(W \cap U)$, es decir, que β no se anula en un abierto de $W \cap U$, luego α/β es regular en un abierto de W en el cual se anula f.

Si f tiene un polo a lo largo de W entonces $g = 1/f$ tiene un cero a lo largo de W, luego se anula en un abierto de W en el cual $f = 1/g$ ha de ser singular. Ahora bien, si f fuera regular en algún punto de W, lo sería en todos los puntos de un abierto, lo cual es imposible. Por lo tanto, f es singular en todos los puntos de W.

Si f se anula en un punto $P \in V$ entonces $f \in \mathcal{O}_P(V)$ y no es una unidad, luego es divisible entre un primo π. Por el teorema A.4 existe un divisor primo W tal que $P \in W$ y $\mathfrak{m}_P(V/W) = (\pi)$. Entonces $v_W(f) > 0$ y, por lo tanto, W es un cero de f.

Si f es singular en un punto $P \in V$, entonces $f = g/h$, con g, $h \in \mathcal{O}_P(V)$, pero $g/h \notin \mathcal{O}_P(V)$. Podemos exigir que g y h no tengan factores comunes. Sea π un primo en $\mathcal{O}_P(V)$ tal que $\pi \mid h$, $\pi \nmid g$. Por el teorema A.4 existe un divisor primo W de V tal que $P \in W$ y $\mathfrak{m}_P(V/W) = (\pi)$. Claramente $v_W(f) = v_W(g) - v_W(h) < 0$, luego W es un polo de f. ∎

En particular, una función racional es regular si y sólo si no tiene polos. También vemos que el anillo de enteros de la valoración v_W está formada por las funciones que son regulares en algún punto de W (y entonces lo son en un abierto de W).

Ejemplo Sea $V = A^2$ y $f = x/y$. Vamos a ver que V tiene un único cero simple a lo largo de la recta $X = 0$ y un único polo simple a lo largo de la recta $Y = 0$.

Si llamamos W a la recta $X = 0$, entonces una ecuación local de W en todo A^2 es la función x, ya que una función $F \in k[A^2] = k[X, Y] = k[x, y]$ se anula sobre W si y sólo si es un múltiplo de x. Claramente $v_W(x) = 1$ y $v_W(y) = 0$, pues la función y sólo se anula en un punto de W. Por lo tanto $v_W(f) = 1$.

Igualmente razonamos que si W es $Y = 0$ entonces $v_W(f) = -1$. Por el teorema anterior f no puede tener más polos y por esto mismo aplicado a $1/f$, tampoco puede tener más ceros. ∎

El teorema siguiente nos permitirá asociar un divisor a cada función racional de una variedad:

Teorema A.10 *Toda función racional no nula sobre una variedad cuasiproyectiva regular tiene a lo sumo un número finito de ceros y polos.*

Demostración: Sea $f \in k(V)$ una función racional en una variedad V. Sea C el conjunto de puntos singulares de f, que es cerrado. Por el teorema anterior, si W es un polo de f, entonces $W \subset C$ y, por tener codimensión 1, debe coincidir con una componente irreducible de C, luego f tiene un número finito de polos. Como los ceros de f son los polos de $1/f$, también son un número finito. ∎

Definición A.11 Sea V una variedad cuasiproyectiva regular. El *grupo de divisores* de V es el $\mathbb{Z}$-módulo libre $\mathcal{D}_V$ generado por los divisores primos de V. Lo representaremos con notación multiplicativa. Si $\mathfrak{a} \in \mathcal{D}_V$ y W es un divisor primo, representaremos por $v_W(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Z}$ al exponente de W en $\mathfrak{a}$.

Para cada función racional $f \in k(V)$ no nula definimos el divisor $(f) \in \mathcal{D}_V$ como el dado por $v_W((f)) = v_W(f)$, para todo divisor primo W. Los divisores de esta forma se llaman *divisores principales* de V.

Claramente $(fg) = (f)(g)$, por lo que los divisores principales forman un subgrupo P del grupo de divisores. El *grupo de clases* de V es el grupo cociente $\mathcal{H}(V) = \mathcal{D}_V/P$.

Observemos que $(f) = 1$ si y sólo si f no tiene ni ceros ni polos en V, es decir, si y sólo si $f \in k[V]$ y no se anula en ningún punto. Si V es una variedad proyectiva regular esto sucede si y sólo si f es una constante no nula. En particular, la igualdad $(f) = (g)$ equivale a que $f = \alpha g$, con $\alpha \in k$. En otras palabras, en una variedad proyectiva regular, el divisor de una función racional determina a ésta salvo una constante.

Ejemplo Veamos que $\mathcal{H}(A^n) = 1$.

En efecto, si W es un divisor primo de A^n, entonces el teorema 3.6 nos da que $W = V(F)$, para cierto polinomio irreducible $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Es claro entonces que $f = F \in k[A^n]$ es una ecuación local (en este caso "global") de W en A^n, luego $v_W(f) = 1$. Más aún, $W = (f)$, pues f no puede tener polos y todo cero de f ha de ser un polos de $1/f$, luego ha de estar contenido en W, luego ha de ser W. Así pues, todo divisor es principal y el grupo de clases es trivial. ∎

Ejemplo Veamos que $\mathcal{H}(\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{Z}$.

Como en el ejemplo anterior, tenemos que todo divisor primo de P^n es de la forma $W = V(F)$, donde ahora F es una forma irreducible, digamos, de grado r. No obstante, ahora no es cierto que F determine una función $f \in k[\mathrm{P}^n]$. Lo más que podemos hacer es tomar una forma lineal G distinta de F y definir $f = F/G^r \in k(\mathrm{P}^n)$. Si llamamos $L = V(G)$, tenemos que $(f) = W/L^r$.

En efecto, f es singular en los puntos de L, luego L es su único polo y $1/f$ es singular en los puntos de W, luego W es el único cero de f. Para calcular las multiplicidades tomamos un sistema de referencia en el que la recta infinita sea distinta de W o L. En el abierto afín $U = A^n$ tenemos que $g = [F]/[X_{n+1}^r]$ es una función regular definida por la deshomogeneización de F, que es un polinomio irreducible, luego $I_U(W \cap U) = (g)$. Igualmente, si llamamos $h = [G]/[G']$ tenemos que $I_U(L \cap U) = (h)$. Así pues, $v_W(g) = 1$, $v_L(h) = 1$, $v_W(h) = 0$, $v_L(g) = 0$ (ya que h no puede anularse sobre un abierto de W, o sería $W = L$, y viceversa). Además, $f = g/h^r$, luego $v_W(f) = 1$, $v_L(f) = -r$.

En general, si $f = F/G \in k(\mathrm{P}^n)$, donde F y G son formas del mismo grado, podemos exigir que sean primas entre sí en $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Descompongámoslas en factores primos $F = F_1^{m_1} \cdots F_r^{m_r}$, $G = F_{r+1}^{-m_{r+1}} \cdots F_s^{-m_s}$. Tomamos una forma lineal H distinta de todas las formas F_i, de modo que

$$f = f_1^{m_1} \cdots f_s^{m_s},$$

donde $f_i = F_i/H^{\operatorname{grad} F_i}$. Por el caso anterior,

$$(f) = W_1^{m_1} \cdots W_s^{m_s},$$

donde $W_i = V(F_i)$. (Notemos que los divisores $V(H)$ se cancelan porque F y G tienen el mismo grado.)

Observemos ahora que si $W = V(F)$ es un divisor primo, la forma F está determinada por W salvo una constante, luego podemos definir $\operatorname{grad} W = \operatorname{grad} F$ y extender esta aplicación a un epimorfismo de grupos $\operatorname{grad} : \mathcal{D}_{\mathrm{P}^n} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Del razonamiento precedente se desprende que todos los divisores principales tienen grado 0 y, recíprocamente, a partir de un divisor $\mathfrak{a}$ de grado 0 podemos construir un cociente de formas del mismo grado que determinen una función racional f tal que $(f) = \mathfrak{a}$. En definitiva, el núcleo de la aplicación grado es precisamente el grupo de los ideales principales, luego tenemos un isomorfismo $\operatorname{grad} : \mathcal{H}(\mathrm{P}^n) \longrightarrow \mathbb{Z}$. ∎

Vamos a ver ahora que todo divisor es "localmente principal", lo que nos permitirá definir la antiimagen de un divisor por una aplicación regular.

Definición A.12 Sea V una variedad cuasiproyectiva regular, sea U un abierto en V y sea $\mathfrak{a}$ un divisor en V. Llamaremos $\mathfrak{a}|_U$ al divisor de U dado por $v_W(\mathfrak{a}|_U) = v_{\overline{W}}(\mathfrak{a})$, para cada divisor W de U.

Observemos que al calcular $\mathfrak{a}|_U$ desaparecen los factores correspondientes a divisores de V disjuntos con U, mientras que $\mathfrak{a}|_U$ permite recuperar la multiplicidad en $\mathfrak{a}$ de cualquier divisor de V que corte a U. Es claro entonces que un divisor está completamente determinado por sus restricciones a los miembros de un cubrimiento abierto de V.

Dado un punto $P \in V$ y un divisor $\mathfrak{a}$, de la prueba del teorema A.3 se sigue que podemos encontrar un entorno afín U de P disjunto de los divisores primos de $\mathfrak{a}$ que no pasen por P y en el que cada divisor primo W_i de $\mathfrak{a}$ que pasa por P tiene una ecuación local π_i. Es claro entonces que el divisor de π_i en U es $W_i \cap U$, luego la función $f = \prod_i \pi_i^{v_{W_i}(\mathfrak{a})}$ cumple $(f) = \mathfrak{a}|_U$.

En definitiva, vemos que todo punto de V tiene un entorno donde $\mathfrak{a}$ es principal. Podemos extraer un cubrimiento finito U_i de V tal que $\mathfrak{a}|_{U_i} = (f_i)$, para cierta función $f_i \in k[U_i]$, y entonces es claro que $\mathfrak{a}$ está completamente determinado por los pares (U_i, f_i). Observemos que $(f_i)|_{U_i \cap U_j} = \mathfrak{a}|_{U_i \cap U_j} = (f_j)|_{U_i \cap U_j}$, luego en $U_i \cap U_j$ la función f_i/f_j tiene divisor trivial, es decir, no tiene ni ceros ni polos.

Definición A.13 Un *sistema compatible de funciones* en una variedad cuasiproyectiva regular V es un conjunto finito de pares $\{(U_i, f_i)\}$, donde los conjuntos U_i son un cubrimiento abierto de V y las funciones $f_i \in k[U_i]$ son no nulas y cumplen que, para cada par de índices i, j, el cociente f_i/f_j es regular y no se anula en $U_i \cap U_j$.

Acabamos de ver cómo asignar a cada divisor $\mathfrak{a}$ de V un sistema compatible de funciones en V. Recíprocamente, cada uno de estos sistemas está inducido por un único divisor. En efecto, para cada divisor primo W de V, consideramos un abierto U_i tal que $W \cap U_i \neq \varnothing$ y definimos $v_W(\mathfrak{a}) = v_{W\cap U_i}(f_i)$. La compatibilidad del sistema implica que esto no depende de la elección de i, pues si $W \cap U_j \neq \varnothing$, tomamos $P \in W \cap U_i \cap U_j$ y un entorno afín U de P tal que $U \subset U_i \cap U_j$ y W admita una ecuación local π en U. Entonces $v_{W\cap U_i}(f_i)$ es la multiplicidad de π en f_i en $\mathcal{O}_P(V)$, pero f_i/f_j es una unidad de $\mathcal{O}_P(V)$, luego dicha multiplicidad coincide con la de π en f_j, que es $v_{W\cap U_j}(f_j)$. Es claro que el divisor construido de este modo a partir del sistema de funciones asociado a un divisor $\mathfrak{a}$ es el propio $\mathfrak{a}$.

Por otra parte, un mismo divisor determina distintos sistemas compatibles de funciones porque podemos elegir el cubrimiento abierto. Es fácil ver que dos sistemas $\{(U_i, f_i)\}$, $\{(V_j, g_j)\}$ se corresponden con el mismo divisor si y sólo si las funciones f_i/g_j son regulares y no se anulan en los abiertos $U_i \cap V_j$.

Ahora podemos dar condiciones para que una aplicación $\phi : V \longrightarrow W$ permita asociar a cada divisor $\mathfrak{a}$ de W un divisor $\overline{\phi}(\mathfrak{a})$ en V. En principio sabemos que si ϕ es una aplicación regular densa, entonces induce un monomorfismo de cuerpos $\overline{\phi} : k(W) \longrightarrow k(V)$ dado por $\overline{\phi}(f) = \phi \circ f$. Veremos que la densidad es suficiente para definir $\overline{\phi}(\mathfrak{a})$ para todo divisor $\mathfrak{a}$, pero conviene dar condiciones que garanticen la existencia de $\overline{\phi}(\mathfrak{a})$ para un divisor dado.

Notemos en primer lugar que si $f \in k(W)$ es una función racional no nula, la composición $\phi \circ f$ será también una función racional no nula siempre que exista un punto $P \in \phi[V]$ donde f esté definida y sea no nula. Conviene expresar esta condición en otros términos:

Llamaremos *soporte* de un divisor $\mathfrak{a} = W_1^{m_1} \cdots W_r^{m_r}$ en una variedad V al cerrado $\operatorname{sop}\mathfrak{a} = W_1 \cup \cdots \cup W_r$ (con el convenio $\operatorname{sop} 1 = \varnothing$).

Así, para que $\phi \circ f$ esté definida y sea no nula, basta exigir que $\phi[V] \not\subset \operatorname{sop}(f)$.

Consideremos ahora un divisor $\mathfrak{a}$ en V tal que $\phi[V] \not\subset \operatorname{sop}\mathfrak{a}$. En particular, esto sucede siempre que ϕ es densa. Podemos tomar una familia compatible de funciones (U_i, f_i) tal que $\phi[V] \cap U_i \neq \varnothing$. Vamos a ver que entonces también se cumple $\phi[V] \cap U_i \not\subset \operatorname{sop}(f_i)$.

Supongamos que $\phi[V] \cap U_i \subset \operatorname{sop}(f_i)$. Claramente $\overline{\phi[V]}$ es irreducible, pues en caso contrario V sería reducible. Entonces $\overline{\phi[V]} = \overline{\phi[V] \cap U_i} \subset \operatorname{sop}(f_i)$. Por construcción de f_i tenemos que $\operatorname{sop}(f_i) \cap U_i = \operatorname{sop}\mathfrak{a} \cap U_i$. Así pues,

$$\phi[V] \cap U_i \subset \overline{\phi}[V] \cap U_i \subset \operatorname{sop}\mathfrak{a},$$

luego, tomando clausuras de nuevo,

$$\phi[V] \subset \overline{\phi[V]} = \overline{\phi[V] \cap U_i} \subset \operatorname{sop} \mathfrak{a},$$

contradicción.

De este modo, las funciones $\phi \circ f_i$ son funciones racionales no nulas en $\phi^{-1}[U_i]$, y es inmediato comprobar que los pares $(\phi^{-1}[U_i], \phi \circ f_i)$ forman un sistema compatible de funciones en V. Más aún, si consideramos dos sistemas compatibles de funciones asociados a $\mathfrak{a}$ en W (con la condición $\phi[V] \cap U_i \neq \varnothing$), entonces los sistemas en V definidos según acabamos de ver determinan un mismo divisor, al que podemos llamar $\overline{\phi}(\mathfrak{a})$.

El teorema siguiente resume lo que hemos demostrado:

Teorema A.14 *Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación regular entre dos variedades cuasiproyectivas regulares, sea $\mathfrak{a}$ un divisor en W tal que $\phi[V] \not\subset \operatorname{sop} \mathfrak{a}$ y sea $\{(U_i, f_i)\}$ un sistema compatible de funciones en W asociado a $\mathfrak{a}$ y tal que $\phi[V] \cap U_i \neq \varnothing$ para todo i. Entonces $\{(\phi^{-1}[U_i], \phi \circ f_i)\}$ es un sistema compatible de funciones en V que determina un divisor $\overline{\phi}(\mathfrak{a})$ independiente de la elección del sistema de funciones.*

Si $\mathfrak{a}_1$ y $\mathfrak{a}_2$ son dos divisores de V_2 determinados por los sistemas de funciones $\{(U_i, f_i)\}$ y $\{(V_j, g_j)\}$, es claro que $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ está determinado por el sistema de funciones $\{(U_i \cap V_j, f_i g_j)\}$, de donde se sigue sin dificultad que si $\overline{\phi}(\mathfrak{a})$ y $\overline{\phi}(\mathfrak{b})$ están definidos, entonces también lo está $\overline{\phi}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ y

$$\overline{\phi}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \overline{\phi}(\mathfrak{a})\overline{\phi}(\mathfrak{b}).$$

En particular, si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación regular densa entre variedades regulares, tenemos que $\overline{\phi} : \mathcal{D}_W \longrightarrow \mathcal{D}_V$ es un homomorfismo de grupos.

Por otra parte, un divisor principal (f) está determinado por el sistema de funciones (W, f), y es claro entonces que (si está definido) $\overline{\phi}((f)) = (\phi \circ f)$. Como $\overline{\phi}$ transforma divisores principales en divisores principales, vemos que (si ϕ es densa) $\overline{\phi}$ induce un homomorfismo $\overline{\phi} : \mathcal{H}(W) \longrightarrow \mathcal{H}(V)$.

Otra propiedad sencilla de probar es que si $\phi : V \longrightarrow W$ y $\psi : W \longrightarrow X$ son aplicaciones regulares y $\mathfrak{a}$ es un divisor en X tal que están definidos $\overline{\psi}(\mathfrak{a})$ y $\overline{\phi}(\overline{\psi}(\mathfrak{a}))$, entonces

$$\overline{\phi \circ \psi}(\mathfrak{a}) = \overline{\phi}(\overline{\psi}(\mathfrak{a})).$$

Ejercicio: Comprobar que la definición de $\overline{\phi}$ extiende a la que ya teníamos para aplicaciones regulares no constantes entre curvas proyectivas regulares.

A.3 Aplicación a las isogenias

Aunque el interés principal de la teoría de divisores se debe principalmente a su conexión con los números de intersección y el teorema de Bezout, nosotros veremos únicamente una aplicación a la teoría de curvas elípticas. En esta sección supondremos siempre que las curvas consideradas están definidas sobre un cuerpo de constantes de característica distinta de 2 o 3.

Definición A.15 Consideremos dos curvas elípticas E_1 y E_2 consideradas como grupos con la operación definida en 7.19 a partir de sendos puntos O_1 y O_2. Una *isogenia* $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ es una aplicación regular tal que $\phi(O_1) = O_2$.

En realidad las isogenias cumplen más de lo que en principio hemos exigido:

Teorema A.16 *Las isogenias son homomorfismos de grupos.*

DEMOSTRACIÓN: $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ una isogenia entre curvas elípticas. Podemos suponer que es no nula. Consideramos el diagrama siguiente,

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & \mathcal{H}_0(E_1) \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ E_2 & \longrightarrow & \mathcal{H}_0(E_2) \end{array}$$

donde las flechas horizontales son los isomorfismos $P \mapsto [P/O]$ entre las curvas y sus grupos de clases de grado 0, mientras que la flecha de la derecha es el homomorfismo inducido por la extensión de ϕ al grupo de divisores (es decir, por la norma definida en 5.35, que induce un homomorfismo sobre los grupos de clases en virtud de 5.39). Obviamente el diagrama es conmutativo, luego ϕ es un homomorfismo de grupos. ∎

Definición A.17 Si E_1 y E_2 son dos curvas elípticas (con una estructura de grupo prefijada), llamaremos $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ al conjunto de todas las isogenias de E_1 en E_2, que claramente es un grupo abeliano con la suma definida puntualmente. (Aquí usamos el teorema 7.21.) Llamaremos $\mathrm{End}\, E$ al grupo de isogenias de una curva elíptica E en sí misma.

En la sección A.4 de [VC] hemos estudiado las isogenias de las curvas elípticas complejas a través de su representación como toros complejos (allí las llamábamos homomorfismos analíticos). Los resultados de esta sección generalizan sustancialmente a los vistos allí.

Las isogenias más simples de una curva elíptica E en sí misma son las multiplicaciones enteras $\lambda_m(P) = mP$, para $m \in \mathbb{Z}$. Vamos a investigar sus núcleos, es decir, los subgrupos $E[m]$ formados por los elementos que cumplen $mP = 0$.

En general, el núcleo de una isogenia no nula $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ es un subgrupo finito de E_1, pues cada punto tiene un número finito de antiimágenes por cualquier aplicación regular no constante entre curvas.

Más precisamente, recordemos que el grado de una aplicación regular no constante entre curvas se define como $\operatorname{grad}\phi = |k(E_1) : \overline{\phi}[k(E_2)]|$. Si ϕ es separable, entonces todos los puntos de E_2 salvo a lo sumo un número finito de ellos (los ramificados) tienen $\operatorname{grad}\phi$ antiimágenes, pero si ϕ es una isogenia entonces todos los puntos han de tener el mismo número de antiimágenes (porque es un homomorfismo de grupos), luego, en particular, el núcleo de una isogenia separable ϕ es un grupo de orden $\operatorname{grad}\phi$.

El teorema principal que vamos a demostrar es el siguiente:

Teorema A.18 *Si E es una curva elíptica, existe una aplicación*

$$(\ ,\ ) : \operatorname{End} E \times \operatorname{End} E \longrightarrow \mathbb{Q}$$

que verifica las propiedades

$$(\phi,\psi) = (\psi,\phi), \quad (\phi+\chi,\psi) = (\phi,\psi) + (\chi,\psi)$$

y además $(\phi,\phi) = \operatorname{grad}\phi$, para toda isogenia ϕ (con el convenio de que la isogenia nula tiene grado 0).

Para probar esto basta demostrar que la aplicación $n : \operatorname{End} E \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $n(\phi) = \operatorname{grad}\phi$ satisface la relación

$$n(\phi+\psi) + n(\phi-\psi) = 2(n(\phi) + n(\psi)), \tag{A.1}$$

pues entonces basta definir

$$(\phi,\psi) = \frac{1}{2}(n(\phi+\psi) - n(\phi) - n(\psi)) = \frac{1}{2}(n(\phi) + n(\psi) - n(\phi-\psi)).$$

Obviamente $(\phi,\psi) = (\psi,\phi)$. Veamos que la expresión

$$S(\phi,\chi,\psi) = (\phi+\chi,\psi) - (\phi,\psi) - (\chi,\psi)$$

es idénticamente nula. Aplicando (A.1) con $\phi = \psi = 0$ obtenemos que $n(0) = 0$ y con $\phi = 0$ obtenemos $n(-\psi) = n(\psi)$. De aquí se sigue que $(\phi,-\psi) = -(\phi,\psi)$ y, por simetría, $(-\phi,\psi) = -(\phi,\psi)$. De aquí a su vez obtenemos que

$$S(\phi,\chi,-\psi) = -S(\phi,\chi,\psi), \quad S(-\phi,-\chi,\psi) = -S(\phi,\chi,\psi).$$

Ahora bien, desarrollando la definición de S vemos que

$$2S(\phi,\chi,\psi) = n(\phi+\chi+\psi) - n(\phi+\chi) - n(\phi+\psi) - n(\chi+\psi) + n(\phi) + n(\chi) + n(\psi)$$

es una expresión simétrica en sus tres variables, luego

$$-S(\phi,\chi,\psi) = S(-\phi,-\chi,\psi) = -S(\phi,-\chi,\psi) = S(\phi,\chi,\psi),$$

de donde podemos concluir que $S(\phi,\chi,\psi) = 0$.

La segunda expresión que define a (ϕ,ψ) muestra que $(\phi,\phi) = n(\phi)$. ∎

Para demostrar (A.1) necesitamos algunas consideraciones sobre divisores en la superficie $E \times E$. Llamemos

$$\Delta = \{(P,P) \mid P \in E\}, \qquad \Sigma = \{(P,-P) \mid P \in E\}.$$

Se trata de dos curvas isomorfas a E. Aquí usamos que la imagen de la aplicación regular $P \mapsto (P,P)$ (resp. $P \mapsto (P,-P)$) es cerrada y claramente es un isomorfismo, pues su inversa es una proyección. Así pues, Δ y Σ son dos divisores primos de $E \times E$. (Es fácil ver que son distintos.)

Llamemos $S : E \times E \longrightarrow E$ a la aplicación suma $S(P,Q) = P + Q$ y recordemos que $\tau_P : E \longrightarrow E$ representa a la traslación $\tau_P(Q) = P + Q$. Vamos a calcular

$$d_{(P,Q)}S : T_PE \oplus T_QE \longrightarrow T_{P+Q}E.$$

Para ello consideramos la aplicación $i^1_Q : E \longrightarrow E \times E$ dada por $i^1_Q(R) = (R,Q)$. Como $i^1_Q \circ S = \tau_Q$, tenemos que $d_P i^1_Q \circ d_{(P,Q)}S = d_P\tau_Q$. Igualmente sucede con la otra componente, luego

$$d_{(P,Q)}S = d_P\tau_Q + d_Q\tau_P.$$

En particular concluimos que $d_{(P,Q)}S$ es suprayectiva.

Vamos a usar esto para demostrar que $\overline{S}(O) = \Sigma$. En efecto, sea t_O un parámetro local de E en O y sea U un entorno de O donde t_O sea regular y no tenga más ceros. Entonces (U, t_O) forma parte de un sistema compatible de funciones asociado al divisor O. Los puntos no cubiertos por U (un número finito) se cubren con abiertos que no contengan más que un cero o polo de t_O y les asignamos la función constante 1.

Así, $\overline{S}(O)$ es el divisor de $\overline{S}(t_O)$ en $S^{-1}[U]$. Ciertamente, $\overline{S}(t_O)$ es regular en $S^{-1}[U]$, luego $\overline{S}(O)$ no tiene polos. Por otra parte, si $(P,Q) \in S^{-1}[U]$ cumple $\overline{S}(t_O)(P,Q) = t_O(P+Q) = 0$ es porque $P + Q = 0$, luego $\overline{S}(t_O)$ se anula únicamente sobre los puntos de $\Sigma \subset S^{-1}[U]$, luego Σ es el único cero de $\overline{S}(O)$. Falta probar que su multiplicidad es 1. Para ello basta probar que $\overline{S}(t_O)$ es una ecuación local de Σ. A su vez, si tomamos $(P,-P) \in \Sigma$, basta ver que $\overline{S}(t_O)$ es primo en $\mathcal{O}_{(P,-P)}(E \times E)$. Este anillo es un dominio de factorización única y el ideal maximal $m_{(P,-P)}$ contiene a todos los primos. Por consiguiente, si $\overline{S}(t_O)$ fuera compuesta, cumpliría $\overline{S}(t_O) \in m^2_{(P,-P)}$.

Ahora bien, como $d_{(P,-P)}S : T_{(P,-P)}(E \times E) \longrightarrow T_OE$ es suprayectiva, su dual $\mathfrak{m}_O/\mathfrak{m}_O^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_{(P,-P)}/\mathfrak{m}^2_{(P,-P)}$ es inyectiva, luego $\overline{S}(t_O) \notin \mathfrak{m}^2_{(P,-P)}$.

Similarmente se prueba que si $R : E \times E \longrightarrow E$ es la aplicación dada por $R(P,Q) = P - Q$, entonces $\overline{R}(O) = \Delta$.

Consideremos ahora las proyecciones $p_i : E \times E \longrightarrow E$, para $i = 1, 2$, y vamos a demostrar que

$$\overline{p}_1(O) = \{O\} \times E, \qquad \overline{p}_2(O) = E \times \{O\}.$$

Razonando como antes, $\overline{p}_1(O)$ es el divisor de $\overline{p}_1(t_O)$ en $S^{-1}[U]$. De nuevo se trata de un divisor sin polos y con $\{O\} \times E$ como único cero. La multiplicidad es 1 porque $d_{(O,O)}p_1$ es suprayectiva.

El resultado crucial es la siguiente igualdad de clases de divisores en $E \times E$:

$$[\Delta\Sigma] = [\overline{p}_1(O)^2\overline{p}_2(O)^2]. \tag{A.2}$$

Para probarla basta encontrar $f \in k(E \times E)$ con divisor $\Delta\Sigma/\overline{p}_1(O)^2\overline{p}_2(O)^2$.

No perdemos generalidad si suponemos que E es una curva plana definida por una ecuación de Weierstrass cuyo neutro O es su único punto infinito. Entonces, cada recta vertical $X = a$ corta a E en dos puntos finitos P y Q (no necesariamente distintos) y el teorema 7.20 muestra que $P + Q = O$. En otras palabras, dos puntos finitos P y $Q \in E$ cumplen $x(P) = x(Q)$ si y sólo si $P = \pm Q$ en E.

Sean x_1, y_1, x_2, y_2 las funciones coordenadas en $E \times E$ y consideremos la función $f = x_1 - x_2 \in k(E \times E)$.

Tenemos que f se anula sobre los puntos finitos de $\Delta \cup \Sigma$, luego sus ceros son Δ y Σ. Vamos a ver que su multiplicidad es 1.

Sea $P \in E$ un punto finito de E tal que $P \neq -P$. Entonces $x - x(P)$ es un parámetro local en P, luego $x_1 - x_1(P)$, $x_2 - x_2(P)$ son un sistema de parámetros locales en (P, P). Esto implica que $d_{(P,P)}x_1$ y $d_{(P,P)}x_2$ son linealmente independientes, luego $d_{(P,P)}(x_1 - x_2) \neq 0$, luego $x_1 - x_2 \notin \mathfrak{m}^2_{(P,P)}$, luego f es primo en $\mathcal{O}_{(P,P)}(E \times E)$. Según A.4 existe una curva W en $E \times E$ que pasa por (P, P) y de modo que $(f) = \mathfrak{m}_{(P,P)}(E \times E/W)$. Necesariamente $W = \Delta$, luego $v_\Delta(f) = 1$.

También se cumple que $x - x(P) = x - x(-P)$ es un parámetro local en $-P$, luego razonando igualmente con el punto $(P, -P)$ llegamos a que $v_\Sigma(f) = 1$.

Por otra parte, f es singular en los puntos (O, P) y (P, O), donde P es un punto finito de E, luego sus polos son los primos $\overline{p}_1(O)$ y $\overline{p}_2(O)$. Vamos a probar que su multiplicidad en f es 2. Ante todo,

$$f = \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) x_1,$$

y el primer factor vale 1 en cualquier punto (O, P), luego $v_{\overline{p}_1(O)}(f) = v_{\overline{p}_1(O)}(x_1)$. Un parámetro local de E en O es x/y, luego $t = x_1/y_1$ forma parte de un sistema de parámetros locales de $E \times E$ en (O, P), luego su diferencial es no nula, luego $t \notin \mathfrak{m}^2_{(O,P)}$ y, por consiguiente, es primo en $\mathcal{O}_{(O,P)}(E \times E)$. De aquí se sigue que es una ecuación local de $\overline{p}(O)$ alrededor de (O, P). Como

$$x_1 = \frac{x_1^3}{y_1^2}\, t^{-2}$$

y el primer factor es una unidad de $\mathcal{O}_{(O,P)}(E \times E)$, podemos concluir que $v_{\overline{p}_1(O)}(f) = -2$. Igualmente se razona con el otro polo. ∎

Ahora ya podemos demostrar el teorema A.18. Recordemos que basta demostrar la relación (A.1). Consideremos dos isogenias ϕ, $\psi \in \operatorname{End} E$ tales que ϕ, ψ, $\phi+\psi$ y $\phi-\psi$ sean no nulas. Sea $f : E \longrightarrow E \times E$ la aplicación dada por $f(P) = (\phi(P), \psi(P))$. Entonces $f \circ p_1 = \phi$, $f \circ p_2 = \psi$, luego

$$\overline{f}(\overline{p}_1(O)) = \overline{\phi}(O), \qquad \overline{f}(\overline{p}_2(O)) = \overline{\psi}(O).$$

Aquí usamos que $\overline{f}$ está definida porque $\phi \neq 0 \neq \psi$. Similarmente, el hecho de que $\phi+\psi \neq 0$ implica que $\overline{f}$ está definida sobre Σ y como $\phi-\psi \neq 0$ también lo está sobre Δ. Además, $f \circ S = \phi + \psi$, luego $\overline{f}(\Sigma) = \overline{f}(\overline{S}(O)) = (\overline{\phi+\psi})(O)$ e, igualmente, $\overline{f}(\Delta) = \overline{f}(\overline{S}(O)) = (\overline{\phi-\psi})(O)$.

Aplicando $\overline{f}$ a (A.2) obtenemos que

$$[(\overline{\phi+\psi})(O)(\overline{\phi-\psi})(O)] = [\overline{\phi}(O)^2\overline{\psi}(O)^2].$$

Ésta es una igualdad de clases de divisores de la curva E. Teniendo en cuenta que los divisores principales tienen grado 0, vemos que

$$\operatorname{grad}(\overline{\phi+\psi})(O) + \operatorname{grad}(\overline{\phi-\psi})(O) = 2(\operatorname{grad}\overline{\phi}(O) + \operatorname{grad}\overline{\psi}(O)).$$

Por último, es claro que $\operatorname{grad}\overline{\phi}(O) = \operatorname{grad}\phi$, e igualmente con las otras isogenias, luego tenemos (A.1).

Si $\phi = 0$ entonces (A.1) es trivial. Si $\psi = 0$ también, teniendo en cuenta que $\operatorname{grad}\phi = \operatorname{grad}(-\phi)$, dado que $-\phi = \phi \circ \lambda_{-1}$ y λ_{-1} (es decir, la aplicación $P \mapsto -P$) es un isomorfismo, luego tiene grado 1.

Supongamos ahora que $\phi - \psi = 0$. Esto nos impide calcular $\overline{f}(\Delta)$. Sea $t = x/y \in k(E)$, que tiene un cero simple en O. Sea $\mathfrak{a} = O/(t)$, de modo que $[O] = [\mathfrak{a}]$ y $O \notin \operatorname{sop}\mathfrak{a}$. Sea $\Delta' = \overline{S}(\mathfrak{a})$, de modo que $[\Delta'] = [\Delta]$. Por consiguiente, la fórmula (A.2) sigue siendo cierta con Δ' en lugar de Δ, pero ahora Δ no divide a Δ', por lo que $\overline{f}(\Delta')$ sí que está definida. Además

$$\overline{f}(\Delta') = (\overline{\phi-\psi})(\mathfrak{a}) = \overline{0}(\mathfrak{a}) = 1,$$

pues si formamos un sistema compatible de funciones (U_i, f_i) asociado a $\mathfrak{a}$ tal que $0[E] \cap U_i \neq \varnothing$ (es decir, $O \in U_i$), entonces las funciones $0 \circ f_i = f_i(O) \neq 0$ son constantes no nulas, que determinan el divisor trivial.

Así pues, $\operatorname{grad}\overline{f}(\Delta') = 0 = \operatorname{grad}(\phi-\psi)$ y se sigue cumpliendo (A.1). Si $\phi+\psi = 0$ razonamos análogamente. ∎

Ahora podemos calcular el grado de las multiplicaciones λ_m. La relación (A.1) nos da que

$$\operatorname{grad}\lambda_{m+1} + \operatorname{grad}\lambda_{m-1} = 2(\operatorname{grad}\lambda_m + \operatorname{grad}\lambda_1).$$

Puesto que, obviamente, $\operatorname{grad}\lambda_0 = 0$ y $\operatorname{grad}\lambda_1 = 1$, una simple inducción prueba que $\operatorname{grad}\lambda_m = m^2$ para todo $m \geq 0$ y, de aquí, para todo $m \in \mathbb{Z}$ (puesto que $\operatorname{grad}\lambda_{-1} = 1$).

Así, si el cuerpo de constantes k tiene característica 0, entonces λ_m es separable, luego concluimos que el subgrupo $E[m]$ formado por los puntos $P \in E$ tales que $mP = O$ tiene orden m^2. En realidad puede probarse que λ_m es separable incluso si k tiene característica prima p y $p \nmid m$.

Más aún, bajo estas hipótesis podemos determinar la estructura del grupo: necesariamente

$$E[m] \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

En efecto, si descomponemos $E[m]$ en producto de grupos cíclicos de orden potencia de primo, cada primo $p \mid m$ no puede aparecer más que en el orden de dos factores, pues de lo contrario $|E[p]| \geq p^3$. Por otra parte, si $m = p^r m'$, con $(m, m') = 1$, entonces $E[m]$ no puede contener un subgrupo de orden p^{2r}, luego ha de haber exactamente dos factores de orden p^r.

En particular, si E es una cúbica regular sobre un cuerpo de característica 0 (o, más en general, de característica distinta de 2 o 3), el grupo $E[3]$ está formado por los puntos $P \in E$ tales que P, P, P estén alineados, y éstos son los puntos de inflexión de E.

Por consiguiente, toda cubica regular E sobre un cuerpo de característica distinta de 2 o 3 tiene exactamente 9 puntos de inflexión. Además, una recta que pase por dos de ellos P y Q corta a E en otro punto de inflexión R, pues $R = -P - Q$, con lo que $3R = 0$.

Apéndice B

Preliminares algebraicos

B.1 El lema de Nakayama

Probamos aquí una versión ligeramente más general que la presentada en [TAl 2.27] del lema de Nakayama. Se trata de un teorema muy simple por lo que a su prueba se refiere, pero que tiene numerosas consecuencias a las que apelaremos en el punto crucial de muchos argumentos. Puede decirse que gran parte de la "magia algebraica" de la geometría algebraica está condensada en el modesto lema de Nakayama:

Teorema B.1 (Lema de Nakayama) *Sea D un dominio íntegro, $\mathfrak{a}$ un ideal de D no nulo y M un D-módulo finitamente generado tal que $\mathfrak{a}M = M$. Supongamos que si $a \in 1 + \mathfrak{a}$ cumple $aM = 0$, entonces $M = 0$. En tal caso $M = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $M = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Entonces $v_i \in \mathfrak{a}M$, luego podemos expresar $v_i = a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n$, para ciertos $a_{ij} \in \mathfrak{a}$. Pasando v_i al segundo miembro obtenemos un sistema de ecuaciones lineales con matriz $A = (a_{ij} - \delta_{ij})$, donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Si $|A| \neq 0$, la matriz inversa de A no tiene por qué tener sus coeficientes en D, pero, teniendo en cuenta la fórmula con que se calcula, sí que los tiene la matriz $B = |A|A^{-1}$, de modo que $BA = |A|I_n$. Es fácil ver entonces que $|A|v_i = 0$, lo cual es cierto también si $|A| = 0$. Por consiguiente, $|A|M = 0$, pero es claro que $|A| \in 1 + \mathfrak{a}$, luego por hipótesis $M = 0$. ∎

Nota Observemos que la última hipótesis del teorema anterior (en la que intervienen $\mathfrak{a}$ y M) es consecuencia de la hipótesis alternativa en [TAl 2.27], es decir, que $\mathfrak{a}$ está contenido en todo ideal maximal de D (que es una condición exclusivamente sobre $\mathfrak{a}$), pues en tal caso, si $a \in 1 + \mathfrak{a}$, se cumple que a es una unidad de D, ya que en caso contrario estaría contenido en un ideal maximal $\mathfrak{m}$

de D, pero $a = 1 + a'$, con $a' \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$, luego $1 \in \mathfrak{m}$, contradicción. Y si a es una unidad y $aM = 0$, claramente $M = 0$. ∎

Veamos algunas consecuencias:

Teorema B.2 *Sea D un dominio íntegro y E una extensión de D finitamente generada como D-módulo. Sea $\mathfrak{a} \neq 1$ un ideal en D. Entonces $\mathfrak{a}E \neq 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $1 \in E$, es claro que $aE = 0$ sólo se cumple si $a = 0$, pero $0 \notin 1+\mathfrak{a}$. Así pues, la hipótesis del teorema anterior se cumple trivialmente y concluimos que $\mathfrak{a}E \neq 1$, pues de lo contrario sería $E = 0$. ∎

Teorema B.3 *Sea D un dominio íntegro, $\mathfrak{a}$ un ideal de D tal que todo elemento de $1+\mathfrak{a}$ es inversible y M un D-módulo finitamente generado. Entonces, $m_1, \ldots, m_n \in M$ generan M si y sólo si sus clases módulo $\mathfrak{a}M$ generan $M/\mathfrak{a}M$.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es obvia. Sea $M' = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$. Por hipótesis $M' + \mathfrak{a}M = M$. Basta probar que $M/M' = 0$. Aplicaremos B.1. Ciertamente, $\mathfrak{a}(M/M') = M/M'$. Hemos de ver que si $a \in 1 + \mathfrak{a}$ y $aM/M' = 0$, entonces $M/M' = 0$, pero es que un tal a es una unidad, luego $aM/M' = M/M'$. ∎

Para la última consecuencia del lema de Nakayama necesitamos un caso particular del llamado teorema de la intersección de Krull:

Teorema B.4 *Sea D un anillo noetheriano y $\mathfrak{a}$ un ideal de D. Sea $\mathfrak{b} = \bigcap_{r \geq 1} \mathfrak{a}^r$. Entonces $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$.*

DEMOSTRACIÓN: Como D es noetheriano, existe un ideal $\mathfrak{c}$ en D maximal entre los ideales que cumplen $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Basta probar que $\mathfrak{a}^r \subset \mathfrak{c}$ para cierto $r \geq 1$, pues entonces $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^r \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$.

A su vez es suficiente probar que para cada $a \in \mathfrak{a}$ existe un $m \geq 1$ tal que $a^m \in \mathfrak{c}$, pues en tal caso, si $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, podemos tomar un mismo m tal que $a_i^m \in \mathfrak{c}$ para todo i, y entonces $r = mk$ cumple lo pedido, ya que en un producto de mk generadores de $\mathfrak{a}$ ha de haber uno que se repita m veces.

Fijado, $a \in \mathfrak{a}$, sea $\mathfrak{d}_m = \{d \in D \mid a^m d \in \mathfrak{c}\}$. Usando de nuevo que D es noetheriano concluimos que existe un $m \geq 1$ tal que $\mathfrak{d}_m = \mathfrak{d}_n$ para todo $n \geq m$. Vamos a probar que $((a^m)+\mathfrak{c})\cap\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. La maximalidad de $\mathfrak{c}$ implicará entonces que $a^m \in \mathfrak{c}$ y el teorema quedará probado.

Una inclusión es obvia. Tomemos $x = ua^m + c \in ((a^m) + \mathfrak{c}) \cap \mathfrak{b}$ y veamos que $x \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Tenemos que $ax = ua^{m+1} + ac \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$, luego $ua^{m+1} \in \mathfrak{c}$ y por la elección de m también $ua^m \in \mathfrak{c}$. Así pues, $x \in \mathfrak{c} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. ∎

Teorema B.5 *Sea D un dominio íntegro noetheriano y $\mathfrak{a}$ un ideal de D tal que todo elemento de $1 + \mathfrak{a}$ sea unitario. Entonces $\bigcap_{r \geq 1} (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^r) = \mathfrak{b}$ para todo ideal $\mathfrak{b}$ de A.*

DEMOSTRACIÓN: En el caso $\mathfrak{b} = 0$ aplicamos el lema de Nakayama al módulo $M = \bigcap_{r\geq 1} \mathfrak{a}^r$. La hipótesis $\mathfrak{a}M = M$ se cumple por el teorema anterior.

En el caso general tomamos $B = A/\mathfrak{b}$, que sigue siendo un anillo noetheriano y $\overline{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$, que es un ideal de B tal que los elementos de $1+\overline{\mathfrak{a}}$ son unidades. Entonces $\overline{\mathfrak{a}}^r = (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^r)/\mathfrak{b}$, y el caso anterior nos da que $\bigcap_{r\geq 1} (\overline{\mathfrak{a}}^r) = 0$, de donde se sigue el teorema. ∎

B.2 Series formales de potencias

Vamos a ver cómo trabajar con series de potencias en ausencia de una topología que dé sentido a su convergencia. La idea es que las series de potencias pueden ser definidas y manipuladas formalmente, exactamente igual que los polinomios.

Definición B.6 Si A es un dominio íntegro, llamaremos anillo de las *series formales de potencias* con n indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$ sobre A al conjunto $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ formado por todas las sucesiones $\{F_m\}_{m=0}^{\infty}$ en $A[X_1, \ldots, X_n]$ tales que F_m es una forma de grado m o la forma nula. En lugar de $\{F_m\}_{m=0}^{\infty}$ escribiremos

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_m = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots$$

o, más detalladamente,

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n},$$

donde $(i_1, \ldots, i_m)$ recorre las n-tuplas de números naturales y $a_{i_1,\ldots,i_n} \in A$.

Es fácil ver que $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ adquiere estructura de anillo conmutativo y unitario con las operaciones dadas por

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_m + \sum_{m=0}^{\infty} G_m = \sum_{m=0}^{\infty} (F_m + G_m),$$

$$\Big(\sum_{m=0}^{\infty} F_m\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} G_m\Big) = \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=m} F_i G_j\Big).$$

Podemos identificar al anillo de polinomios $A[X_1, \ldots, X_n]$ con el subanillo de $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ formado por las series de términos finalmente nulos. También es claro que podemos ver a $A[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$ como subanillo de $A[[X_1, \ldots, X_n]]$. Más aún, es fácil definir un isomorfismo

$$A[[X_1, \ldots, X_n]] \cong A[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][[X_n]].$$

La forma no nula de menor grado de una serie de potencias (no nula) se llama *término inicial* de la serie. Es claro que el término inicial de un producto

es el producto de los términos iniciales, de donde se sigue en particular que los anillos de series de potencias son dominios íntegros.

Llamaremos $A((X_1,\dots,X_n))$ al cuerpo de fracciones de $A[[X_1,\dots,X_n]]$.

A partir de aquí nos limitaremos a estudiar los anillos de series de potencias sobre un cuerpo k.

Llamaremos *orden* de una serie de potencias no nula F al grado de su término inicial. Lo representaremos por $v(F)$. Convenimos en que el orden de la serie nula es $v(0) = +\infty$, de modo que —con los convenios aritméticos obvios— se cumplen trivialmente las propiedades siguientes:

$$v(F+G) \geq \text{mín}\{v(F), v(G)\}, \qquad v(FG) = v(F) + v(G).$$

Estas propiedades permiten extender v a $k((X_1,\dots,X_n))$ mediante

$$v(F/G) = v(F) - v(G),$$

y se siguen cumpliendo las dos propiedades anteriores. De este modo, v resulta ser una valoración en el sentido de [TAl 5.11], luego $k((X_1,\dots,X_n))$ se convierte en un cuerpo métrico discreto con el valor absoluto dado por $|F| = 2^{-v(F)}$ (con el convenio de que $|0| = 0$). En lo sucesivo consideraremos a $k((X_1,\dots,X_n))$ y a $k[[X_1,\dots,X_n]]$ como espacios topológicos con la topología inducida por este valor absoluto.

Observemos que toda serie formal de potencias cumple

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_m = \lim_N \sum_{m=0}^{N} F_m,$$

pues

$$v\Big(\sum_{m=0}^{\infty} F_m - \sum_{m=0}^{N} F_m\Big) > N.$$

Esto significa que una serie es el límite de sí misma cuando se la considera como serie en el sentido topológico usual (como sucesión de polinomios). En particular tenemos que $k[X_1,\dots,X_n]$ es denso en $k[[X_1,\dots,X_n]]$.

Teorema B.7 *Si k es un cuerpo, el anillo $k[[X_1,\dots,X_n]]$ es un espacio métrico completo.*

Demostración: Sea $\{F_t\}_{t=0}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $k[[X_1,\dots,X_n]]$. Esto significa que, para cada $m \geq 0$ existe un t_0 tal que si $t \geq t_0$, entonces $v(F_t - F_{t_0}) \geq m+1$. A su vez, esto significa que todos los términos de la sucesión $\{F_t\}_{t=t_0}^{\infty}$ tienen los mismos términos de grado m, que constituyen una forma F_m de grado m. Notemos que F_m no depende de t_0, pues es simplemente la forma de grado m de F_t para cualquier t suficientemente grande. Estas formas determinan una serie $F = \sum_{m=0}^{\infty} F_m \in k[[X_1,\dots,X_n]]$, con la propiedad de que $v(F_t - F) \geq m+1$ para todo $t \geq t_0$, y esto significa que $\lim_t F_t = F$. ∎

A la hora de trabajar con un anillo es conveniente conocer sus unidades:

Teorema B.8 *Una serie formal de potencias $F \in k[[X_1, \ldots, X_n]]$ es una unidad si y sólo si su término independiente es no nulo (es decir, si $v(F) = 0$ o, equivalentemente, $|F| = 1$).*

DEMOSTRACIÓN: Si F es una unidad existe una serie G tal que $FG = 1$. De aquí se sigue que las formas de grado 0 verifican $F_0G_0 = 1$, luego $F_0 \neq 0$.

Recíprocamente, si $F_0 \neq 0$ podemos definir recursivamente formas $G_0, G_1, \ldots$ de modo que

$$F_0G_0 = 1,\ F_1G_0 + F_0G_1 = 0,\ F_2G_0 + F_1G_1 + F_0G_2 = 0, \ldots$$

Es claro que cada G_m es una forma de grado m (o la forma nula) y la suma G de todas estas formas cumple $FG = 1$. ∎

Como consecuencia vemos que $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ tiene un único ideal maximal

$$\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n),$$

que no es sino el ideal formado por las series F que cumplen $v(F) > 0$ o, equivalentemente, $|F| < 1$.

Nota Si $k \subset K$, es claro que la topología de $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ es la restricción de la de $K[[X_1, \ldots, X_n]]$. Más aún, si D es un dominio íntegro y k es su cuerpo de cocientes, es fácil ver que $D[[X_1, \ldots, X_n]]$ es completo con la topología inducida. ∎

El teorema B.8 nos da la estructura de los anillos $k[[X]]$. En efecto, toda serie de potencias (no nula) en una indeterminada es de la forma

$$F = \sum_{m=r}^{\infty} a_m X^m, \qquad a_r \neq 0,$$

con lo que $F = \epsilon X^r$, donde

$$\epsilon = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+r} X^m$$

es una unidad de $k[[X]]$. La expresión es única porque necesariamente $r = v(F)$.

A su vez esto implica que $k[[X]]$ es un dominio euclídeo con la norma dada por la aplicación v, ya que trivialmente $v(FG) \geq v(F)$ (si $F \neq 0 \neq G$) y dados un dividendo $D = \epsilon X^r$ y un divisor $d = \delta X^s$ ambos no nulos, la división euclídea es

$$\begin{aligned} D &= d(\epsilon\delta^{-1}X^{r-s}) + 0 && \text{si } r \leq s,\\ D &= d \cdot 0 + D && \text{si } s < r. \end{aligned}$$

Así pues, $k[[X]]$ es un dominio de ideales principales y, como sólo tiene un ideal maximal $\mathfrak{m} = (X)$, es un dominio de factorización única con un único primo X. Resumimos lo que hemos demostrado:

Teorema B.9 *Si k es un cuerpo, entonces $k[[X]]$ es un dominio de ideales principales con un único ideal maximal $\mathfrak{m} = (X)$. Sus únicos ideales son*

$$0 \subset \cdots \subset \mathfrak{m}^3 \subset \mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{m} \subset 1.$$

Más aún, ahora es inmediata la estructura de los cuerpos $k((X))$:

Teorema B.10 *Si k es un cuerpo, entonces cada elemento no nulo de $k((X))$ se expresa de forma única como*

$$S = \sum_{n=r}^{\infty} a_n X^n,$$

donde $r \in \mathbb{Z}$ y $a_r \neq 0$, y entonces $r = v(S)$.

Demostración: En efecto, los elementos de $k((X))$ son fracciones $S = F/G$, donde $F = \epsilon X^u$, $G = \epsilon' X^v$, para ciertos $u, v \in \mathbb{N}$ de modo que

$$r = v(S) = v(F) - v(G) = u - v.$$

Así $S = \epsilon\epsilon'^{-1} X^r$ y, si $\epsilon\epsilon'^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m X^m$, con $b_0 \neq 0$, tenemos que

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} b_m X^{m+r} = \sum_{n=r}^{\infty} a_n X^n,$$

donde $a_n = b_{n-r}$. Claramente la expresión es única. ∎

Cuando no queramos especificar el orden $v(S)$ de una serie de potencias usaremos la notación

$$S = \sum_{-\infty \ll n} a_n X^n,$$

dejando así constancia de que el número de coeficientes negativos no nulos ha de ser finito.

Observemos que $k[[X]]$ no es sino la bola unitaria cerrada de $k((X))$. También es inmediato que $k(X)$ es denso en $k((X))$, pues cada elemento de $k((X))$ es la suma de una serie cuyas sumas parciales están en $k(X)$.

Teorema B.11 *Si k es un cuerpo, el cuerpo métrico $k((X))$ es completo.*

Demostración: Si $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, está acotada por un $M > 0$. Podemos tomar r tal que $|X^r| = 2^r > M$, con lo que $\{X^{-r}\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $k[[X]]$, luego converge, por B.7, luego la sucesión original también converge. ∎

Nota No es cierto que los cuerpos métricos $k((X_1, \ldots X_n))$ con $n \geq 2$ sean completos. Por simplicidad, vamos a probarlo para el caso de dos indeterminadas $k((X, Y))$, pero el argumento es válido en general.

Llamamos $T = X/Y$ y consideramos la aplicación $\phi : k[[X,Y]] \longrightarrow k(T)[[Y]]$ dada por

$$\phi(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(X,Y)) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(T,1)Y^n.$$

Claramente es una inmersión isométrica[1] que se extiende a su vez a una inmersión isométrica $\phi : k((X,Y)) \longrightarrow k(T)((Y))$. Llamemos $D \subset K \subset k(T)((Y))$ a las imágenes de $k[[X,Y]]$ y $k((X,Y))$, respectivamente. Por B.7 sabemos que D es completo y queremos probar que K no lo es. Por B.11 sabemos también que el cuerpo $k(T)((Y))$ es completo. De hecho, vamos a probar que es la compleción de K.

Para ello observamos en primer lugar que D consta de las series $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(T)Y^n$ tales que $\operatorname{grad} p_n(T) \leq n$.

De aquí se sigue que $k(T) \subset K$, pues, dado $p(T)/q(T) \in k(T)$, basta tomar un n mayor que el grado de ambos polinomios para expresar

$$\frac{p(T)}{q(T)} = \frac{p(T)Y^n}{q(T)Y^n}$$

como cociente de elementos de D. Como obviamente $Y \in K$, concluimos que $k(T)(Y) \subset K \subset k(T)((Y))$, pero$k(T)(Y)$ es denso en $k(T)((Y))$, luego esto ya prueba que $k(T)((Y))$ es la clausura, luego la compleción de K. Sólo falta probar que no se da la igualdad $K = k(T)((Y))$.

Tomemos una serie $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[T]Y^n \in k(T)[[Y]]$ con $c_0(T) \neq 0$. Vamos a encontrar condiciones necesarias para que pueda estar en K. Esto significa que podemos expresarla en la forma

$$S = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n(T)Y^n}{\sum_{n=0}^{\infty} q_n(T)Y^n},$$

donde $\operatorname{grad} p_n(T) \leq n$, $\operatorname{grad} q_n(T) \leq n$. Puesto que $v(S) = 0$, el numerador y el denominador deben ser del mismo orden N, de modo que, con más precisión,

$$S = \frac{\sum_{n=N}^{\infty} p_n(T)Y^n}{\sum_{n=N}^{\infty} q_n(T)Y^n},$$

donde $p_N(T) \neq 0$, $q_N(T) \neq 0$. Cancelando Y^N y renumerando queda:

$$S = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n(T)Y^n}{\sum_{n=0}^{\infty} q_n(T)Y^n},$$

[1]En el caso general definiríamos $T_i = X_i/X_n$ y consideraríamos la inmersión isométrica $\phi : k[[X_1,\dots,X_n]] \longrightarrow k(T_1,\dots,T_{n-1})[[X_n]]$.

donde ahora $p_0(T) \neq 0 \neq q_0(T)$ y $\operatorname{grad} p_n(T) \leq N+n$, $\operatorname{grad} q_n(T) \leq N+n$.

Por B.8 tenemos que el denominador es una unidad de $k(T)[[Y]]$. Pongamos que

$$(\sum_{n=0}^{\infty} q_n(T)Y^n)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(T)Y^n,$$

donde $r_n(T) \in k(T)$.

Observemos que $v_\infty : k[T] \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $v(p) = -\operatorname{grad} p$ se extiende a una valoración $v_\infty : k(T) \longrightarrow \mathbb{Z}$. En estos términos, tenemos que $v_\infty(q_n) \geq -N-n$. Llamemos $M = \operatorname{grad} q_0 \leq N$.

Como $q_0 r_0 = 1$, tenemos que $r_0 = 1/q_0$ y $v_\infty(r_0) = -v_\infty(q_0) = M$.

A su vez, $q_0 r_1 + q_1 r_0 = 0$, luego $r_1 = -q_1 r_0/q_0$ y

$$v_\infty(r_1) = v_\infty(q_1) + v_\infty(r_0) - v_\infty(q_0) \geq -N - 1 + M + M = 2M - N - 1.$$

A su vez $q_0 r_2 + q_1 r_1 + q_2 r_0 = 0$, luego $r_2 = (-q_1 r_1 - q_2 r_0)/q_0$ y

$$\begin{aligned} v_\infty(r_2) &\geq \text{mín}\{v_\infty(q_1) + v_\infty(r_1), v_\infty(q_2) + v_\infty(r_0)\} - v_\infty(q_0) \\ &\geq \text{mín}\{-2(N-M) - 2, -(N-M) - 2\} + M = 3M - 2N - 2. \end{aligned}$$

Es fácil ver inductivamente que, en general,

$$v_\infty(r_n) \geq (n+1)M - nN - n.$$

Ahora

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Y^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n Y^n \sum_{n=0}^{\infty} r_n Y^n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} p_{m-n} r_n Y^n,$$

luego $c_m = \sum_{n=0}^{m} p_{m-n} r_n$, de donde

$$v_\infty(c_m) \geq \min_n (v_\infty(p_{m-n}) + v_\infty(r_n)) \geq \min_n(-m - (n+1)(N-M))$$

$$= -m - (m+1)(N-M) = -(N-M) - m(N-M+1).$$

Equivalentemente,

$$\operatorname{grad} c_m \leq (N-M) + m(N-M+1).$$

Así pues, para cada $S \in k[T][[Y]] \cap K$ con $v(S) = 0$, existe un número natural $C = N - M$ tal que los grados de los coeficientes de S están acotados en la forma $\operatorname{grad} c_n \leq C + n(C+1)$. Ahora es evidente que, por ejemplo,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} T^{n^2} Y^n \notin K.$$

Explícitamente, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{n^2}}{Y^{n^2}} Y^n$$

es un ejemplo de sucesión de Cauchy en $k(\!(X,Y)\!)$ no convergente. ∎

Vamos a ver que los cuerpos métricos completos de la forma $k((X))$ tienen una caracterización sencilla.

Si K es un cuerpo métrico, k es un subcuerpo de K y $\pi \in K$, diremos que $K = k((\pi))$ si todo elemento de K se expresa de forma única como serie de potencias de π con coeficientes en k y la aplicación

$$\sum_{-\infty \ll n} a_n x^n \mapsto \sum_{-\infty \ll n} a_n \pi^n$$

es un isomorfismo topológico.

El teorema [TAl 5.18] casi viene a decir que todos los cuerpos métricos discretos completos son de la forma $k((\pi))$, pero esto no es exacto. Si $K = k((x))$ es un cuerpo de series de potencias y $\mathfrak{p}$ es el ideal primo de $k[[x]]$, es claro que toda serie de $k[[x]]$ es congruente módulo $\mathfrak{p}$ con su término independiente, así como que dos constantes no son congruentes módulo $\mathfrak{p}$. Esto se traduce en que la aplicación natural $k \longrightarrow \overline{K}$ dada por $a \mapsto [a]$ es un isomorfismo de cuerpos.

Así pues, una condición necesaria para que un cuerpo métrico discreto completo sea topológicamente isomorfo a un cuerpo de series de potencias es que su anillo de enteros contenga un subcuerpo isomorfo a su cuerpo de restos. A continuación probamos que la condición es suficiente:

Teorema B.12 *Sea K un cuerpo métrico discreto completo que posea un subcuerpo k contenido en su anillo de enteros de modo que la aplicación natural en el cuerpo de restos $k \longrightarrow \overline{K}$ sea un isomorfismo. Entonces $K = k((\pi))$, donde π es cualquier primo de su anillo de enteros.*

Demostración: Sea $\mathfrak{O}$ el anillo de enteros de K y sea π un primo en $\mathfrak{O}$. El teorema [TAl 5.18] aplicado con $F = k$ nos da que todo $\alpha \in \mathfrak{O}$ se expresa de forma única como

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n,$$

con $a_n \in k$. Por consiguiente la sustitución de x por π es una biyección entre $k[[x]]$ y $\mathfrak{O}$. Es inmediato comprobar que se trata de un isomorfismo de anillos, que se extiende a su vez a un isomorfismo de cuerpos entre $k((x))$ y K (que, de hecho, sigue siendo la sustitución de x por π).

Finalmente, es fácil ver que la valoración de K (que es la inducida por π) asigna a cada serie el menor entero n cuyo coeficiente n-simo es no nulo, de donde se sigue que la sustitución por π transforma v_x en v_π, luego es un isomorfismo topológico. Por lo tanto, $K = k((\pi))$. ∎

Anillos de series de potencias convergentes Usaremos la letra $\mathbb{K}$ para referirnos indistintamente al cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. En el caso en que $k = \mathbb{K}$ podemos considerar el subanillo $\mathbb{K}\{X_1, \dots X_n\}$ de $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$ formado por las series que convergen (absolutamente) en un entorno de 0 respecto de la topología usual en $\mathbb{K}^n$.

Notemos que $\mathbb{R}\{X_1,\dots,X_n\} = \mathbb{C}\{X_1,\dots,X_n\} \cap \mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]$, pues si una serie con coeficientes reales converge (absolutamente) en un entorno de 0 en $\mathbb{R}^n$, es obvio que también lo hace en un entorno de 0 en $\mathbb{C}^n$.

Observemos que si $F \in \mathbb{C}\{X_1,\dots,X_n\}$ es una unidad en $\mathbb{C}[[X_1,\dots,X_n]]$, también es una unidad en $\mathbb{C}\{X_1,\dots,X_n\}$. En efecto, sabemos que su término independiente no es nulo, luego su suma no se anula en $(0,\dots,0)$, luego la función $1/F$ es holomorfa en un entorno de $(0,\dots,0)$ y admite un desarrollo en serie [AA 1.18], es decir, existe una serie convergente G tal que $FG = 1$. En principio este producto se refiere a las funciones suma, pero entonces el producto formal converge a la constante 1 y, por la unicidad de los desarrollos, $FG = 1$ en $\mathbb{C}[[X_1,\dots,X_n]]$. En otras palabras, la inversa de una serie convergente (cuando existe) es también una serie convergente. De aquí se sigue inmediatamente que lo mismo es cierto para series con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Equivalentemente, el anillo $\mathbb{K}\{X_1,\dots,X_n\}$ tiene a $\mathfrak{m} = (X_1,\dots,X_n)$ como único ideal maximal. Notemos que para comprobar la convergencia de una serie podemos sustituir sus coeficientes por sus valores absolutos y estudiarla sobre puntos con coordenadas reales positivas. Teniendo esto en cuenta, es fácil ver que $\mathbb{K}\{X_1,\dots,X_n\} \cong \mathbb{K}\{X_1,\dots,X_{n-1}\}\{X_n\}$.

Factorización única Es conocido que los anillos de polinomios en una indeterminada son dominios de ideales principales, mientras que esto es falso en el caso de varias indeterminadas, pero todos ellos son dominios de factorización única. Vamos a probar que lo mismo sucede con los anillos de series formales de potencias. Por simplicidad supondremos que el cuerpo de constantes k es infinito, si bien esta hipótesis se puede suprimir, aunque para nosotros no supone ninguna restricción.

Necesitamos un resultado auxiliar. Diremos que una $F \in k[[X_1,\dots,X_n]]$ no nula es *regular* en X_n si su término inicial contiene un monomio cX_n^m con $c \in k$, $c \neq 0$.

Teorema B.13 *Si k es un cuerpo infinito y $F \in k[[X_1,\dots,X_n]]$ es una serie no nula, existe un automorfismo $\phi : k[[X_1,\dots,X_n]] \longrightarrow k[[X_1,\dots,X_n]]$ tal que $\phi(F)$ es regular en X_n.*

Demostración: Sea F_m el término inicial de F. Entonces tenemos que $F_m(X_1,\dots,X_{n-1},1)$ es un polinomio no nulo. Como el cuerpo k es infinito existe $(a_1,\dots,a_{n-1}) \in k^{n-1}$ tal que $F_m(a_1,\dots,a_{n-1},1) \neq 0$.

La sustitución $X_i \mapsto X_i + a_iX_n$ $(i = 1,\dots,n-1)$, $X_n \mapsto X_n$ define un automorfismo del anillo de polinomios $k[X_1,\dots,X_n]$, que claramente se extiende a un automorfismo ϕ del anillo de series formales.

La forma inicial de $\phi(F)$ es $F'_m = F_m(X_1 + a_1X_n,\dots,X_{n-1} + a_{n-1}X_n, X_n)$, luego $F'_m(0,\dots,0,1) = F_m(a_1,\dots,a_{n-1},1) \neq 0$, y éste es el coeficiente de X_n en F'_m, luego $\phi(F)$ es regular en X_n. ∎

Es fácil ver que, para el caso $k = \mathbb{K}$, el automorfismo ϕ deja invariante al subanillo $\mathbb{K}\{X_1,\dots,X_n\}$.

Insistimos en que la hipótesis sobre el cuerpo k en los teoremas siguientes puede ser eliminada sin más que generalizar el teorema anterior. El teorema siguiente nos permitirá aplicar razonamientos inductivos sobre el número de indeterminadas:

Teorema B.14 (Teorema de preparación de Weierstrass) *Consideremos una serie de potencias $F \in k[[X_1,\dots,X_n]]$ regular respecto de X_n y tal que $v(F) = m \geq 1$. Para cada serie $G \in k[[X_1,\dots,X_n]]$ existen $U \in k[[X_1,\dots,X_n]]$ y $R_i \in k[[X_1,\dots,X_{n-1}]]$ (para $0 \leq i \leq m-1$) unívocamente determinados por G y F tales que*

$$G = UF + \sum_{i=0}^{m-1} R_i X_n^i.$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada serie $P \in k[[X_1,\dots,X_n]]$ llamamos $r(P)$ a la suma de todos los monomios de P que no son múltiplos de X_n^m. De este modo, existe una serie $h(P) \in k[[X_1,\dots,X_n]]$ tal que

$$P = r(P) + X_n^m h(P). \tag{B.1}$$

Es claro que $r(P)$ es un polinomio en X_n de grado $< m$ con coeficientes en $k[[X_1,\dots,X_{n-1}]]$. También es inmediato que r y h son aplicaciones k-lineales de $k[[X_1,\dots,X_n]]$ en sí mismo.

El hecho de que F sea regular en X_n se traduce en que $v(h(F)) = 0$, luego $h(F)$ es una unidad de $k[[X_1,\dots,X_n]]$. Por su parte, la serie $r(F)$, vista como polinomio en X_n con coeficientes en $k[[X_1,\dots,X_{n-1}]]$, tiene sus coeficientes en el ideal maximal $\mathfrak{m} = (X_1,\dots,X_{n-1})$ (o, de lo contrario, F tendría un monomio cX^r con $r < m$).

El teorema equivale a la existencia de una serie $U \in k[[X_1,\dots,X_n]]$ tal que

$$h(G) = h(UF), \tag{B.2}$$

pues en tal caso $h(G - UF) = 0$ y (B.1) nos da que $G - UF = r(G - UF)$ es un polinomio en X_n de grado $< m$. Recíprocamente, si se cumple el teorema entonces $h(G-UF) = 0$, luego U cumple (B.2) por la linealidad de h. Más aún, si probamos que U está unívocamente determinado, también lo estarán los R_i.

Para cualquier serie U, tenemos que $UF = U\,r(F) + X_n^m U\,h(F)$, luego (B.2) equivale a

$$h(G) = h(U\,r(F)) + U\,h(F). \tag{B.3}$$

Como $h(F)$ es una unidad, vamos a expresar esta condición en términos de $V = U\,h(F)$. Llamamos $M = -r(F)h(F)^{-1}$, de modo que $U\,r(F) = -MV$ y la condición (B.3) es equivalente a

$$h(G) = -h(MV) + V. \tag{B.4}$$

Así pues, basta probar que hay una única serie V que cumple esta condición. Llamemos ahora $s(P) = h(MP)$, con lo que tenemos otra aplicación k-lineal en $k[[X_1,\dots,X_n]]$. La condición (B.4) es equivalente a

$$V = H + s(V), \tag{B.5}$$

donde hemos definido $H = h(G)$. En definitiva, basta probar que existe una única serie de potencias V que cumple esta última condición.

Para probar la unicidad observamos que si V cumple (B.5) entonces, la linealidad de s nos da $V = H + s(H) + s^2(V)$ y, en general,

$$V = H + s(H) + s^2(H) + \cdots + s^r(H) + s^{r+1}(V).$$

Notemos que si una serie P, vista como serie en X_n con coeficientes en $k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$, tiene todos sus coeficientes en el ideal $\mathfrak{m}^r$, para cierto $r \geq 0$, entonces $s(P)$ tiene sus coeficientes en $\mathfrak{m}^{r+1}$. En efecto, los coeficientes de M están en $\mathfrak{m}$, luego los de MP están en $\mathfrak{m}^{r+1}$ y los coeficientes de $h(MP)$ son parte de los de MP. En particular las sucesiones $s^r(H)$ y $s^{r+1}(V)$ tienden a cero, luego la serie

$$V = H + s(H) + s^2(H) + \cdots \tag{B.6}$$

converge y V es el único que puede cumplir (B.5). Falta probar que ciertamente lo cumple. Para ello hacemos $V = H + s(H) + \cdots + s^r(H) + V_r$.

Por la linealidad de s vemos que

$$V - H - s(V) = V_r - s^{r+1}(H) - s(V_r),$$

y las tres sucesiones de la derecha tienden a 0 con r, luego concluimos que $V - H - s(V) = 0$. ∎

Nota Observemos que el teorema de preparación vale igualmente para anillos $\mathbb{K}\{X_1, \ldots, X_n\}$. En primer lugar, es evidente que si P es una serie convergente, las series $r(P)$ y $h(P)$ son también convergentes. Más aún, si llamamos $\bar{P}$ a la serie que resulta de sustituir los coeficientes de P por sus valores absolutos, tenemos que sobre números reales positivos, $\overline{h(P)}$ está mayorada por $\bar{P}$. Por consiguiente, $\overline{s(P)}$ está mayorada por $\bar{M}\bar{P}$, y $\overline{s^n(P)}$ está mayorada por $\bar{M}^n\bar{P}$.

Esto garantiza la convergencia de la serie V dada por (B.6), pues $\bar{V}$ está mayorada por la serie

$$(\bar{M} + \bar{M}^2 + \bar{M}^3 + \cdots)\bar{H},$$

que converge en un entorno de 0, ya que $\bar{M}(0) = 0$, luego en un entorno de 0 se cumple que $\bar{M}(r_1, \ldots, r_n) < 1$, y la suma es una serie geométrica. De la convergencia de V se sigue la de todas las series que proporciona el teorema. ∎

Ahora ya podemos probar:

Teorema B.15 *Si k es un cuerpo infinito, el anillo de series formales de potencias $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ es noetheriano.*

Demostración: Razonamos por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es obvio, puesto que $k[[X]]$ es un dominio de ideales principales. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal en $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ y vamos a ver que tiene un generador finito. Podemos suponer que $\mathfrak{a} \neq 0, 1$ y, usando el teorema B.13, que $\mathfrak{a}$ contiene una serie F (necesariamente con $v(F) = m \geq 1$) regular en X_n.

Llamemos $A = k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$, que es un anillo noetheriano por hipótesis de inducción. El teorema anterior implica que

$$\mathfrak{a} = (F) + (\mathfrak{a} \cap \langle 1, X_n, \ldots, X_n^{m-1} \rangle_A).$$

Ahora bien, $\langle 1, X_n, \ldots, X_n^{m-1} \rangle_A$ es un A-módulo finitamente generado y, por la propiedad de noether, también lo es el submódulo $\mathfrak{a} \cap \langle 1, X_n, \ldots, X_n^{m-1} \rangle_A$. Así, un generador finito de este módulo forma, junto con F, un generador finito de $\mathfrak{a}$. ∎

La misma prueba vale para los anillos $\mathbb{K}\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Ahora, para probar que los anillos $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ son dominios de factorización única basta demostrar que en ellos los elementos irreducibles son primos. Para ello necesitamos una variante del teorema de Weierstrass:

Teorema B.16 *Sea $F \in k[[X_1, \ldots, X_n]]$ una serie de potencias regular en X_n tal que $m = v(F) \geq 1$. Entonces existen una unidad $E \in k[[X_1, \ldots, X_n]]$ y series $R_i \in k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$ (para $0 \leq i \leq m-1$), ninguna de las cuales es una unidad, tales que*

$$F = E(X_n^m + R_{m-1}X_n^{m-1} + \cdots + R_1 X_n + R_0).$$

Además, tanto E como las R_i están unívocamente determinadas por F.

Demostración: Aplicamos el teorema de Weierstrass a $G = -X_n^m$, de modo que

$$-UF = X_n^m + R_{m-1}X_n^{m-1} + \cdots + R_1 X_n + R_0.$$

Si algún R_i fuera una unidad, el miembro izquierdo tendría términos de grado $< m$, lo cual es imposible. Por otra parte UF contiene el monomio X_n^m, lo que implica que U es una unidad. Basta tomar $E = -U^{-1}$. La unicidad se sigue inmediatamente de la del teorema de Weierstrass. ∎

Teorema B.17 *Si k es un cuerpo infinito, entonces $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ es un dominio de factorización única.*

Demostración: Razonamos por inducción sobre n. El caso $n = 1$ lo tenemos probado, pues $k[[X]]$ es un dominio de ideales principales. Puesto que $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ es noetheriano, basta tomar una serie $F \in k[[X_1, \ldots, X_n]]$ irreducible y demostrar que es prima. Para ello suponemos que F divide a un producto GH, es decir, que $DF = GH$, y hemos de probar que F divide a G o a H.

El teorema B.13 nos permite suponer que la serie $DFGH$ es regular en X_n, pero entonces también lo son las cuatro series D, F, G, H. Sean D', F', G', H' los polinomios en $k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][X_n]$ asociados a las series respectivas por el teorema anterior (convenimos que el polinomio asociado a una unidad es 1). Es claro que $D'F'$ y $G'H'$ cumplen el teorema anterior para las series DF y GH,

luego por la unicidad $D'F' = G'H'$. Basta probar que F' divide a G' o a H'. Equivalentemente, podemos suponer que D, F, G, $H \in k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][X_n]$.

Veamos que F es irreducible en $k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][X_n]$. En efecto, si $U \mid F$ en este anillo y no es una unidad, entonces tiene grado $r \geq 1$ y su coeficiente director es una unidad en $k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$, ya que el coeficiente director de F es 1. Por consiguiente U contiene un monomio cX_n^r con $c \neq 0$.

La aplicación $k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]] \longrightarrow k$ que a cada serie le asigna su término independiente es un homomorfismo de anillos que induce a su vez un homomorfismo $k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][X_n] \longrightarrow k[X_n]$. La imagen de U divide a la imagen de F, que es X_n^m, luego la imagen de U es exactamente cX_n^r. En particular esto implica que U no tiene término independiente, luego tampoco es una unidad en $k[[X_1, \ldots, X_n]]$.

Así pues, si F se descompusiera en $k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][X_n]$ como producto de dos factores no unitarios, lo mismo le sucedería en $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ y no sería irreducible. Concluimos que F es irreducible en $k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][X_n]$. Por hipótesis de inducción $k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$ es un dominio de factorización única, luego también lo es $k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][X_n]$, luego F es primo en este anillo, en el cual $F \mid GH$. Concluimos que $F \mid G$ o $F \mid H$ en $k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][X_n]$ y, por consiguiente, también en $k[[X_1, \ldots, X_n]]$. ∎

Una vez más, el mismo argumento prueba que $\mathbb{K}\{X_1, \ldots, X_n\}$ es también un dominio de factorización única. Más aún, el mismo argumento empleado para $k[[X]]$ prueba que $\mathbb{K}\{X\}$ es un dominio de ideales principales.

Derivadas parciales Para terminar vamos a estudiar las derivadas parciales de las series formales de potencias.

En el anillo de polinomios $k[X_1, \ldots, X_n]$ tenemos definidas la aplicaciones lineales

$$\frac{\partial}{\partial X_i} : k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow k[X_1, \ldots, X_n],$$

que cumplen las propiedades usuales de las derivadas. Las derivadas de una constante son nulas, las derivadas de una forma de grado $n > 0$ son formas de grado $n-1$ o tal vez la forma nula (esto sólo puede ocurrir si k tiene característica prima). En cualquier caso, la derivada de una forma de grado n tiene siempre grado $\geq n - 1$ (entendiendo que el grado de 0 es $+\infty$).

Esto nos permite definir

$$\frac{\partial}{\partial X_i} : k[[X_1, \ldots, X_n]] \longrightarrow k[[X_1, \ldots, X_n]]$$

mediante

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial F_m}{\partial X_i},$$

de modo que

$$v\Big(\frac{\partial F}{\partial X_i}\Big) \geq v(F) - 1.$$

Esta desigualdad implica que las derivadas parciales son aplicaciones continuas. A su vez, de aquí se sigue que todas las propiedades de las derivadas parciales sobre polinomios valen también sobre series de potencias. Por ejemplo, para probar la fórmula del producto tomamos dos series F y G y las expresamos como límites de sus sumas parciales:

$$F = \lim_m F^{(m)}, \qquad G = \lim_m G^{(m)},$$

con lo que

$$\frac{\partial FG}{\partial X_i} = \lim_m \frac{\partial F^{(m)}G^{(m)}}{\partial X_i} = \lim_m \Big(\frac{\partial F^{(m)}}{\partial X_i}G^{(m)} + F^{(m)}\frac{\partial F^{(m)}}{\partial X_i}\Big) = \frac{\partial F}{\partial X_i}G + F\frac{\partial G}{\partial X_i}.$$

Igualmente se demuestra la fórmula para derivar un cociente F/G (donde G ha de ser una unidad) o la versión siguiente de la regla de la cadena:

Teorema B.18 *Dados un polinomio $P(Y_1,\dots,Y_m) \in k[Y_1,\dots,Y_m]$ y m series formales de potencias $F_1,\dots,F_m \in k[[X_1,\dots,X_n]]$, se cumple que*

$$\frac{\partial P(F_1,\dots,F_m)}{\partial X_i} = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial Y_r}(F_1,\dots,F_m)\frac{\partial F_r}{\partial X_i}.$$

Si el cuerpo de constantes tiene característica 0, los coeficientes de una serie formal de potencias pueden recuperarse a partir de sus derivadas mediante la fórmula de Taylor:

Teorema B.19 *Sea k un cuerpo de característica 0 y $F \in k[[X_1,\dots,X_n]]$. Entonces*

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r_1+\cdots+r_n=m} \frac{1}{r_1!\cdots r_n!}\left.\frac{\partial^m F}{\partial X_1^{r_1}\cdots\partial X_n^{r_n}}\right|_0 X_1^{r_1}\cdots X_n^{r_n},$$

donde la notación de parciales sucesivas tiene la interpretación obvia y la evaluación en 0 se una serie representa a su término independiente.

Demostración: Basta probar que la expresión tras el primer sumatorio es F_m (la forma de grado m de F). Ahora bien, es claro que

$$\left.\frac{\partial^m F}{\partial X_1^{r_1}\cdots\partial X_n^{r_n}}\right|_0 = \frac{\partial^m F_m}{\partial X_1^{r_1}\cdots\partial X_n^{r_n}},$$

luego la expresión tras el primer sumatorio es el polinomio de Taylor de la forma F_m, luego es F_m. ∎

B.3 Diferenciales de series de potencias

En esta sección vamos a considerar cuerpos $k = k_0((x))$ de series formales de potencias en una única indeterminada sobre un cuerpo de constantes k_0 que supondremos perfecto.

Derivadas Partiremos del concepto de derivada formal de una serie de potencias, a partir del cual introduciremos después el de forma diferencial.

Definición B.20 Sea $k = k_0((x))$ el cuerpo de series formales de potencias con coeficientes en k_0. Si π es cualquier primo del anillo $k_0[[x]]$, entonces, el teorema B.12 muestra que todo elemento de k se expresa de forma única como

$$\alpha = \sum_{-\infty \ll n} a_n \pi^n, \qquad \text{con } a_n \in k_0.$$

Definimos

$$\frac{d\alpha}{d\pi} = \sum_{-\infty \ll n} n a_n \pi^{n-1}.$$

Esta definición extiende a la definición de derivada parcial en un anillo se series formales de potencias de varias variables que hemos visto en la sección precedente. El teorema siguiente recoge las propiedades básicas de esta derivada formal:

Teorema B.21 *Sea $k = k_0((x))$ un cuerpo de series formales de potencias y π un primo en k. Entonces:*

1. *Para todo α, $\beta \in k$ y todo a, $b \in k_0$, se cumple:*

$$\frac{d(a\alpha + b\beta)}{d\pi} = a\,\frac{d\alpha}{d\pi} + b\,\frac{d\beta}{d\pi}.$$

2. *Si α, $\beta \in k$, se cumple*

$$\frac{d(\alpha\beta)}{d\pi} = \frac{d\alpha}{d\pi}\,\beta + \alpha\,\frac{d\beta}{d\pi}.$$

   En particular

$$\frac{d\alpha^n}{d\pi} = n\alpha^{n-1}\frac{d\alpha}{d\pi}, \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

3. *La función*

$$\frac{d}{d\pi} : k \longrightarrow k$$

   es continua.

4. *Si π_1 es otro primo de k y $\alpha \in k$, entonces*

$$\frac{d\alpha}{d\pi_1} = \frac{d\alpha}{d\pi}\,\frac{d\pi}{d\pi_1}.$$

5. *Si $f(u,v) \in k_0[u,v]$ y α, $\beta \in k$, entonces*

$$\frac{df(\alpha,\beta)}{d\pi} = \frac{\partial f}{\partial u}(\alpha,\beta)\frac{d\alpha}{d\pi} + \frac{\partial f}{\partial v}(\alpha,\beta)\frac{d\beta}{d\pi},$$

   donde las derivadas parciales de f se entienden en el sentido usual para polinomios.

DEMOSTRACIÓN: La propiedad 1) es inmediata. Para probar 2) tomamos

$$\alpha = \sum_{-\infty \ll n} a_n \pi^n, \qquad \beta = \sum_{-\infty \ll n} b_n \pi^n.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{d\pi}\,\beta + \alpha\,\frac{d\beta}{d\pi} &= \sum_{-\infty \ll n} (n+1) a_{n+1} \pi^n \sum_{-\infty \ll n} b_n \pi^n \\
&\quad + \sum_{-\infty \ll n} a_n \pi^n \sum_{-\infty \ll n} (n+1) b_{n+1} \pi^n \\
&= \sum_{-\infty \ll n} \Big(\sum_{r+s=n} (r+1) a_{r+1} b_s + \sum_{r+s=n} (s+1) a_r b_{s+1} \Big) \pi^n \\
&= \sum_{-\infty \ll n} \Big(\sum_{r+s=n} (r+1) a_{r+1} b_s + \sum_{r+s=n} s a_{r+1} b_s \Big) \pi^n \\
&= \sum_{-\infty \ll n} (n+1) \Big(\sum_{r+s=n} a_{r+1} b_s \Big) \pi^n \\
&= \sum_{-\infty \ll n} (n+1) \Big(\sum_{r+s=n+1} a_r b_s \Big) \pi^n \\
&= \frac{d}{d\pi} \Big(\sum_{-\infty \ll n} \Big(\sum_{r+s=n} a_r b_s \Big) \pi^n \Big) = \frac{d(\alpha\beta)}{d\pi}.
\end{aligned}$$

La fórmula para la derivada de α^n para $n \geq 0$ se prueba fácilmente por inducción. Para exponentes negativos derivamos $\alpha^{-n}\alpha^n = 1$ y despejamos la derivada de α^n.

3) La continuidad de la derivación es inmediata. De hecho

$$v\left(\frac{d\alpha}{d\pi}\right) \geq v(\alpha) - 1.$$

Para probar 4) llamamos $\alpha_m = \sum_{n \leq m} a_n \pi^n$. Entonces

$$\frac{d\alpha_m}{d\pi_1} = \sum_{n \leq m} a_n \frac{d\pi^n}{d\pi_1} = \sum_{n \leq m} n a_n \pi^{n-1} \frac{d\pi}{d\pi_1} = \frac{d\alpha_m}{d\pi} \frac{d\pi}{d\pi_1}.$$

Tomando límites obtenemos la fórmula buscada.

5) Es fácil ver que si la fórmula se cumple para $f(u,v) = u^i v^j$ entonces se cumple para todo polinomio. Ahora bien, este caso se comprueba fácilmente a partir de 2) ∎

Estamos interesados en obtener propiedades relacionadas con las derivadas que no dependan del primo respecto al cual derivamos. Como primera observación a este respecto notemos que, si π y π_1 son primos de k, entonces

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi_1^n, \qquad \text{con } a_1 \neq 0,$$

(pues, según B.10, como $v(\pi) = 1$ el coeficiente a_1 debe ser el menor no nulo), luego

$$\frac{d\pi}{d\pi_1} = a_1 + a_2\pi_1 + a_3\pi_1^2 + \cdots$$

es una unidad de $k_0[[x]]$. El apartado 4) del teorema anterior prueba en particular que la propiedad $\dfrac{d\alpha}{d\pi} = 0$ es independiente del primo π. Más concretamente, es fácil probar:

Teorema B.22 *Sea $k = k_0((x))$ un cuerpo de series formales de potencias, sea $\alpha \in k$ y π un primo en $k_0[[x]]$. Se cumple*

1. *Si $\operatorname{car} k = 0$ entonces $\dfrac{d\alpha}{d\pi} = 0$ si y sólo si $\alpha \in k_0$.*
2. *Si $\operatorname{car} k = p > 0$ entonces $\dfrac{d\alpha}{d\pi} = 0$ si y sólo si $\alpha = \sum_{-\infty \ll n} a_n \pi^{pn}$, es decir, si y sólo si $\alpha \in k^p$.*

Definición B.23 Sea $k = k_0((x))$ un cuerpo de series formales de potencias y sean α, $\beta \in k$ tales que $\dfrac{d\alpha}{d\pi} \neq 0$ (para cualquier primo π). Definimos

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\dfrac{d\beta}{d\pi}}{\dfrac{d\alpha}{d\pi}},$$

para cualquier primo π. Del teorema B.21 se sigue que la definición no depende de la elección de π, así como que si α es primo esta definición coincide con la que ya teníamos.

También es inmediato comprobar que, cuando las derivadas que intervienen están definidas, se cumplen las igualdades siguientes:

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{d\gamma}{d\beta}\,\frac{d\beta}{d\alpha}, \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^{-1}.$$

Más en general, las propiedades del teorema B.21 son válidas aunque π no sea primo.

Diferenciales Supongamos, como hasta ahora, que k es un cuerpo de series de potencias. En el conjunto de todos los pares $(\beta, \alpha) \in k \times k$ tales que $\dfrac{d\alpha}{d\pi} \neq 0$ (para cualquier primo π) definimos la relación de equivalencia

$$(\beta_1, \alpha_1)\, R\, (\beta_2, \alpha_2) \quad \text{si y sólo si} \quad \beta_1 = \beta_2\,\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}.$$

A las clases de equivalencia respecto a esta relación las llamaremos *formas diferenciales* en k. La forma diferencial determinada por el par (β, α) se representa por $\beta\, d\alpha$. De este modo, se cumple que

$$\beta_1\, d\alpha_1 = \beta_2\, d\alpha_2 \quad \text{si y sólo si} \quad \beta_1 = \beta_2\, \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}.$$

Es inmediato que la forma diferencial $0\, d\alpha$ está formada por todos los pares $(0, \alpha)$ tales que $\dfrac{d\alpha}{d\pi} \neq 0$. A esta forma la llamaremos *forma nula* y la representaremos simplemente por 0.

Definimos la suma de dos formas diferenciales como

$$\beta_1\, d\alpha_1 + \beta_2\, d\alpha_2 = \Big(\beta_1 \frac{d\alpha_1}{d\alpha} + \beta_2\, \frac{d\alpha_2}{d\alpha}\Big) d\alpha, \tag{B.7}$$

donde α es cualquier elemento de k con derivadas no nulas.

Es claro que esta definición no depende de la elección de α ni de los representantes de las formas diferenciales. Con esta operación, el conjunto de las formas diferenciales es claramente un grupo abeliano (el elemento neutro es la forma nula).

También podemos definir el producto escalar

$$\gamma(\beta\, d\alpha) = (\gamma\beta)\, d\alpha, \tag{B.8}$$

con el cual el conjunto de las formas diferenciales de k resulta ser un k-espacio vectorial.

Si representamos por $d\alpha$ la forma $1\, d\alpha$, entonces una forma cualquiera $\beta\, d\alpha$ es el producto escalar de β por $d\alpha$ en el sentido que acabamos de definir.

En lo sucesivo adoptaremos el convenio de que $d\alpha = 0$ cuando (y sólo cuando) $\dfrac{d\alpha}{d\pi} = 0$. Según el teorema B.22, esto sucede cuando α es constante si $\operatorname{car} k = 0$ o cuando $\alpha \in k^p$ si $\operatorname{car} k = p$. Ahora la expresión $\beta\, d\alpha$ está definida para todo par de elementos de k, y es fácil ver que las fórmulas (B.7) y (B.8) siguen siendo válidas bajo este convenio.

Con esta notación, la derivada $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ está definida para todo par de elementos α y $\beta \in K$ tales que $d\alpha \neq 0$ y entonces

$$d\beta = \frac{d\beta}{d\alpha}\, d\alpha.$$

Esta fórmula muestra que cualquier forma no nula es una base del espacio de todas las formas, luego este espacio tiene dimensión 1.

Toda forma diferencial puede expresarse en la forma $\omega = \beta\, d\pi$, donde π es un primo de k. Como la derivada de un primo respecto de otro es una unidad, es

claro que podemos definir el *orden* de ω como $v(\omega) = v(\beta)$ sin que éste dependa del primo elegido. Más en general, es claro que

$$v(\beta\, d\alpha) = v\Big(\beta\,\frac{d\alpha}{d\pi}\Big),$$

para cualquier primo π. Por consiguiente podemos hablar de si una diferencial tiene un cero o un polo de un orden dado.

El operador de Cartier Introducimos ahora un concepto de utilidad para tratar con diferenciales en cuerpos de característica prima. Sea, pues, k un cuerpo de series de potencias sobre un cuerpo de constantes (perfecto) k_0 de característica p. Es inmediato comprobar que $|k : k^p| = p$. De hecho, si π es un primo en k, entonces $k^p = k_0((\pi^p))$, $k = k_0(\pi)$ y las potencias $1, \pi, \ldots, \pi^{p-1}$ forman una k^p-base de k. Notemos que π^p es un primo de k^p.

Estos hechos implican que toda forma diferencial ω de k se expresa de forma única como

$$\omega = u\,\frac{d\pi}{\pi} = (u_0 + u_1\pi + \cdots + u_{p-1}\pi^{p-1})\,\frac{d\pi}{\pi}, \qquad u_i \in k^p. \tag{B.9}$$

Definimos

$$C_\pi(\omega) = u_0\,\frac{d\pi^p}{\pi^p},$$

donde el miembro derecho ha de entenderse como una forma diferencial en el cuerpo $k^p = k((\pi^p))$. Es claro que C_π es una aplicación k^p-lineal del espacio de las formas diferenciales de k en el espacio de las formas diferenciales de k^p. Vamos a probar que no depende de π.

Sea $E = \{d\alpha \mid \alpha \in k\}$ el espacio de las *diferenciales exactas* de k. Se cumple que $C_\pi(d\alpha) = 0$, pues si

$$\alpha = a_0 + a_1\pi + \cdots + a_{p-1}\pi^{p-1}, \qquad a_i \in k^p,$$

entonces

$$d\alpha = (a_1\pi + \cdots + (p-1)a_{p-1}\pi^{p-1})\,\frac{d\pi}{\pi},$$

luego, en efecto, $C_\pi(d\alpha) = 0$.

Recíprocamente, si $C_\pi(\omega) = 0$ entonces ω es una forma exacta. Para probarlo la expresamos en la forma (B.9) y observamos que si $i > 0$

$$d\Big(\frac{u_i}{i}\,\pi^i\Big) = u_i\pi^i\,\frac{d\pi}{\pi},$$

es decir, todos los términos de (B.9) son exactos salvo a lo sumo el correspondiente a $i = 0$. Basta probar que $u_0 = 0$, pero es que

$$C_\pi(\omega) = u_0\,\frac{d\pi^p}{\pi^p} = 0,$$

mientras que $d\pi^p$ no es nula como forma diferencial de k^p porque π^p es un primo de k^p. Por consiguiente ha de ser $u_0 = 0$.

Con esto tenemos probado que el núcleo de C_π es exactamente E. Para demostrar que C_π no depende de π basta ver que si $\alpha \in k$ es no nulo, entonces

$$C_\pi\Big(\frac{d\alpha}{\alpha}\Big) = \frac{d\alpha^p}{\alpha^p}.$$

Para ello expresamos

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}\,\frac{d\alpha}{d\pi}\,\frac{d\pi}{\pi}, \qquad \frac{\pi}{\alpha}\,\frac{d\alpha}{d\pi} = g_0 + g_1\pi + \cdots + g_{p-1}\pi^{p-1}, \quad g_i \in k^p.$$

Por otra parte sea $\alpha = a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n\pi^n$, con $a_i \in k^p$, $a_n \neq 0$, $n < p$. Así tenemos $\alpha = q(\pi)$, donde q es un polinomio separable sobre k^p, porque su grado es menor que p. Sea k' la adjunción a k de las raíces de q y sea k'_1 la adjunción a k^p de estas mismas raíces.

Claramente $k' = kk'_1 = k^p(\pi)k'_1 = k'_1(\pi)$. Los elementos de k'_1 son separables sobre k^p, mientras que π no lo es, luego $\pi \notin k'_1$. Sin embargo $\pi^p \in k^p \subset k'_1$, luego $|k' : k'_1| = p$.

De este modo, cada $x \in k'$ se expresa de forma única como

$$x = c_0 + c_1\pi + \cdots + c_{p-1}\pi^{p-1}, \qquad c_i \in k'_1.$$

Definimos

$$\frac{dx}{d\pi} = c_1 + \cdots + (p-1)c_{p-1}\pi^{p-2}.$$

Es claro que esta derivación extiende a la derivada respecto de π en k. También es fácil probar que satisface las reglas de derivación de la suma y el producto. En k' podemos descomponer

$$\alpha = a_n\prod_{i=1}^{n}(\pi - \beta_i),$$

y ahora podemos calcular

$$\frac{d\alpha}{d\pi} = a_n\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(\pi - \beta_j).$$

Claramente,

$$\frac{\pi}{\alpha}\,\frac{d\alpha}{d\pi} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{\pi - \beta_i} = \sum_{i=1}^{n}\Big(1 + \frac{1}{\frac{\pi}{\beta_i} - 1}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{\pi}{\beta_i}\right)^p - 1}\left(1 + \frac{\pi}{\beta_i} + \cdots + \left(\frac{\pi}{\beta_i}\right)^{p-1}\right)\right).$$

Esta fórmula muestra que

$$g_0 = \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{\pi}{\beta_i}\right)^p - 1}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{\frac{\pi}{\beta_i} - 1}\right)\right)^p = \Big(\frac{\pi}{\alpha}\,\frac{d\alpha}{d\pi}\Big)^p.$$

Por consiguiente:

$$C_\pi\Big(\frac{d\alpha}{\alpha}\Big) = \frac{\pi^p}{\alpha^p}\Big(\frac{d\alpha}{d\pi}\Big)^p\frac{d\pi^p}{\pi^p} = \frac{\pi^p}{\alpha^p}\frac{d\alpha^p}{d\pi^p}\frac{d\pi^p}{\pi^p} = \frac{d\alpha^p}{\alpha^p}.$$

■

Definición B.24 Sea k un cuerpo de series de potencias de característica prima p. El *operador de Cartier* de k es el operador del espacio de las formas diferenciales de k en el espacio de las formas diferenciales de k^p dado por

$$C\Big((u_0 + u_1\pi + \cdots + u_{p-1}\pi^{p-1})\frac{d\pi}{\pi}\Big) = u_0\frac{d\pi^p}{\pi^p},$$

donde $u_i \in k^p$ y π es cualquier primo de k.

Tenemos que el operador de Cartier es k^p-lineal, su núcleo lo constituyen las formas diferenciales exactas de k y para todo $\alpha \in k$ no nulo se cumple

$$C\Big(\frac{d\alpha}{\alpha}\Big) = \frac{d\alpha^p}{\alpha^p}.$$

Estas propiedades lo determinan completamente.

Residuos Terminamos la sección introduciendo un invariante muy importante de las formas diferenciales en un cuerpo de series de potencias.

Definición B.25 Sea k un cuerpo de series de potencias sobre un cuerpo de constantes k_0. Definimos el *residuo* respecto a un primo π de un elemento

$$\alpha = \sum_{-\infty \ll n} c_n\pi^n \in k$$

como

$$\mathrm{Res}_\pi\,\alpha = c_{-1}.$$

Es claro que $\mathrm{Res} : k \longrightarrow k_0$ es una aplicación k_0-lineal y además es continua si en k_0 consideramos la topología discreta. Además,

$$\mathrm{Res}_\pi\Big(\frac{d\alpha}{d\pi}\Big) = 0$$

y

$$\mathrm{Res}_\pi(c\pi^n) = \begin{cases} c & \text{si } n = -1, \\ 0 & \text{si } n \neq -1, \end{cases} \qquad c \in k_0.$$

Definimos el *residuo* de una forma diferencial como

$$\mathrm{Res}_\pi(\beta\,d\alpha) = \mathrm{Res}_\pi\Big(\beta\,\frac{d\alpha}{d\pi}\Big).$$

Teorema B.26 *Sea k un cuerpo de series de potencias y π, π_1 dos primos de k. Entonces, para toda forma diferencial ω de k se cumple*

$$\mathrm{Res}_\pi\,\omega = \mathrm{Res}_{\pi_1}(\omega).$$

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que para todo $\beta \in k$ se cumple

$$\operatorname{Res}_\pi \beta = \operatorname{Res}_{\pi_1}\Big(\beta \frac{d\pi}{d\pi_1}\Big), \tag{B.10}$$

pues entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{\pi_1}(\beta\, d\alpha) &= \operatorname{Res}_{\pi_1}\Big(\beta \frac{d\alpha}{d\pi_1}\Big) = \operatorname{Res}_{\pi_1}\Big(\beta \frac{d\alpha}{d\pi}\frac{d\pi}{d\pi_1}\Big)\\ &= \operatorname{Res}_{\pi}\Big(\beta \frac{d\alpha}{d\pi}\Big) = \operatorname{Res}_{\pi}(\beta\, d\alpha).\end{aligned}$$

Como las aplicaciones Res_π y $\operatorname{Res}_{\pi_1}$ son lineales y continuas, basta probar el teorema cuando $\beta = \pi^n$. Supongamos primero que k tiene característica 0. Entonces, si $n \neq -1$, tenemos que el miembro izquierdo vale 0, y el derecho también, porque

$$\pi^n \frac{d\pi}{d\pi_1} = \frac{d}{d\pi_1}\Big(\frac{\pi^{n+1}}{n+1}\Big).$$

Si $n = -1$, desarrollamos

$$\pi = c_1\pi_1 + c_2\pi_1^2 + \cdots,$$

con lo que

$$\frac{d\pi}{d\pi_1} = c_1 + 2c_2\pi_1 + \cdots,$$

de donde

$$\frac{1}{\pi}\frac{d\pi}{d\pi_1} = \frac{c_1 + 2c_2\pi_1 + \cdots}{c_1\pi_1 + c_2\pi_1^2 + \cdots} = \frac{1}{\pi_1} + \cdots,$$

y los dos miembros de la fórmula valen 1.

Consideremos ahora el caso en que k tiene característica prima p. Usaremos el operador de Cartier C. En primer lugar observamos que si ω es una forma diferencial arbitraria de k, entonces

$$\operatorname{Res}_\pi(\omega) = \operatorname{Res}_{\pi^p}(C(\omega)).$$

En efecto, descompongamos ω en la forma (B.9), donde $u = \sum c_n\pi^n$. Entonces

$$u_i\pi^i = \sum_{n\equiv i \ (\text{mód } p)} c_n\pi^n, \qquad 0 \leq i < p,$$

con lo que

$$C(\omega) = u_0 \frac{d\pi^p}{\pi^p} = \Big(\sum\nolimits_n c_{np}(\pi^p)^n\Big)\frac{d\pi^p}{\pi^p},$$

luego ω y $C(\omega)$ tienen ambas residuo c_0.

Más aún, de los cálculos que acabamos de realizar se sigue que si $v(\omega) \geq 0$ entonces $v(C(\omega)) \geq 0$, y que si $v(\omega) = r-1 \leq 0$ entonces $v(C(\omega)) \geq r/p-1$. Por lo tanto, aplicando repetidas veces el operador de Cartier podemos restringirnos

al caso en que $v(\omega) \geq -1$. Más concretamente, basta probar (B.10) cuando $v(\beta) \geq -1$ o, más concretamente, cuando $\beta = \pi^n$, con $n \geq -1$. Ahora bien, si $n \geq 0$ ambos miembros valen 0, y si $n = -1$ vale el mismo razonamiento que en el caso de característica 0. ∎

Definición B.27 Sea k un cuerpo de series de potencias sobre un cuerpo de coeficientes k_0. Llamaremos *residuo* de una forma diferencial $\omega = \beta\, d\alpha$ de k a

$$\operatorname{Res}\omega = \operatorname{Res}_\pi\Big(\beta\,\frac{d\alpha}{d\pi}\Big),$$

para cualquier primo π de k.

La aplicación Res es k_0-lineal. Las formas enteras tienen residuo nulo. También conviene recordar que en la prueba del teorema anterior hemos visto que el operador de Cartier conserva los residuos.

Recordemos que, por el teorema 5.20, una extensión finita K de un cuerpo de series de potencias $k = k_0((\pi))$ es de la forma $K = k_1((\rho))$, donde k_1 es la clausura algebraica de k_0 en K.

Teorema B.28 *Sea $K = k_1((\rho))$ una extensión finita separable de un cuerpo de series formales de potencias $k = k_0((\pi))$. Entonces, para todo $\alpha \in k$ y todo $\beta \in K$, se cumple*

$$\operatorname{Tr}_{k_0}^{k_1}(\operatorname{Res}_K(\beta\, d\alpha)) = \operatorname{Res}_k(\operatorname{Tr}_k^K(\beta)\, d\alpha).$$

Demostración: Sea $L = k_1((\pi))$. Basta probar

1. $\operatorname{Tr}_{k_0}^{k_1}(\operatorname{Res}_L(\beta\, d\alpha)) = \operatorname{Res}_k(\operatorname{Tr}_k^L(\beta)\, d\alpha)$, para $\alpha \in k$, $\beta \in L$,
2. $\operatorname{Res}_K(\beta\, d\alpha) = \operatorname{Res}_L(\operatorname{Tr}_L^K(\beta)\, d\alpha)$, para $\alpha \in L$, $\beta \in K$.

Para probar 1) observamos que $L = kk_1$, por lo que $|L : k| \leq |k_1 : k_0|$. Por otra parte, cada k_0-monomorfismo de k_1 (en una clausura algebraica) se extiende claramente a un k-monomorfismo de L. Esto prueba la igualdad de los índices y, además, si

$$\beta = \sum_i a_i\pi^i, \qquad a_i \in k_1,$$

entonces

$$\operatorname{Tr}_k^L(\beta) = \sum_i \operatorname{Tr}_{k_0}^{k_1}(a_i)\pi^i.$$

Sea

$$\frac{d\alpha}{d\pi} = \sum_j b_j\pi^j, \qquad b_j \in k_0.$$

Entonces

$$\operatorname{Tr}_{k_0}^{k_1}(\operatorname{Res}_L(\beta\, d\alpha)) = \operatorname{Tr}_{k_0}^{k_1}(\operatorname{Res}_\pi(\beta\,\frac{d\alpha}{d\pi})) = \operatorname{Tr}_{k_0}^{k_1}\Big(\sum_{i+j=-1} a_ib_j\Big)$$

$$= \sum_{i+j=-1} \mathrm{Tr}_{k_0}^{k_1}(a_i)b_j = \mathrm{Res}_\pi\Big(\mathrm{Tr}_k^L(\beta)\,\frac{d\alpha}{d\pi}\Big) = \mathrm{Res}_K(\mathrm{Tr}_k^L(\beta)\,d\alpha).$$

Para probar 2) vemos que $f(L/k) = |k_1 : k_0| = f(K/k)$, luego $f(K/L) = 1$ y, por lo tanto, la extensión K/L está totalmente ramificada. Por el teorema [TAl 9.9] el polinomio mínimo de ρ sobre L es un polinomio de Eisenstein. En particular, si ρ_i son los conjugados de ρ en una extensión de K tenemos que

$$\prod_{i=1}^{e} \rho_i = c(\pi) = c_1\pi + c_2\pi^2 + \cdots, \qquad c_i \in k_1, \quad c_1 \neq 0. \tag{B.11}$$

Basta probar que

$$\mathrm{Res}_K(\beta\,d\pi) = \mathrm{Res}_L(\mathrm{Tr}_L^K(\beta)\,d\pi), \qquad \beta \in K,$$

pues 2) se sigue de este hecho aplicado a $\beta\,\dfrac{d\alpha}{d\pi}$ en lugar de β. A su vez basta probar que

$$\mathrm{Res}_K(\beta\,d\rho) = \mathrm{Res}_L\Big(\mathrm{Tr}_L^K\Big(\beta\,\frac{d\rho}{d\pi}\Big)d\pi\Big), \qquad \beta \in K,$$

pues la igualdad anterior se sigue de esta aplicada a $\beta\,\dfrac{d\pi}{d\rho}$ en lugar de β. Ambos miembros son k_1-lineales y continuos en β, luego podemos tomar $\beta = \rho^{n-1}$, para un $n \in \mathbb{Z}$, es decir, hemos de probar que

$$\mathrm{Res}_K\Big(\rho^n\,\frac{d\rho}{\rho}\Big) = \mathrm{Res}_L\Big(\mathrm{Tr}_L^K\Big(\rho^{n-1}\,\frac{d\rho}{d\pi}\Big)d\pi\Big), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{B.12}$$

Las derivadas siguientes las calculamos en la adjunción a K de los elementos ρ_i (que es un cierto cuerpo de series de potencias):

$$\frac{dc}{d\pi} = \sum_{i=1}^{e} \prod_{j\neq i} \rho_i \frac{d\rho_i}{d\pi},$$

luego

$$\frac{1}{c}\,\frac{dc}{d\pi} = \sum_{i=1}^{e} \frac{1}{\rho_i}\,\frac{d\rho_i}{d\pi} = \mathrm{Tr}_L^K\Big(\frac{1}{\rho}\,\frac{d\rho}{d\pi}\Big).$$

Ahora bien, de (B.11) se sigue inmediatamente que el residuo del miembro izquierdo es 1, luego

$$\mathrm{Res}_L\Big(\mathrm{Tr}_L^K\Big(\rho^{-1}\,\frac{d\rho}{d\pi}\Big)\Big) = 1 = \mathrm{Res}_K(\rho^{-1}\,d\rho).$$

Observemos que la derivada $\dfrac{d\rho}{d\pi}$ es la misma calculada en K o en la extensión en la que estábamos trabajando. En efecto, en ambos cuerpos es la inversa de la derivada $\dfrac{d\pi}{d\rho}$, y ésta está determinada por la expresión de π como serie de potencias de ρ.

Hemos probado (B.12) para $n = 0$. Supongamos ahora que $\operatorname{car} k \nmid n$, $n \neq 0$. Entonces

$$\operatorname{Tr}_L^K\Big(\rho^{n-1}\,\frac{d\rho}{d\pi}\Big) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}_L^K\Big(\frac{d\rho^n}{d\pi}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{e}\frac{d\rho_i^n}{d\pi} = \frac{1}{n}\,\frac{d}{d\pi}\sum_{i=1}^{e}\rho_i^n = \frac{1}{n}\,\frac{d}{d\pi}\,\operatorname{Tr}_L^K(\rho^n).$$

Ahora basta tener en cuenta que las derivadas tienen residuo nulo, luego se cumple (B.12). Nos queda el caso en que $\operatorname{car} k = p \mid n$, $n \neq 0$. Digamos que $n = pn'$. Veremos que el operador de Cartier nos reduce este caso a los anteriores. En primer lugar expresamos (B.12) en la forma equivalente

$$\operatorname{Res}_K\Big(\rho^n\,\frac{d\rho}{\rho}\Big) = \operatorname{Res}_L\Big(\operatorname{Tr}_L^K\Big(\rho^n\,\frac{\pi}{\rho}\,\frac{d\rho}{d\pi}\Big)\,\frac{d\pi}{\pi}\Big).$$

Sean C_K y C_L los operadores de Cartier de K y L respectivamente. Puesto que éstos conservan los residuos, basta probar que

$$\operatorname{Res}_{K^p}\Big(C_K\Big(\rho^n\,\frac{d\rho}{\rho}\Big)\Big) = \operatorname{Res}_{L^p}\Big(C_L\Big(\operatorname{Tr}_L^K\Big(\rho^n\,\frac{\pi}{\rho}\,\frac{d\rho}{d\pi}\Big)\,\frac{d\pi}{\pi}\Big)\Big). \tag{B.13}$$

Para ello vamos a ver que C_L conmuta con la traza, de modo que esto será equivalente a

$$\operatorname{Res}_{K^p}\Big((\rho^p)^{n'}\,\frac{d\rho^p}{\rho^p}\Big) = \operatorname{Res}_{L^p}\Big(\operatorname{Tr}_{L^p}^{K^p}\Big((\rho^p)^{n'}\,\frac{\pi^p}{\rho^p}\,\frac{d\rho^p}{d\pi^p}\Big)\,\frac{d\pi^p}{\pi^p}\Big), \tag{B.14}$$

pero esto es (B.12) para $n' = n/p$. Por consiguiente, aplicando un número finito de veces los operadores de Cartier reducimos el problema a los casos ya probados.

Así pues, sólo falta comprobar la igualdad de los miembros derechos de (B.13) y (B.14). Para ello observamos que $|K : K^p| = p$ y que $\pi \notin K^p$ (pues si $\pi = \alpha^p$ entonces $\alpha \notin L$ y la extensión $L(\alpha)/L$ sería inseparable). Por consiguiente $K = K^p(\pi)$. Esto nos permite expresar

$$\frac{\pi}{\rho}\,\frac{d\rho}{d\pi} = \sum_{i=0}^{p-1} g_i\pi^i, \qquad g_i \in K^p.$$

Entonces

$$\operatorname{Tr}_L^K\Big(\rho^n\,\frac{\pi}{\rho}\,\frac{d\rho}{d\pi}\Big) = \sum_{i=0}^{p-1}\operatorname{Tr}_L^K(\rho^n g_i)\pi^i,$$

y como $\rho^n g_i \in K^p$, resulta que $\operatorname{Tr}_L^K(\rho^n g_i) \in L^p$, de donde

$$C_L\Big(\operatorname{Tr}_L^K\Big(\rho^n\,\frac{\pi}{\rho}\,\frac{d\rho}{d\pi}\Big)\,\frac{d\pi}{\pi}\Big) = \operatorname{Tr}_L^K(\rho^n g_0)\,\frac{d\pi^p}{\pi^p} = \operatorname{Tr}_{L^p}^{K^p}(\rho^n g_0)\,\frac{d\pi^p}{\pi^p}$$

$$= \operatorname{Tr}_{L^p}^{K^p}\Big(\frac{\pi^p}{d\pi^p}C_K\Big(\rho^n\frac{\pi}{\rho}\frac{d\rho}{d\pi}\frac{d\pi}{\pi}\Big)\Big)\,\frac{d\pi^p}{\pi^p} = \operatorname{Tr}_{L^p}^{K^p}\Big(\frac{\pi^p}{d\pi^p}\,\rho^n C_K\Big(\frac{d\rho}{\rho}\Big)\Big)\,\frac{d\pi^p}{\pi^p}$$

$$= \operatorname{Tr}_{L^p}^{K^p}\Big(\frac{\pi^p}{d\pi^p}\,\rho^n\frac{d\rho^p}{\rho^p}\Big)\,\frac{d\pi^p}{\pi^p} = \operatorname{Tr}_{L^p}^{K^p}\Big((\rho^p)^{n'}\,\frac{\pi^p}{\rho^p}\,\frac{d\rho^p}{d\pi^p}\Big)\frac{d\pi^p}{\pi^p},$$

como había que probar. ∎

Bibliografía

[1] Appell, P, y Lacour, E. *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications.* Gauthier-Villars, Paris, 1897.

[2] Artin, E. *Algebraic Numbers and Algebraic Functions.* Nelson, 1967.

[3] Bliss, G.A. *Algebraic Functions.* Dover, New York, 1966.

[4] Eichler, M. *Introduction to the theory of algebraic numbers and functions.* Academic Press, New York, 1966.

[5] Fulton, W. *Curvas algebraicas. Introducción a la geometría algebraica.* Reverté, Barcelona, 1971.

[6] Iyanaga, S. (Ed.) *The Theory of Numbers.* North Holland, Amsterdam, 1969.

[7] Kendig, K. *Elementary Algebraic Geometry.* Springer, New York, 1977.

[8] Lang, S. *Introduction to Algebraic Geometry* Addison-Wesley P.C., California, 1964.

[9] Lang, S. *Introduction to algebraic and abelian functions.* Addison-Wesley, Massachusetts, 1972.

[10] Markushevich, A. *Teoría de las funciones analíticas* Ed. Mir, Moscú, 1978.

[11] Milne, J.S. *Elliptic Curves.* Apuntes, 1996.

[12] Murty, V.K. *Introduction to Abelian Varieties* AMS, 1993.

[13] Rosen, M. *Number Theory in Function Fields* Springer, New York, 2002.

[14] Shafarevich, I. R. *Basic Algebraic Geometry.* Springer, New York, 1994.

[15] Siegel, C. L. *Topics in Complex Function Theory.* (3 volúmenes) John Whiley & sons, New York, 1969, 1971, 1973.

[16] Walker, R.J. *Algebraic Curves.* Dover, New York, 1962.

[17] Zariski, O., Samuel, P. *Commutative Algebra.* Springer, New York, 1975.

Índice de Materias

abierto principal, 62
algebraico (conjunto), 3, 40
anillo local, 19, 45
aplicación
    birracional, 76
    finita, 79, 81
    polinómica, 11
    racional, 73
    regular, 58

base canónica (de diferenciales), 317
birracional
    aplicación, 76
    equivalencia, 76

Cartier (operador de), 384
cero, 350
clase
    canónica, 245
    diferencial, 245
clausura proyectiva, 48
codimensión, 88
componente irreducible, 16
conjunto algebraico
    cuasiproyectivo, 55
conservación, 204
coordenadas homogéneas, 39
cuerpo
    de constantes, 183
      exacto, 184
    de descomposición, 201
    de inercia, 202
curva, 93
    afín plana, 6, 18
    elíptica, 268

diferencial, 102, 106, 259
    de 1a/2a/3a clase, 280
    de un polinomio, 99
diferente, 212
    local, 211
dimensión, 88
    de Krull, 97
    de un divisor, 253
    pura, 88
discriminante, 272
divisor, 203, 352
    de una diferencial, 260
    diferencial, 245
    normal, 326
    primo, 187, 349
    principal, 206, 352

ecuación local, 346
elíptica
    curva, 268, 270
    función, 270
elíptico (cuerpo), 268
elementos ideales, 256
equivalencia
    de divisores, 210
    proyectiva, 60
escisión, 204
    completa, 204
espacio
    afín, 2
    proyectivo, 38
    tangente
      de Zariski, 106
extensión de constantes, 212

finita (aplicación), 79, 81
forma diferencial, 242, 381
forma normal de Weierstrass, 241

fracción algebraica, 183
Frobenius (aplicación de), 223
función
    algebraica, 183
    racional, 18, 44

genérico (punto), 23
género, 259, 263
grado, 208
    absoluto, 213
    de inercia, 194
    de un divisor, 195
    de una aplicación, 185
    de una aplicación finita, 148
    local, 194
    mínimo, 265
grupo
    de clases, 210, 352
    de descomposición, 201
    de inercia, 202

hessiano, 239
hiperelíptica (curva), 268
hiperelíptico (cuerpo), 268
hiperplano proyectivo, 39
hipersuperficie, 6, 18, 93
homogéneo (ideal), 40
Hurwitz (fórmula de), 219, 264

índice de ramificación, 192
irreducible
    espacio topológico), 15
    geométricamente, absolutamente, 27, 46, 56
isogenia, 356
isomorfismo, 58

lemniscata de Bernoulli, 301

múltiplo, 253
multiplicidad, 232, 237

no ramificada (aplicación), 149
noetheriano (espacio), 16
norma, 205
    absoluta, 284
número de intersección, 228, 237

orden de una serie, 366

periodo, 311, 318
    polar, 310
polinómica (aplicación), 11
polo, 350
proyección, 81
punto
    de inflexión, 238
    ordinario, 245
    simple, doble, triple, etc., 232

radical, 8
ramificación, 192, 205
    completa, 205
regular
    aplicación, 58
    función, 18, 45
    punto, variedad, 110, 116
    serie, 372
regularización, 134
relaciones de Riemann, 315
residuo, 248, 384, 386
Rieman (forma de), 170

Segre (variedad), 65
separador (elemento), 241
serie
    de potencias, 365
    de Taylor, 118
singular
    función, 19, 45
    punto, 110
singularidad, 19, 45, 73
sistema de parámetros locales, 113
soporte, 354
superficie, 93

término inicial, 365
tangente, 232, 233
Teorema
    de Abel, 323, 325
    de Abel-Jacobi, 328
    de Bezout, 231
    de Jacobi, 328
    de los residuos, 250
    de Noether, 84

de preparación de Weierstrass, 373
de Riemann-Roch, 262
parte de Riemann, 263
topología
compleja, 140
de Zariski, 14, 43
transformación proyectiva, 60

variedad
algebraica
absoluta, 27, 46, 56
afín, 15, 62
cuasiproyectiva, 55
proyectiva, 43
jacobiana, 319
lineal
afín, 6
proyectiva, 54
tangente, 100, 110, 126
Veronese (variedad de), 84

Zariski (topología de), 14, 43
zeta (función), 164
no degenerada, 170